Rapport de la 41e Olympiade Mathématique du Canada (2009)

CMS
SMC

Financière Sun Life

University of British Columbia

Outre le soutien de son commanditaire principal, la Financière Sun Life, et de l'Université de la Colombie-Britannique, la Société mathématique du Canada adresse les remerciements aux partenaires suivants :

Financière Sun Life

Alberta Learning
Ministère de l'Éducation, citoyenneté et jeunesse (Manitoba)
Ministère de l'Éducation (Nouveau-Brunswick)
Ministère de l'Éducation (Terre-Neuve-et-Labrador)
Ministère de l'Éducation (Territoires du Nord-Ouest)
Ministère de l'Éducation (Nouvelle-Écosse)
Ministère de l'Éducation (Ontario)
Ministère de l'Éducation (Saskatchewan)
Maplesoft
A.K. Peters Ltd
John Wiley and Sons Canada Ltd.
McGraw-Hill Ryerson Canada
Nelson Education Ltd
The Art of Problem Solving
Département de mathématiques, Université de la Colombie-Britannique
Département de mathématiques, Université de Toronto
Département de mathématiques et de statistique, Université d'Ottawa
Département de mathématiques et de statistique, Université de Calgary
Département de mathématiques et de statistique, Université Simon Fraser
Département de mathématiques et de statistique, Université York
Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo

L'Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l'OMC, un sous-comité du Comité des concours mathématiques. Instituée en 1969, l'OMC offre aux élèves qui se sont illustrés dans les concours provinciaux de mathématiques une occasion de concourir sur la scène nationale. Elle sert en outre d'épreuve préparatoire aux élèves canadiens qui participent à l'Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Se qualifient pour l'OMC les élèves qui obtiennent une note suffisamment élevée au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM). Cette année, les 50 élèves qui ont obtenu les meilleurs résultats au DOCM ont automatiquement été invités à l'OMC. Quelque 150 autres élèves (à partir de la 51e place) ont aussi été invités à faire parvenir à l'Université de Waterloo leurs solutions à dix questions dites « de repêchage » publiées sur Internet pendant une semaine. Vinght-cinq autres élèves ont été invités à l'OMC à la suite de cet exercice. Je remercie Ian VanderBurgh d'avoir organisé cet exercice et formé une équipe de correcteurs composée de Fiona Dunbar, Mike Eden, Matthew Faubert, Steve Furino, Jeremy Kuikman, Jen Nissen, J.P. Pretti, Jim Schurter, Ian VanderBurgh et Troy Vasiga, qui ont analysé les 95 réponses reçues.

La Société remercie la financière Sun Life et les autres commanditaires dont la liste est donnée à la page précédente.

Je remercie très sincèrement les membres du Comité de l'OMC qui ont proposé des problèmes, révisé l'examen et corrigé les copies : Andrew Adler, Edward Barbeau, Jason Bell, Julia Gordon, Robert Morewood, Zinovy Reichstein, Naoki Sato et Jozsef Solymosi. Merci aussi à Richard Hoshino qui a proposé des problèmes pour l'examen et à Joseph Khoury d'avoir traduit l'examen et les solutions en français. Je suis endetté à Ed Barbeau, l'ancien président du comité de l'OMC, pour me guider à travers le processus, à Solange Hupé pour ses efforts au bureau de la SMC et au directeur administratif, Graham Wright, pour sa contribution inestimable à coordonner les efforts de tout le monde.

Kalle Karu, président
Comité de l'Olympiade mathématique du Canada

La 41e Olympiade mathématique du Canada (2009) s'est tenue le mercredi 25 mars 2009. Un total de 82 étudiants ont été invités et parmi les 81 solutions reçues, 68 étaient éligibles pour une participation officielle à l'OMC. Six provinces canadiennes étaient représentées et la répartition provinciale des concurrents était la suivante (nombre de concurrents entre parenthèses) :

BC (10) AB (8) SK (1) MB (2) ON (41) QC (3)

L'OMC 2009 comportait cinq questions valant sept points chacune. Le score le plus élevé était 30. Les concurrents officiels ont été classés dans quatre divisions, en fonction de leurs résultats :

Division	Fourchette	Nbre d'élèves
I	25 - 30	8
II	20 - 24	10
III	11 - 18	20
IV	0 - 10	30

Les tableaux ci-dessous présentent les résultats obtenus par les élèves au DOCM ainsi que leurs résultats à l'OMC. Les élèves qui ont obtenu entre 73 et 80 points sont passés directement à l'OMC; ceux qui ont obtenu entre 67 et 72 points se sont qualifiés à l'étape du repêchage. Le groupe « autre » inclut les étudiants qui ont écrit le Repêchage mais pas le DOCM, ou qui ont été invités sur la base d'autres résultats de compétitions au niveau secondaire.

80 (28, 21)
79 (29, 25)
78 (30, 28, 24, 11)
77 (15)
76 (23, 22, 21, 18, 15, 12, 2, 0)
75 (28, 20, 18, 17, 8, 2)
74 (24, 14, 8, 6, 0)
73 (16, 16, 12, 8, 2, 1, 0, 0)

72 (16)
71 (9)
70 (23, 22)
69 (17, 14, 12, 5)
68 (13, 9, 8, 7, 4, 3)
67 (16, 12, 8, 7, 3, 2, 0)

Autre (25, 25, 22, 17, 13, 10, 8, 5, 4, 1, 0)

PREMIER PRIX — Coupe Sun Life — 2 000 $

Jonathan Schneider
University of Toronto Schools, Toronto, Ontario

DEUXIÈME PRIX — 1 500 $

XiaoLin (Danny) Shi
Sir Winston Churchill High School, Calgary, Alberta

TROISIÈME PRIX — 1 000 $

Chengyue (Jarno) Sun
Western Canada High School, Calgary, Alberta

MENTIONS HONORABLES — 500 $

Ahmad Abdi
Sabouhi Academy of Art & Design
Toronto, Ontario

Yu (Robin) Cheng
Pinetree Secondary School
Coquitlam, British Columbia

Nikita Lvov
Marianopolis College
Westmount, Québec

Hunter Spink
Western Canada High School
Calgary, Alberta

Chen Sun
A.B. Lucas Secondary School
London, Ontario

Division 1

25-30

Jonathan Schneider	University of Toronto Schools	ON
Danny Shi	Sir Winston Churchill H.S.	AB
Jarno Sun	Western Canada H.S.	AB
Ahmad Abdi	Sabouhi Academy of Art & Design	ON
Robin Cheng	Pinetree S.S.	BC
Nikita Lvov	Marianapolis College	QC
Hunter Spink	Western Canada H.S.	AB
Chen Sun	A.B. Lucas S.S.	ON

Division 2

20-24

Joshua Alman	University of Toronto Schools	ON
Fang Guo	Richmond Hill H.S.	ON
Neil Gurram	ICAE	MI
Alan Huang*	ICAE	MI
Heinrich Jiang	Vincent Massey S.S.	ON
Zhiqiang Liu	Don Mills C.I.	ON
Mariya Sardarli	McKernan J.H.S.	AB
Alex Song	Waterloo C.I.	ON
Weinan Peter Wen	Vincent Massey S.S.	ON
Jonathan Zhou	Pinetree S.S.	BC
Jonathan Zung	University of Toronto Schools	ON

Division 3

11**-18**

Mohammad Babadi*	Thornlea S.S.	ON
Frank Ban	Vincent Massey S.S.	ON
Ram Bhaskar*	ICAE	MI
Ruiyuan Chen	Gleneagle S.S.	BC
Yuhan Chen	Sir Winston Churchill C.V.I	ON
Yuzhou Chen	Sir John A MacDonald C.I.	ON
Earl Chua*	Math. Train. Guild of the Philippines	
Andrew Dhawan	The Woodlands School	ON
Rong Fu	A.Y. Jackson S.S.	ON
Leo Guo	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
Zhebin Hu	Marianopolis College	QC
Junghoo Kim	University Hill S.S.	BC
Victor Liu	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
Sudharshan Mohanram*	ICAE	MI
Serguei Makarov	The Abelard School	ON
Ryan Peng	Centennial Collegiate	SK
James Rickards	Colonel By S.S.	ON
Julian Sun	Sir Winston Churchill S.S.	BC
John Russell Virata*	**Math. Train. Guild of the Philippines**	
Jixuan Wang	Don Mills C.I.	ON
Richard Wang	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Ming Jing Wong	A.B. Lucas S.S.	ON
Daniel Yoo	Thornhill S.S.	ON

Division 3

0-10

Golam Tahrif Bappi	Waterloo C.I.	ON
Brian Bi	Woburn C.I.	ON
Cheuk Ho Choi	St. George's School	BC
Naiwen Cui	Waterloo C.I.	ON
Yuri Delanghe	Harry Ainlay Senior H.S.	AB
Kun Dong*	Sir William Mulock S.S.	ON
James Duyck	Vincent Massey S.S.	ON
Henry Fung*	Glenforest S.S.	ON
Jun Hou Fung	Canadian Int'l School of Hong Kong	HK
Daniel Galperin	Waterloo C.I.	ON
Chengcheng Gui	St. John's-Ravenscourt School	MB
Adam Halski*	Kuwait English School	KW
James Hayeur	Vanier College	QC
Robin He*	ICAE	MI
Siyang He	Waterloo C.I.	ON
Jingjie Hu*	London Int'l Academy	ON
Amlesh Jakakumar	Waterloo C.I.	ON
Kaifan Liuzhao	David and Mary Thomson C.I.	ON
Anupa Murali	Bishop Brady H.S.	NH
Xiaoqi Shi	Agincourt C.I.	ON
Xing Shuo	Western Canada H.S.	AB
Suraj Srinivasan	Fort Richmond C.I.	MB
Paul Sticea*	Vanier College	QC
Tanya Tang	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Junho Whang	East Northumberland S.S.	ON
Zhongyi Wan	Agincourt C.I.	ON
Brent Wang	Emily Carr	ON
Hanson Wang	Woburn C.I.	ON
Susan Wang*	Burnaby Central S.S.	BC
Sherwin Wu	ICAE	MI
Chuan Xin (Oliver)	Matthew McNair S.S.	BC
Carrie Xing	Marc Garneau C.I.	ON
Xinlei Xu	Lord Byng S.S.	BC
Aaron Yang	Northern S.S.	ON
Xiaoye (Simon) Yin	O'Neill C.V.I.	ON
Anqi Zhang	Vincent Massey S.S.	ON
Zhen Zhang	Western Canada H.S.	AB
Pei Jun Zhao	London Central S.S.	ON
Kaiven Zhou	Old Scona Academic H.S.	AB

* indique que l'étudiant a écrit le OMC 2009 en tant que candidat non officiel.

PROBLÈMES

PROBLÈME 1. Étant donné une grille m × n de carrés colorés en noir ou blanc, nous disons qu'un carré noir est bloqué s'il y a un carré blanc à sa gauche dans la même rangée et il y a un carré blanc au-dessus de ce carré noir dans la même colonne (voir la Figure 1).

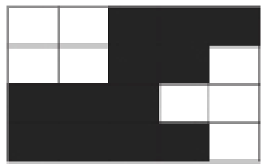

FIGURE 1. Une grille 4 × 5 sans carré noir bloqué

Trouver une expression analytique pour le nombre de grille $2 \times n$ sans carré noir bloqué.

PROBLÈME 2. Découpez deux cercles en carton de différents rayons. Chaque cercle est subdivisé en 200 secteurs égaux. Sur chaque cercle 100 secteurs sont peints en blanc et les autres 100 secteurs sont peints en noir. Le plus petit cercle est placé sur le plus grand cercle, de sorte que leurs centres coïncident. Démontrez qu'on peut pivoter le petit cercle afin que les secteurs sur les deux cercles s'alignent et qu'au moins 100 secteurs sur le petit cercle se trouvent au-dessus des secteurs de la même couleur sur le grand cercle.

PROBLÈME 3. Soit

$$f(x, y, z) = \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y)(x + z)(y + z)} .$$

Déterminer l'ensemble des nombres réels r pour lesquels il existe un triplet (x, y, z) de nombres réels positifs tels que $f(x, y, z) = r$.

PROBLÈME 4. Trouver toutes les paires ordonées (a, b) où a et b sont des entiers et $3^a + 7^b$ est un carré parfait.

PROBLÈME 5. On marque un ensemble de points dans le plan, avec la propriété que n'importe quels trois points marqués peuvent être couverts par un disque de rayon 1. Montrer que l'ensemble de tous les points marqués peut être couvert par un disque de rayon 1.

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009
SOLUTIONS

PROBLÈME 1. Étant donné une grille m × n de carrés colorés en noir ou blanc, nous disons qu'un carré noir est bloqué s'il y a un carré blanc à sa gauche dans la même rangée et il y a un carré blanc au-dessus de ce carré noir dans la même colonne (voir la Figure 1).

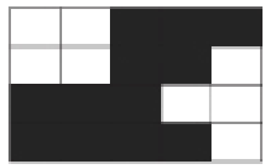

FIGURE 1. Une grille 4 × 5 sans carré noir bloqué

Trouver une expression analytique pour le nombre de grille $2 \times n$ sans carré noir bloqué.

Solution. Il n'y a aucune condition pour les carrés à la première rangée. Un carré dans la deuxième rangée peut être noir seulement si le carré au-dessus est noir ou tous les carrés à sa gauche sont noirs. Supposons que les premiers k carrés dans la deuxième rangée sont noirs et le (k +1)-ième carré est blanc ou $k = n$. Dans le cas où $k < n$, on a deux choix pour chacun des premiers (k + 1) carrés à la première rangé, et trois choix pour chacune des $(n\text{-}k\text{-}1)$ colonnes qui restent. Dans le cas où $k = n$, il y a 2^n choix pour la première rangée. Le nombre total de choix est alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} 3^{n-k-1} + 2^n.$$

Cette expression se simplifie davantage :

$$2 \cdot 3^n - 2^n.$$

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 2. Découpez deux cercles en carton de différents rayons. Chaque cercle est subdivisé en 200 secteurs égaux. Sur chaque cercle 100 secteurs sont peints en blanc et les autres 100 secteurs sont peints en noir. Le plus petit cercle est placé sur le plus grand cercle, de sorte que leurs centres coïncident. Démontrez qu'on peut pivoter le petit cercle afin que les secteurs sur les deux cercles s'alignent et qu'au moins 100 secteurs sur le petit cercle se trouvent au-dessus des secteurs de la même couleur sur le grand cercle.

Solution. Soient $x_0, \ldots, x_{199}$ des variables. On associe à x_i la valeur +1 si le (i+1)ème segment du plus grand cercle (dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre) est noir et la valeur -1 s'il est blanc. De la même façon, on associe les valeurs +1 ou -1 à la variable y_i selon si le (i+1)ème segment du plus petit cercle est noir ou balnc, respectivement. Le problème devient ainsi équivalent au problème suivant : montrer que

$$S_j = \sum_{i=1}^{200} x_i y_{i} + j \geq 0,$$

Pour un certain $j = 0, \ldots, 199$. Ici l'indice $i + j$ est pris 200. Remarquons maintenant que $y_0 + \cdots + y_{199} = 0$, d'où

$$S_0 + \cdots + S_{199} = \sum_{I=0}^{199} x_i (y_0 + \cdots + y_{199}) = 0.$$

Ainsi $S_j \geq 0$ pour un certain $j = 0, \ldots, 199$.

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 3. Soit

$$f(x,y,z)=\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres réels r pour lesquels il existe un triplet (x, y, z) de nombres réels positifs tels que $f(x, y, z) = r$.

Solution. On montre que $1 \prec f(x,y,z) \leq \frac{9}{8}$, et que $f(x, y, z)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$.
L'expression de $f(x, y, z)$ peut être simplifiée pour avoir la forme suivante :

$$f(x,y,z)=1+\frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Comme x, y, z sont positifs, on a que $1 < f(x, y, z)$.

L'inégalité $f(x,y,z) \leq \frac{9}{8}$, peut être réduite à

$$x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - 6xyz \geq 0.$$

En réécrivant le côté gauche comme suit:

$$\begin{gathered} x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - 6xyz = \\ x(y^2 + z^2) - 2xyz + y(x^2 + z^2) - 2xyz + z(x^2 + y^2) - 2xyz = \\ x(y - z)^2 + y(x - z)^2 + z(x - y)^2 \end{gathered}$$

on remarque que cette expression est clairement non négative lorsque x, y, z sont non négatifs. Pour montrer que $f(x, y, z)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$, on définit

$$g(t) = f(t,1,1) = 1+\frac{t}{2(1+t)^2}.$$

Alors $g(1)=\frac{9}{8}$ et $g(t)$ tend vers 1 lorsque t tend vers 0. Comme la fonction $g(t)$ est continue pour $0 < t \leq 1$, elle prend toute valeur dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$ (Une autre façon consiste à vérifier que l'équation quadratique $g(t) = r$ admet une solution t pour toute valeur r dans l'intervalle $\left(1, \frac{9}{8}\right]$)

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 4. Trouver toutes les paires ordonées (a, b) où a et b sont des entiers et $3^a + 7^b$ est un carré parfait.

Solution. Clairement a et b sont non négatifs.
Écrivons $3^a + 7^b = n^2$. On peut supposer que n est positif. Si on prend l'équation $3^a + 7^b = n^2$ modulo 4, on trouve que

$$n^2 \equiv (-1)^a + (-1)^b \pmod 4.$$

Comme un carré n'est jamais congru à 2 modulo 4, seulement deux cas sont alors possibles (i) a est impair et b est pair ou (ii) a est pair et b est impair.

Cas(i): Écrivons $b = 2c$. Alors

$$3^a = (n - 7^c)(n + 7^c)$$

Comme il n'est pas possible que 3 divise $n - 7^c$ et $n + 7^c$ en même temps, ces deux expressions doivent être des puissances de 3. Il s'en suit que $n - 7^c = 1$, et donc $3^a = 2.7^c + 1$. Si $c = 0$, alors $a = 1$, et on obtient la solution $a = 1$, $b = 0$. Supposons maintenant que $c \geq 1$. On a $3^a \equiv 1 \pmod 7$, ce qui est impossible car la plus petite valeur de a telle que $3^a \equiv 1 \pmod 7$ est donnée par $a = 6$, par conséquence, toutes les valeurs de a telles que $3^a \equiv 1 \pmod 7$ sont paires, contradiction au fait que a est impair.

Cas (ii): Écrivons $a = 2c$. Alors

$$7^b = (n - 3^c)(n + 3^c) \quad .$$

Comme le cas (i), chacune des expressions $n - 3^c$ et $n + 3^c$ est une puissance de 7. Comme 7 ne les divise pas en même temps, $n - 3^c = 1$, et alors

$$7^b = 2.3^c + 1.$$

Considérons tout d'abord le cas $c = 1$. Dans ce cas $b = 1$, et on obtient la solution $a = 2$, $b = 1$. On suppose ensuite que $c > 1$. Alors $7^b \equiv 1 \pmod 9$. Le plus petit entier positive b tel que $7^b \equiv 1 \pmod 9$ est donné par $b = 3$. Il s'en suit que b doit être un multiple de3. Soit $b = 3d$. Noter que d est impair, donc en particulier $d \geq 1$. Posons $y = 7^d$. Alors $y^3 - 1 = 2.3^c$, et par suite

$$2.3^c = (y-1)(y^2 + y + 1) \quad .$$

Il s'en suit que $y - 1 = 2.3^u$ pour un certain u positif, et que $y^2 + y + 1 = 3^v$ $y - 1 = 2.3^u$ pour un certain $v \geq 2$. Mais comme

$$3y = (y^2 + y + 1) - (y - 1)^2 \quad ,$$

3 divise y, ce qui est impossible car 3 divise $(y - 1)$.

CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2009 SOLUTIONS

PROBLÈME 5. On marque un ensemble de points dans le plan, avec la propriété que n'importe quels trois points marqués peuvent être couverts par un disque de rayon 1. Montrer que l'ensemble de tous les points marqués peut être couvert par un disque de rayon 1.

Solution. (Pour un ensemble fini de points seulement.) Soit D un disque de rayon minimal qui couvre tous les points marqués. Considérer les points marqués sur la circonférence C de ce disque. Noter que si tous les points marqués sur C se trouvent sur un arc plus petit que le demi-cercle (qu'on note par APPQLDC), alors le disque peut être légèrement déplacé vers ces points sur la circonférence et son rayon peut être diminué. Comme on a supposé que le rayon du disque est minimal, les points marqués sur sa circonférence ne se trouvent pas sur un APPQLDC.

Si les deux points extrémités d'une diagonale de D sont marqués, alors D est le plus petit disque contenant ces deux points, par conséquent doit avoir un rayon tout inférieur ou égale à 1.

S'il y a 3 points marqués sur C qui ne se trouvent pas sur un ASTTHC, alors D est le plus petit disque couvrant ces 3 points et par conséquent doit avoir un rayon tout inférieur ou égal à 1. (Dans ce cas, le triangle formé par les trois points est aiguë et C est son cercle circonscrit.)

S'il y a plus de 3 points marqués sur la circonférence qui ne se trouvent pas sur un APPQLDC, alors on peut enlever un d'eux de sorte que les points restants ne se trouvent pas aussi sur un APPQLDC. Par induction ceci nous mène au cas de 3 points. En effet, si on a 4 points ou plus sur C, on peut choisir 3 points qui se trouvent sur un demi-cercle. Alors le point au milieu peut être enlevé.

LE RAPPORT DES CORRECTEURS

Les examens de l'OMC 2009 furent corrigés par Andrew Adler, Jason Bell, Julia Gordon, Kalle Karu, Robert Morewood, Zinovy Reichstein et Jozsef Solymosi. Chacun des 81 examens furent corrigés deux fois et les examens qui ont reçu au moins 20 points furent corrigés une fois de plus.

La difficulté des exercices à l'examen de cette année fut comme suit. Les trois premiers exercices furent relativement faciles, avec approximativement 50% des étudiants capables des résoudre. Le quatrième exercice était plus difficile, avec peu de solutions correctes mais plusieurs notes partielles. Le dernier problème était très difficile, au plus 10% des étudiants furent proche de la solution. Quoique l'examen fût légèrement plus facile en comparaison avec l'an dernier, le mélange des problèmes plus faciles et plus difficiles nous a permis de différencier les participants.

Pour les examens à venir, on suggère d'inclure deux problèmes plus faciles semblables aux problèmes 1-3, puis deux problèmes plus difficiles et un problème très difficile. À l'examen de cette année, le problème 3 avait été prévu comme un problème plus difficile, mais il s'est avéré être plus facile que prévu.

Une autre caractéristique de l'examen de cette année fut l'absence de problèmes exigeant la géométrie euclidienne. Les étudiants comptent voir des problèmes de la géométrie euclidienne et ils sont en général bien préparés pour ces derniers. Plusieurs participants ont essayé d'utiliser des outils de la géométrie euclidienne et analytique pour résoudre le dernier problème de l'examen. Les quatre premiers problèmes se fondent sur des techniques habituelles, telles que le principe des tiroirs de Dirichlet, l'inégalité arithmético-géométrique, et l'arithmétique modulaire. Toutes ces matières sont couvertes dans le programme d'études du secondaire. Il suffit de les appliquer correctement. Les étudiants qui se sont préparés pour l'OMC ont certainement rencontré plusieurs problèmes semblables.

Chaque question fut notée sur 7. La note maximale obtenue par un participant fut 30. La distribution des notes pour chaque problème est donnée dans le tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5	6	7
#1	34	0	3	5	5	6	3	25
#2	39	4	1	0	0	0	5	32
#3	23	5	10	8	2	2	15	16
#4	46	7	10	4	7	1	1	5
#5	59	11	4	0	1	2	3	1

Exercice 1 : Le problème de compter des configurations de carrés est semblable aux problèmes d'énumérations des examens antérieures. Cependant, cette année le problème était plus facile puisqu'il n'a pas nécessité la résolution d'une récurrence linéaire. On peut naturellement construire une relation de récurrence linéaire à deux variables, mais la résolution s'avère être très simple parce que les deux variables se séparent. Ce fut l'approche employée par la plupart des étudiants, probablement en raison d'avoir étudié les examens antérieures de l'OMC. Quelques étudiants ont été confondus avec la terminologie « à la gauche » et l'on interprété comme « à la gauche immédiate ». Cette variation du problème est beaucoup plus difficile et exige la résolution d'une récurrence linéaire. Des notes parfaites furent données pour une solution correcte de cette version du problème.

Exercice 2. Plusieurs étudiants furent au courant de ce type de problème. Une solution typique était de compter le nombre total de couplages pour les 200 rotations possibles et puis d'employer le principe des tiroirs. D'une manière équivalente, on peut calculer un nombre moyen de couplages par rotation de 100. Ces deux approches et l'approche algébrique donnée ci-haut sont apparues dans les solutions.

Exercice 3. Le problème d'inégalité a été prévu comme un problème plus difficile parce que les étudiants doivent trouver les bornes et ensuite démontrer que celles-ci sont correctes. Lisant les solutions, il s'avère que la plupart des étudiants sont très habiles en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique sous ses diverses formes et n'ont pas eu beaucoup de difficulté à démontrer la majoration. Quelques participants ont mentionné l'inégalité de Muirhead. La deuxième moitié du problème (démonstration que chaque valeur dans l'intervalle est réalisée) peut être résolue en employant la continuité de la fonction ou en démontrant qu'une équation quadratique a une solution. Tel que prévu, peu d'étudiants ont des connaissances des fonctions continues, mais presque tous les participants qui ont compris le problème ont pu résoudre l'équation quadratique.

Exercice 4. Le problème de la théorie des nombres était le plus long et également le plus difficile à corriger. Il a facilité l'attribution des notes partielles. Chaque étape de la démonstration est effectivement très simple, impliquant seulement la divisibilité et l'arithmétique modulaire. Pour obtenir des notes parfaites, les étudiants ont dû être persistants et considérer tous les cas possibles. On peut réaliser très rapidement que la démonstration se divise en deux cas principaux -- le cas plus facile de b pair et le cas légèrement plus difficile de a pair. Les deux cas ont été identifiés par plusieurs des étudiants, mais très peu des étudiants ont pu compléter la démonstration des deux cas.

Exercice 5. Le problème de recouvrement était le plus difficile. Seulement quatre étudiants l'ont résolu ou furent proches de le résoudre. Il y a eu, cependant, de nombreuses tentatives de résolution. Ce fut difficile d'attribuer des notes partielles pour ces tentatives qui n'ont mené nulle part. La solution donnée ci-haut débute avec un disque qui recouvre tous les points misent en évidence. Ce n'était pas l'approche typique utilisé par les étudiants. La plupart des étudiants ont soit utilisé une récurrence sur le nombre de points misent en évidence ou ils ont trouvé trois points spéciaux tels que le disque minimal qui recouvre ces trois points recouvre aussi les autres points. Toutes ces approches mènent à une solution (et chacune des trois ont été représentées parmi les solutions correctes), mais ces deux dernières sont plus longues et plus compliquées. Une erreur typique est d'oublier que le cercle circonscrit d'un triangle obtus n'est pas le plus petit cercle englobant le triangle.