Rapport de la quarante-deuxième Olympiade Mathématique du Canada 2010

Outre le soutien de son commanditaire principal, la Financière Sun Life, et de l'Université de la Colombie-Britannique, la Société mathématique du Canada adresse les remerciements aux partenaires suivants :

Ministère de l'Éducation (Alberta)

Ministère de l'Éducation (Manitoba)

Ministère de l'Éducation (New Brunswick)

Ministère de l'Éducation (Newfoundland and Labrador)

Ministère de l'Éducation (Northwest Territories)

Ministère de l'Éducation (Nova Scotia)

Ministère de l'Éducation (Nunavut)

Ministère de l'Éducation (Ontario)

Ministère de l'Éducation, Loisir et Sport (Québec)

Ministère de l'Éducation (Saskatchewan)

Ministère de l'Éducation (Yukon)

A.K. Peters Ltd.

John Wiley and Sons Canada Ltd.

McGraw-Hill Ryerson Canada

Nelson Education Ltd.

The Art of Problem Solving

Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo

L’Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l’OMC, un sous-comité du Comité des concours mathématiques. Instituée en 1969, l’OMC offre aux élèves qui se sont illustrés dans les concours provinciaux de mathématiques une occasion de concourir sur la scène nationale. Elle sert en outre d’épreuve préparatoire aux élèves canadiens qui participent à l’Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Les élèves qui obtiennent une note suffisamment élevée au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) de la Financière Sun Life se qualifient pour l’OMC. Cette année, les 68 élèves qui ont obtenu les meilleurs résultats au DOCM ont automatiquement été invités à l’OMC. Une centaine d'autres (à partir de la 69e place) ont aussi été invités à faire parvenir à l’Université de Waterloo leurs solutions à dix questions dites « de repêchage », publiées sur Internet pendant une semaine. Vingt-quatre élèves ont été invités à la suite de ce repêchage. D’abord pratique expérimentale, le repêchage de qualification à l’OMC est désormais un concours bien établi dont l’objectif consiste à sélectionner des élèves supplémentaires pour l’OMC. Je remercie Ian VanderBurgh d’avoir organisé ce repêchage et recruté une équipe de correcteurs (Serge D’Alessio, Fiona Dunbar, Mike Eden, Barry Ferguson, Steve Furino, Judith Koeller, Jen Nissen, J.P. Pretti, Ian VanderBurgh et Troy Vasiga), qui ont corrigé les 82 copies reçues.

La Société remercie de leur appui la Financière Sun Life et les autres commanditaires nommés à la page précédente.

Je remercie également les membres du Comité de l’OMC d’avoir soumis des problèmes, révisé le test et corrigé les solutions : Andrew Adler, Edward Barbeau, Jason Bell, Julia Gordon, Robert Morewood, Zinovy Reichstein, Naoki Sato, Jozsef Solymosi et Adrian Tang. Merci aussi à Thomas Griffiths, qui a révisé l’examen final, et à Joseph Khoury, qui a traduit les problèmes en français. Enfin, j’aimerais remercier Susan Latreille, Laura Alyea et le directeur général Johan Rudnick pour tout le travail accompli au bureau de la SMC.

Kalle Karu, président
Comité de l’OMC

La 42e Olympiade mathématique du Canada s'est déroulée le mercredi 24 mars 2010. Un total de 98 réponses ont été reçues, dont 77 étaient admissibles à des prix officiels. Parmi les concurrents, 80 venaient d'écoles du Canada et 18 de l'étranger. Six provinces canadiennes y étaient représentées (nombre de concurrents entre parenthèses) :

ALB. (7) C.-B. (19) MB (1) ON (48) QC (4) SK (1)

L'OMC 2010 comportait cinq questions valant sept points chacune. Le pointage maximal, obtenu par le gagnant, est de 30 points. Les concurrents officiels ont été classés dans quatre divisions, en fonction de leurs résultats :

Division	Fourchette	Nbre d'élèves
I	19-30	8
II	15-18	16
III	9-14	27
IV	0-8	47

PREMIER PRIX – Coupe Sun Life - $2000

Alex Song
Vincent Massey Secondary School, Windsor, ON

DEUXIÈME PRIX - $1500

James Rickards
Colonel By Secondary School, Greely, ON

TROISIÈME PRIX - $1000

Jonathan Zung
University of Toronto Schools, Toronto, ON

MENTIONS HONORABLES - $500

Robin Cheng
Pinetree Secondary School, Coquitlam, BC

Zhi Qiang Liu
Don Mills Collegiate Institute, Toronto, ON

Chen Sun
A.B. Lucas Secondary School, London, ON

Jixuan Wang
Don Mills Collegiate Institute, Toronto, ON

Yuqi Zhu
University Hill Secondary School, Vancouver, BC

Division 1 19-30

Alex Song	Vincent Massey S.S.	ON
James Rickards	Colonel By S.S.	ON
Jonathan Zung	University of Toronto Schools	ON
Robin Cheng	Pinetree S.S.	BC
Zhi Qiang Liu	Don Mills C.I.	ON
Chen Sun	A.B. Lucas S.S.	ON
Jixuan Wang	Don Mills C.I.	ON
Yuqi Zhu	University Hill S.S.	BC

Division 2 15-18

Yaroslav Babich	Sir Winston Churchill H.S.	AB
Brian Bi	Woburn C.I.	ON
Zhangchi Chen*	Suzhou H.S., China	
Calvin Deng	Enloe High School	NC
James Duyck	Vincent Massey S.S.	ON
Neil Gurram	ICAE	MI
Soroosh Hemmati	Western Canada H.S.	AB
Heinrich Jiang	Vincent Massey S.S.	ON
Kevin Li	A&M Consolidated H.S.	TX
Mariya Sardarli	Strathcona Comp. H.S.	AB
Susan Sun	West Vancouver S.S.	BC
Zijian Yao*	Lester Pearson College	BC
Bill Ye	Olympiads School	ON
Pei Jun Zhao	London Central S.S.	ON
Kevin Zhou	Woburn C.I.	ON
Jonathan Y Zhou	Pinetree S.S.	ON

Division 3 9-14

Joshua Alman	University of Toronto Schools	ON
Ram Bhaskar*	ICAE	MI
Sifan Bi*	Sir John A. Macdonald S.S.	ON
Matthew Brennan	Upper Canada College School	ON
Richard Chen	Sir John A. Macdonald C.I.	ON
Liqing Ding	Branksome Hall	ON
Kun Dong*	Sir William Mulock S.S.	ON
Yale Fan*	Valley C.S.	OR
Jun Hou Fung*	Can. Int'l School of Hong Kong	
Jiayue Gao	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Fang Guo	Richmond Hill H.S.	ON
Ursula Anne Lim	Burnaby North S.S.	BC
David Siqi Liu	Vincent Massey S.S.	ON
Jackie Liu	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Anupa Murali	Bishop Brady H.S.	NH
Chang Sun Park	Magee S.S.	BC
Zhongwu Shi*	Suzhou H.S., China	
Hunter Spink	Western Canada H.S.	AB
Richard Wang	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Zexuan Wang	A.Y. Jackson S.S.	ON
Shen Wang	Lord Byng S.S.	BC
Tongbin Wu	White Oaks S.S.	ON
Yu Wu	Agincourt C.I.	ON
Allen Yang	Cary Academy	NC
Steven Yu	Pinetree S.S.	BC
Joe Zeng	Don Mills C.I.	ON
Kaiven Zhou	Strathcona Comp. H.S.	AB

Division 4 0-8

Steven Chang*	ICAE	MI
Brynmor Chapman*	Valley C.S.	OR
Wonjohn Choi*	St. Francis Xavier S.S.	ON
Alexander Cowan	Marianopolis College	QC
Yuchen Cui	Martingrove C.I.	ON
Aden Dong	A.Y. Jackson S.S.	ON
Brandon Ewonus	St. Michael's Univ. School	BC
Harsha Gotur*	ICAE	MI
Changho Han	Bayview S.S.	ON
Louis Hong	Sir John A. Macdonald S.S.	ON
Albert Hu	Northern S.S.	ON
Sufyan Khan	Earl Haig S.S.	ON
Namhun Kim	ICAE	MI
Sung Jun Kim*	South Island S.S. Hong Kong	
David Kong	Glenforest S.S.	ON
Leo Lai	Prince of Wales S.S.	BC
Eung Bum Lee	West Vancouver S.S.	BC
Sukwan Lee	Heritage Woods S.S.	BC
Shen Li	Marianopolis College	QC
Felix Li	Univ. of Toronto Schools	ON
Albert Liao	St. John's Ravenscourt	MB
Yangsheng Liu	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
David Lu*	ICAE	MI
Juntao Luo	Lawrence Park C.I.	ON
Tonghui Ma	Sir John A. Macdonald C.I.	ON
Tina Marie Mitre	Dawson College	QC
Ryan Peng	Centennial College	SK
Aurick Qiao	Vincent Massey S.S.	ON
Ritvik Ramkumar	Glenforest S.S.	ON
Cristina Rosu	Univ. of Toronto Schools	ON
Wen Yi Song	Semiahmoo S.S.	BC
Shai Spilberg	Vanier College	QC
Lexuan Wang	Hugh McRoberts S.S.	BC
Michael Wong	Western Canada H.S.	AB
Kaiyu Wu	Meadowvale S.S.	ON
Tian Xia	The Woodlands School	ON
Yejia Xu*	Suzhou High School	
Yung Lin Yang	Northern S.S.	ON

Mertcan Yetkin*	Tevitol H.S., Turkey	
Fan Yin	Vincent Massey S.S.	ON
Daniel Yoo	Thornhill S.S.	ON
Simon Younan	St. Francis Xavier S.S.	ON
Fangcun Yu	Sir John A. Macdonald C.I.	ON
Eric Zhan	Univ. of Toronto Schools	ON
Cyril Zhang	Don Mills C.I.	ON
Justine Zhang	Sir Winston Churchill H.S.	AB
Allen Zhang	Univ. Transition Program	BC

* indique que l'étudiant a écrit le OMC 2010 en tant que candidat non officiel.

Rapport des correcteurs

L'épreuve de l'OMC 2010 a été corrigée par Andrew Adler, Jason Bell, Julia Gordon, Robert Morewood et Kalle Karu le 10 avril 2010. Les 95 copies reçues à ce moment ont été corrigées avec soin une première fois, puis les copies du tiers supérieur, ayant obtenu une note de 13 ou plus, ont été corrigées une deuxième fois.

Cette année, le degré général de difficulté des problèmes a bien permis de séparer les meilleurs élèves des autres. Les huit notes les plus élevées étaient réparties assez également dans la fourchette 19-30. C'est donc dire que la majorité des élèves ont obtenu moins de 15 points. Le tableau ci-dessous montre le nombre de points obtenu pour chaque problème.

Pointage	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5
7	2	49	7	9	3
6	1	5	3	1	0
5	2	0	21	0	0
4	7	4	3	3	1
3	19	3	7	2	2
2	12	3	9	9	1
1	42	8	6	23	5
0	10	11	17	13	32
-	3	15	25	38	54

Les problèmes de cette année ne couvraient pas une gamme allant du très facile au très difficile. En fait, tous étaient à peu près du même niveau de difficulté, les deux plus faciles étant celui sur la géométrie euclidienne (problème 2) et celui sur le patinage de vitesse (problème 3). Les autres problèmes étaient tous aussi difficiles; ils faisaient appel à des connaissances diverses, notamment sur les graphes, la division des polynômes et l'arithmétique modulaire.

Problème 1. Même s'il était le premier de l'épreuve, ce n'était pas le plus facile. De nombreux élèves ont réussi la partie (a), mais très peu ont proposé une bonne solution à la partie (b). Le cas particulier de n=2^k-2 a souvent été considéré comme la seule solution à la partie (b). Bon nombre d'élèves ont bien construit un pavage ayant comme valeur f(n), mais ils ont oublié de prouver qu'il s'agissait bien du pavage minimal. Comme il s'agissait du premier problème, presque tous les élèves ont essayé de le résoudre. Certains élèves y ont consacré beaucoup de temps, souvent en essayant de prouver la mauvaise conjecture.

Problème 2. Ce problème pouvait être abordé de plusieurs façons, dont bon nombre menaient à une bonne solution. La bonne solution la plus populaire consistait à prendre deux paires de triangles rectangles semblables (FAP semblable à PGB, et AGP semblable à PBH, selon la solution officielle 2). La solution 1 a été proposée quelques fois, avec quelques variantes, mais beaucoup moins fréquemment. Une autre solution (et deux ou trois autres tentatives entièrement ratées) consistait à tout calculer en coordonnées (la bonne solution consistait à choisir des axes de coordonnées raisonnables et à utiliser la formule pour calculer la distance d'un point à une ligne donnée). L'erreur la plus courante est apparue dans la solution officielle 2 : en proposant ces quadrilatères cycliques, quelques élèves n'ont pas pensé à la possibilité que P soit assez près de

A ou de B (sur l'arc le plus grand des deux) pour que le bas des droites perpendiculaires de P à AB soit à l'extérieur du cercle. Il fallait alors considérer des angles quelque peu différents.

Problème 3. Même si ce problème n'était pas très difficile, très peu d'élèves ont réussi à le résoudre entièrement. L'approche la plus courante consistait à calculer le temps nécessaire pour terminer la course. De là, il était possible de trouver que le patineur le plus rapide dépassait le plus lent 60 fois. L'erreur la plus fréquente était de conclure qu'il y avait 59 possibilités pour le patineur du centre, et de ne pas penser que si ce nombre n'est pas relativement premier avec 60, alors la course prend fin plus tôt. Deux points ont été soustraits pour cette erreur, ce qui explique le nombre élevé d'élèves qui ont obtenu 5 points. La démarche proposée dans la première solution officielle n'a été proposée par personne, la deuxième option ayant été choisie le plus souvent.

Problème 4. La principale difficulté ici tient au fait que de nombreux élèves ne savaient pas ce qu'était un graphe. Cette possibilité a fait l'objet d'une discussion lors de la sélection des problèmes, ce qui a mené à l'ajout d'une courte définition de « graphe » au problème. Cet ajout n'a toutefois pas semblé clarifier la définition. Certains ont supposé qu'il s'agissait d'une suite de points et d'arêtes, d'autres, d'une grille carrée. Ce problème étant suffisamment abstrait, il ne suffisait pas de proposer des exemples avec des graphes simples pour obtenir une preuve. L'induction était la seule démarche possible. Quelques élèves ont tenté de procéder en résolvant un système d'équations linéaires à coefficients dans le corps à deux éléments, sans toutefois obtenir une preuve complète dans cette direction.

Problème 5. La principale difficulté de ce problème tient au fait que c'était le dernier de l'épreuve, et que la plupart des élèves ont manqué de temps. Trois élèves seulement l'ont entièrement résolu. Quelques autres, peu nombreux, ont obtenu des notes partielles. Certains ont essayé une preuve par induction sur le degré. La seule démarche possible consistait à exprimer $P(x)/Q(x)$ comme $A(x)+R(x)/Q(x)$. Plusieurs personnes s'y sont essayé, mais ont malheureusement supposé ou posé que $A(x)$ a des coefficients entiers. Plusieurs élèves ont fait des progrès partiels en posant plus ou moins correctement que $R(x)= 0$, même si l'argument manquait souvent de clarté.

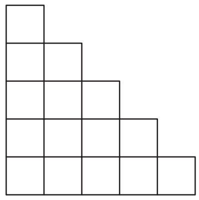
Annexe

42^{eme} Olympiade mathématique du Canada 2010

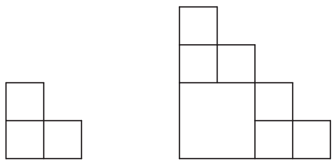
Problèmes et Solutions

L'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DU CANADA 2010
PROBLÈMES ET SOLUTIONS

(1) Pour un nombre entier positif n, un n-*escalier* est une figure composée de carrés unitaires, avec un carré dans la première rangée, deux carrés dans la deuxième rangée, et ainsi de suite, jusqu'à n carrés dans la $n$ième rangée, où les carrés les plus à gauche dans chaque rangée sont alignés verticalement. Par exemple, le 5-escalier est illustré ci-dessous.



Soit $f(n)$ le nombre minimal de tuiles carrées requises pour couvrir un n-escalier, où les longueurs des côtés des tuiles carrées peuvent être n'importe quel nombre entier positif. Par exemple, $f(2) = 3$ et $f(4) = 7$.



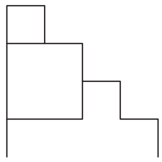
(a) Trouver tous les n tel que $f(n) = n$.
(b) Trouver tous les n tel que $f(n) = n + 1$.

Solution. (a) Un carré *diagonal* dans un n-escalier est un carré unitaire le long de la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un *recouvrement minimal* d'un n-escalier est un recouvrement qui utilise $f(n)$ tuiles carrées.

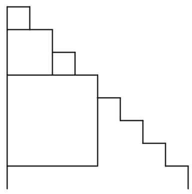
Remarquer que $f(n) \geq n$ pour tout n. Il y a n carrés diagonaux dans un n-escalier, et une tuile carrée peut couvrir au plus un carré diagonal, ce qui signifie que chaque recouvrement utilise au moins n tuiles carrées. En d'autres mots, $f(n) \geq n$. Alors, si $f(n) = n$, chaque tuile carrée couvre exactement un carré diagonal.

Soit n un entier positif tel que $f(n) = n$, et considérer un recouvrement minimal d'un n-escalier. La seule tuile carrée qui peut couvrir le carré unitaire à la première rangée est le carré unitaire lui-même.

Considérer maintenant le carré unitaire à l'extrême gauche dans la deuxième rangée. La seule tuile carrée qui peut couvrir ce carré unitaire et un carré diagonal est une tuile carrée 2×2.



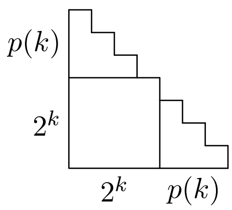
Considérer ensuite le carré unitaire à l'extrême gauche dans la quatrième rangée. La seule tuile carrée qui peut couvrir ce carré unitaire et et un carré diagonal est une tuile carrée 4×4.



En continuant cette construction, nous voyons que les longueurs des côtés des tuiles carrées utilisées seront 1, 2, 4, ainsi de suite, jusqu'à 2^k pour un certain nombre entier non négatif k. Par conséquent, la hauteur n du n-escalier est égale à $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Alternativement, $n = 2^k - 1$ pour un certain nombre entier positif k. Soit $p(k) = 2^k - 1$.

Réciproquement, nous pouvons couvrir un $p(k)$-escalier avec $p(k)$ tuiles carrées récursivement comme suit : Nous avons que $p(1) = 1$, et nous pouvons couvrir un 1-escalier avec 1 tuile carrée. Supposer que nous pouvons couvrir un $p(k)$-escalier avec $p(k)$ tuiles carrées pour un certain nombre entier positif k.

Considérer un $p(k + 1)$-escalier. Placer une tuile carrée $2^k \times 2^k$ dans le coin inférieur gauche. Noter que cette tuile carrée couvre un carré diagonal. Alors $p(k + 1) - 2^k = 2^{k+1} - 1 - 2^k = 2^k - 1 = p(k)$, ce qui nous laisse deux $p(k)$-escaliers.

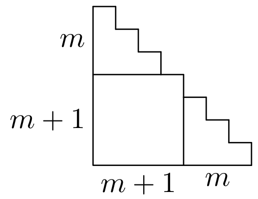


De plus, ces deux $p(k)$-escaliers peuvent être couverts avec $2p(k)$ tuiles carrées, ce qui veut dire qu'on utilise $2p(k) + 1 = p(k + 1)$ tuiles carrées.

Alors, $f(n) = n$ si et seulement si $n = 2^k - 1 = p(k)$ pour un certain nombre entier positif k. En d'autres mots, la représentation binaire de n consiste à des 1 seulement, pas des 0.

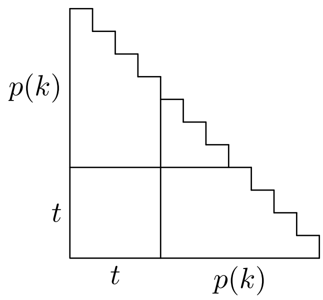
(b) Soit n un nombre entier positif tel que $f(n) = n + 1$, et considérer un recouvrement minimal d'un n-escalier. Comme il y a n carrés diagonaux, chaque tuile carrée sauf une seule couvre un carré diagonal. Montrons que la tuile carrée qui couvre le carré unitaire à l'extrême gauche doit être la tuile carrée qui ne couvre pas un carré diagonal.

Si n est pair, alors ce fait est évident comme la tuile carrée qui couvre le carré unitaire à l'extrême gauche ne peut couvrir aucun carré diagonal. On peut donc supposer que n est impair. Posons $n = 2m + 1$. On peut supposer que $n > 1$, ce qui donne que $m \geq 1$; supposons que la tuile carrée qui couvre le carré unitaire à l'extrême gauche couvre aussi un carré diagonal. Alors la longueur du côté de cette tuile carrée doit être $m+1$. Après ceci, $(m+1) \times (m+1)$ tuiles carrées sont placées, ce qui nous laisse deux m-escaliers.

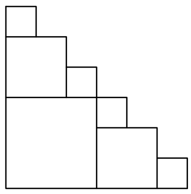


Alors, $f(n) = 2f(m) + 1$. Mais $2f(m) + 1$ est impair, et $n + 1 = 2m + 2$ is pair, alors $f(n)$ ne peut être égal à $n+1$, une contradiction. D'où, la tuile carrée qui couvre le carré unitaire au coin inférieur gauche doit être la tuile carrée qui ne couvre pas un carré diagonal.

Soit t la longueur des côtés de la tuile carré qui couvre le carré unitaire au coin inférieur gauche. Alors chaque autre tuile carrée doit couvrir un carré diagonal, ainsi par la même construction qu'à la partie (a), $n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} + t = 2^k + t - 1$ pour un certain nombre entier positif k. De plus, les premières $p(k) = 2^k - 1$ rangées du n-escalier doivent être couvertes de la même manière que le recouvrement minimal d'un $p(k)$-escalier. Par conséquent, la ligne horizontale entre les rangées $p(k)$ et $p(k) + 1$ ne traverse aucune tuile carrée. Appelons une telle ligne une *ligne de fracture*. De même, la ligne verticale entre les colonnes t et $t + 1$ est également une ligne de fracture. Ces deux lignes de fracture divisent deux $p(k)$-escaliers.



Si ces deux $p(k)$-escaliers ne se chevauchent pas, alors $t = p(k)$, d'où $n = 2p(k)$. Par exemple, le recouvrement minimal pour $n = 2p(2) = 6$ est illustré.



Supposons alors que les deux $p(k)$-escaliers se chevauchent. L'intersection des deux $p(k)$-escaliers est un $[p(k) - t]$-escalier. Comme ce $[p(k) - t]$-escalier est couvert de la même manière que les premières $p(k)$ rangées d'un recouvrement minimal d'un $p(k)$-escalier, $p(k) - t = p(l)$ pour certain entier positif $l < k$, ainsi $t = p(k) - p(l)$. Ensuite,

$$n = t + p(k) = 2p(k) - p(l).$$

Comme $p(0) = 0$, on peut récapituler en disant que n doit être de la forme

$$n = 2p(k) - p(l) = 2^{k+1} - 2^l - 1,$$

où k est un nombre entier et l est un nombre entier non négatif. En outre, notre argument montre que si n est de cette forme, alors un n-escalier peut être couvert avec $n + 1$ tuiles carrées.

Finalement, on remarque que n est de cette forme si et seulement si la représentation binaire de n contient exactement un 0:

$$2^{k+1} - 2^l - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{k-l\ 1\text{s}}0\underbrace{11\ldots1}_{l\ 1\text{s}}.$$

□

(2) Soit A, B, P trois points sur un cercle. Montrez que si a et b sont les distances de P aux tangentes à A et B et si c est la distance de P à la corde AB, alors $c^2 = ab$.

Solution. Soit r le rayon du cercle, et soit a' et b' les longueurs respectives de PA et PB. Comme $b' = 2r \sin\angle PAB = 2rc/a'$, $c = a'b'/(2r)$. Soit AC le diamètre du cercle et soit H le pied de la perpendiculaire de P à AC. Comme les deux triangles ACP et APH sont semblables, on obtient que $AH : AP = AP : AC$ ou $(a')^2 = 2ra$. De façon similaire, $(b')^2 = 2rb$. Alors

$$c^2 = \frac{(a')^2}{2r}\frac{(b')^2}{2r} = ab.$$

□

Solution alternative. Soit E, F, G les pieds des perpendiculaires aux tangentes en A et B et la corde AB, respectivemnent. On doit montrer que $PE : PG = PG : GF$, où G est le pied de la perpendiculaire de P à AB. Ceci suggère qu'on essaie de montrer que les triangles EPG et GPF sont semblables.

Comme PG est parallèle à la bissectrice de l'angle entre les deux tangentes, $\angle EPG = \angle FPG$. Comme $AEPG$ et $BFPG$ sont des quadrilatères cycliques (les angles opposés sont supplémentaires), $\angle PGE = \angle PAE$ et $\angle PFG = \angle PBG$. Mais $\angle PAE = \angle PBA = \angle PBG$, d'où $\angle PGE = \angle PFG$. Alors, les triangles EPG et GPF sont semblables.

L'argument ci-dessus avec les quadrilatères cycliques est valide seulement dans le cas où P est sur l'arc le plus court entre A et B. Un argument similaire existe pour l'autre cas.

□

(3) Trois patineurs de vitesse participent à une course amicale sur un anneau de glace. Ils partent du même point et patinent dans la même direction, mais à des vitesses différentes qu'ils maintiennent tout au long de la course. Le plus lent patine 1 tour de piste par minute, le plus rapide patine 3,14 tours de piste par minute, et celui du milieu patine L tours de piste par minute où $1 < L < 3{,}14$. La course se termine au moment où les trois patineurs sont à nouveau ensemble au même point sur l'ovale (qui peut être différent du point de départ.) Déterminer le nombre de différentes valeurs possibles de L pour lesquelles 117 dépassements surviennent avant la fin de la course. (Un dépassement est réalisé quand un patineur dépasse un autre. Le début et la fin de la course lorsque les trois patineurs sont ensemble ne sont pas comptés comme des dépassements.)

Solution. Supposons que la longueur de l'ovale est une unité. Soit $x(t)$ la différence entre les distances patinées par le patineur le plus rapide et celui le plus lent au temps t. Similairement, soit $y(t)$ soit la différence entre le patineur moyen et le patineur le plus lent. Le chemin $(x(t), y(t))$ est un rayon droit R dans $\mathbb{R}^2$ qui commence à l'origine, avec une pente qui dépend de L. Par définition, $0 < y(t) < x(t)$.

Un patineur dépasse un autre lorsque $x(t) \in \mathbb{Z}$, $y(t) \in \mathbb{Z}$ ou $x(t) - y(t) \in \mathbb{Z}$. La course se termine losque $x(t), y(t) \in \mathbb{Z}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ le point terminal du rayon R. On a besoin de trouver le nombre de tels point qui satisfont:

(a) $0 < b < a$

(b) Le rayon R intersecte $\mathbb{Z}^2$ aux points extrémités seulement.

(c) Le rayon R croise les droites $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $y - x \in \mathbb{Z}$ 357 fois.

La deuxième condition indique que a et b sont premiers entre eux. Le rayon R croise $a - 1$ des lignes $x \in \mathbb{Z}$, $b - 1$ des lignes $y \in \mathbb{Z}$ et $a - b - 1$ des lignes $x - y \in \mathbb{Z}$. Ainsi, il faut que $(A-1)+(b-1)+(a-b-1) = 117$, ou d'une manière équivalente, $2a - 3 = 117$. C'est-à-dire $a = 60$.

Maintenant b doit être un nombre entier positif inférieur à et relativement premier avec 60. Le nombre des tels b peut être trouvé en utilisant la fonction ϕ d'Euler:

$$\phi(60) = \phi(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2-1) \cdot 2 \cdot (3-1) \cdot (5-1) = 16.$$

la réponse est ainsi 16.

$\square$

Solution alternative. Tout d'abord identifions nos patineurs avec des noms. Du plus rapide au plus lent, nous avons : A, B et C. (Abel, Bernoulli et Cayley?) Maintenant, envisageons la course du point de vue de C. Par rapport à C, A et B ont complété un nombre entier de tours, puisque ces deux débutent et finissent à C. Soient n le nombre de tours effectués par A par rapport à C et m le nombre de tours effectués par B par rapport à C. Noter bien que $n > m \in \mathbb{Z}^+$. Considérons le nombre de minutes nécessaires pour terminer la course. Par rapport à C, A

est en mouvement à une vitesse de 3,14 − 1 = 2,14 tours par minute et termine la course en $\frac{n}{2{,}14}$ minutes. Aussi par rapport à C, B se déplace à une vitesse de $(L-1)$ tours par minute et termine la course en $\frac{m}{L-1}$ minutes. Puisque A et B terminent la course ensemble (quand ils rencontrent à la fois C) :

$$\frac{n}{2.14} = \frac{m}{L-1} \qquad \Rightarrow \qquad L = 2.14\left(\frac{m}{n}\right) + 1.$$

Par conséquent, il existe une correspondance bijective entre les valeurs de L et les valeurs de la fraction propre positive $\frac{m}{n}$. La fraction doit être irréductible, c'est-à-dire le couple (m,n) devrait être relativement premier, sinon, avec $k = \text{pgcd}(m,n)$, la course se termine après n/k tours pour A et m/k tours pour B quand ils rencontrent C ensemble pour la première fois. Il est aussi utile d'envisager la course du point de vue de B. Dans ce cadre de référence, A termine seulement nm tours. D'où A *dépasse* B seulement $(nm)-1$ fois, car il n'y pas de dépassement à la fin de la course (ni au début). De même A dépasse C seulement $n-1$ fois et B dépasse C seulement $m-1$ fois. Le nombre total de dépassements est :

$$117 = (n-1) + (m-1) + (n-m-1) = 2n-3 \quad \Rightarrow \quad n = 60.$$

Ainsi, le nombre de valeurs de L est égal au nombre de m tel que la fraction $\frac{m}{60}$ est positive, propre et irréductible. C'est le nombre d'entiers positifs inférieurs et relativement premier à 60. On pourrait simplement compter: $\{1, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$, mais la fonction ϕ d'Euler donne ce nombre :

$$\phi(60) = \phi(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2-1)\cdot 2 \cdot (3-1) \cdot (5-1) = 16.$$

Par conséquent, il y a 16 valeurs de L, qui donne le nombre souhaité de dépassements. Noter bien que les valeurs réelles des vitesses de A et C n'affectent pas le résultat. Elles pourraient être des valeurs rationnelles ou irrationnelles, tout autant qu'elles soient différentes, et il y a 16 valeurs possibles pour la vitesse de B entre elles. $\square$

(4) Les sommets d'un graphe fini peuvent être coloriés, soit en noir ou en blanc. Au départ, tous les sommets sont noirs. Il est permis de choisir un sommet P et de changer la couleur de P et de l'ensemble de ses voisins. Est-il possible de changer la couleur de tous les sommets de noir à blanc avec une suite d'opérations de ce type?

(Un graphe fini se compose d'un ensemble fini de sommets et d'un ensemble fini d'arêtes entre les sommets. S'il y a une arête entre le sommet A et le sommet B, alors B est dit un voisin de A.)

Solution. La réponse est oui. On fait une preuve par induction sur le nombre n de sommets. Si $n = 1$, c'est évident. Pour l'hypothèse d'induction, supposons que nous pouvons le faire pour tout graphe ayant $n-1$ sommets pour $n \geq 2$ et que X est un graphe à n sommets que nous noterons par $P_1, \ldots, P_n$.
Notons l'opération simple de changer la couleur de P_i et de tous ses voisins par

f_i. Avec la suppression d'un sommet P_i de X (avec toutes les arêtes incidentes à P_i) et en appliquant l'hypothèse d'induction au plus petit graphe résultant, il existe une suite d'opérations g_i (obtenue en composant certain f_j, avec $j \neq i$) qui change la couleur de chaque sommet dans X, à l'exception peut-être de P_i. Si g_i modifie également la couleur de P_i alors c'est tout. Ainsi, on peut supposer que g_i ne change pas la couleur de P_i pour tout $i = 1, \ldots, n$. Considérons maintenant deux cas.

Cas 1: n est pair. Alors la composition des opérations $g_1, \ldots, g_n$ change la couleur de chaque sommet du blanc au noir.

Cas 2: n est impair. Montrons que dans ce cas X a un sommet avec un nombre pair de voisins.

En effet, désignons le nombre de voisins de P_i (ou de manière équivalente, le nombre d'arêtes incidentes à P_i) par k_i. Alors $k_1 + \cdots + k_n = 2e$, où e est le nombre d'arêtes de X. Ainsi, un des nombres k_i doit être pair.

Après renumération des sommets, on peut supposer que P_1 a $2k$ voisins, par exemple $P_2, \ldots, P_{2k+1}$. La composition de f_1 avec $g_1, g_2, \ldots, g_{2k+1}$ change la couleur de chaque sommet comme nous le souhaitons.

□

(5) Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes à coefficients entiers et soit $a_n = n!+n$. Montrer que si $P(a_n)/Q(a_n)$ est un entier pour tout n, alors $P(n)/Q(n)$ est un entier pour tout entier n tel que $Q(n) \neq 0$.

Solution. Supposer qu'on divise $P(x)$ par $Q(x)$. On trouve que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

où $A(x)$ et $R(x)$ sont des polynômes à coefficients rationnels et $R(x)$ est un polynôme identiquement nul ou de degré inférieur à celui de $Q(x)$.

En écrivant les coefficients de $A(x)$ avec leur plus petit commun multiple, on peut trouver un polynôme $B(x)$ à coefficients rationnels et un entier positif b tels que $A(x) = B(x)/b$. Supposer tout d'abord que $R(x)$ n'est pas identiquement nul. Noter que pour tout entier k, $A(k) = 0$ ou $|A(k)| \geq 1/b$. Mais si $|k|$ est assez grand, $0 < |R(k)/Q(k)| < 1/b$, et alors si n est assez grand, $P(a_n)/Q(a_n)$ ne peut pas être un entier.

Donc $R(x)$ est identiquement nul, et $P(x)/Q(x) = B(x)/b$ (au moins lorsque $Q(x) \neq 0$.)

Maintenant, soit n un entier. Alors il y a une infinité des entiers k tels que $n \equiv a_k \pmod{b}$. Mais $B(a_k)/b$ est un entier, ou d'une manière équivalente b divise $B(a_k)$. Il s'en suit que b divise $B(n)$, et alors $P(n)/Q(n)$ est un entier. □