Problèmes de l'OMC 2016 – version du 12 février 2016

1. Les entiers $1, 2, 3, \ldots, 2016$ sont écrits sur un tableau. On peut choisir n'importe quelle paire de nombres sur le tableau et les remplacer par leur moyenne. Par exemple, on peut remplacer 1 et 2 par 1.5 ou on peut remplacer 1 et 3 par une deuxième copie de 2. Après avoir effectué 2015 remplacements de la sorte, il ne restera qu'un seul nombre sur le tableau.

   (a) Montrez qu'il existe une séquence de remplacements pour laquelle le nombre final est 2.

   (b) Montrez qu'il existe une séquence de remplacements pour laquelle le nombre final est 1000.

2. Voici un système de 10 équations avec 10 variables réelles $v_1, \ldots, v_{10}$:

$$v_i = 1 + \frac{6\, v_i^2}{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{10}^2} \qquad (i = 1, \ldots, 10).$$

   Trouvez tous les 10-uples $(v_1, v_2, \ldots, v_{10})$ qui sont solution au système d'équations.

3. Trouvez tous les polynômes $P(x)$ à coefficients entiers tels que $P(P(n)+n)$ est un nombre premier pour une infinité de valeurs de n.

4. Vulcain contre la puce. Soit A, B et F des nombres entiers positifs choisis de façon à ce que $A < B < 2A$. Une puce est située sur le nombre 0 de la droite réelle. La puce se déplace en faisant des sauts de longueur A ou B vers la droite. Avant que la puce ne commence à sauter, Vulcain choisit un nombre fini d'intervalles $\{m+1, m+2, \ldots, m+A\}$ consistant en A entiers positifs consécutifs et met de la lave sur les entiers de chaque intervalle. Les intervalles doivent être choisis de façon à ce que:

   (i) deux intervalles distincts ne peuvent pas être superposés, ni adjacents;
   (ii) il doit y avoir au moins F entiers sans lave entre chaque paire

d'intervalles; et

(iii) aucune lave n'est placée sur les entiers inférieurs à F.

Montrez que la plus petite valeur de F pour laquelle la puce peut traverser les intervalles sans toucher à la lave peu importe les choix de Vulcain est $F = (n-1)A + B$, où n est l'entier positif tel que $\dfrac{A}{n+1} \leq B - A < \dfrac{A}{n}$.

5. Soit $\triangle ABC$ un triangle aigu dont les hauteurs AD et BE se croisent en H. Soit M le point milieu du segment AB et supposons que les cercles circonscrits aux triangles $\triangle DEM$ et $\triangle ABH$ se rencontrent aux points P et Q avec P du même côté de CH que le point A. Montrez que les droites ED, PH et MQ passent toutes par un même point situé sur le cercle circonscrit à $\triangle ABC$.