Rapport de la 40e Olympiade mathématique du Canada (2008)

Outre le soutien de son commanditaire principal, la Financière Sun Life, et de l’Université de Toronto, la Société mathématique du Canada adresse les remerciements aux partenaires suivants :

Financière Sun Life
Alberta Learning
Ministère de l’Éducation (Nouveau-Brunswick)
Ministère de l’Éducation (Terre-Neuve-et-Labrador)
Ministère de l’Éducation (Territoires du Nord-Ouest)
Ministère de l’Éducation (Nouvelle-Écosse)
Ministère de l’Éducation (Ontario)
Ministère de l’Éducation (Saskatchewan)
Nelson Thomson Learning
John Wiley and Sons Canada Ltd.
McGraw-Hill
A.K. Peters Ltd.
Maplesoft
Centre d’éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo
Département de mathématiques, Université de la Colombie-Britannique (UBC)
Département de mathématiques, Université de Toronto
Département de mathématiques et de statistique, Université de Calgary
Département de mathématiques et de statistique, Université d’Ottawa
Département de mathématiques et de statistique, Université de Regina
Département de mathématiques, Université Wilfrid-Laurier
Département de mathématiques et de statistique, Université York

L'Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l'OMC, un sous-comité du Comité des concours mathématiques. Instituée en 1969, l'OMC offre aux élèves qui se sont illustrés dans les concours provinciaux de mathématiques une occasion de concourir sur la scène nationale. Elle sert en outre d'épreuve préparatoire aux élèves canadiens qui participent à l'Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Se qualifient pour l'OMC les élèves qui obtiennent une note suffisamment élevée au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM). Cette année, les 67 élèves qui ont obtenu les meilleurs résultats au DOCM ont automatiquement été invités à l'OMC; sept élèves seulement ont refusé l'invitation. Quelque 200 autres élèves (à partir de la 68e place) ont aussi été invités à faire parvenir à l'Université de Waterloo leurs solutions à dix questions dites « de repêchage » publiées sur Internet pendant une semaine. Trente-cinq autres élèves ont été invités à l'OMC à la suite de cet exercice, et 31 d'entre eux ont accepté l'invitation. Je remercie Ian VanderBurgh d'avoir organisé cet exercice et formé une équipe de correcteurs composée d'Ed Anderson, Lloyd Auckland, Ed Barbeau, Enzo Carli, Eddie Cheung, Rad de Peiza, Larry Rice, Jim Schurter, Ian VanderBurgh et Kyle Willick, qui ont analysé les 126 réponses reçues.

La Société remercie la Sun Life du Canada, compagnie d'assurance-vie, commanditaire de l'Olympiade mathématique du Canada 2008, et les autres commanditaires, dont : les ministères de l'Éducation de l'Ontario, du Québec, de l'Alberta, du Nouveau-Brunswick, de Terre-Neuve-et-Labrador, des Territoires du Nord-Ouest et de la Saskatchewan; le Département de mathématiques et de statistique de l'Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton; le Centre d'éducation en mathématiques et en statistique de l'Université de Waterloo; le Département de mathématiques et de statistique de l'Université d'Ottawa; le Département de mathématiques de l'Université de Toronto; le Département de mathématiques de l'Université de la Colombie-Britannique; Nelson Thompson Learning; John Wiley and Sons Canada Ltd; McGraw-Hill, A.K. Peters et Maplesoft.

Je remercie très sincèrement les membres du Comité de l'OMC qui ont proposé des problèmes en vue de l'olympiade de 2008 : Ed Doolittle, Chris Fisher, Valeria Pandelieva, Naoki Sato, Adrian Tang et Jacob Tsimerman. Les examens ont été corrigés par Ed Barbeau, Man-Duen Choi, Felix Recio et Lindsey Shorser. Merci aussi à Tom Griffiths (London) et à Kalle Karu (Université de la Columbie-Britannique) d'avoir servi de valideurs, et à Joseph Khoury d'avoir traduit l'examen et les solutions en français. Je remercie en outre Susan Latreille et le directeur administratif, Graham Wright, du bureau de la SMC, dont le zèle et la contribution inestimable y sont pour beaucoup dans le succès de l'OMC.

Ed Barbeau, président
Comité de l'Olympiade mathématique du Canada

La 40e Olympiade mathématique du Canada (2008) a réuni, le mercredi 26 mars 2008, 96 concurrents en provenance de 57 écoles (52 au Canada, trois aux É-U et deux outre-mer); sept provinces canadiennes étaient représentées (nombre de concurrents entre parenthèses) :

C.-B. (20) ALB. (5) SK (3) MB (3) ON (49) QC (3) N.-B. (1).

L'OMC 2008 comportait cinq questions valant sept points chacune. Le score le plus élevé était 28. Les concurrents officiels ont été classés dans quatre divisions, en fonction de leurs résultats :

Division	Fourchette	Nbre d'élèves
I	21 - 28	8
II	13 - 19	17
III	7 - 12	29
IV	0 - 6	42

Les tableaux ci-dessous présentent les résultats obtenus par les élèves au DOCM ainsi que leurs résultats à l'OMC. Les élèves qui ont obtenu entre 72 et 80 points sont passés directement à l'OMC; ceux qui ont obtenu entre 65 et 71 points se sont qualifiés à l'étape du repêchage.

80 (26, 24, 15)
79 (21, 19, 15)
78 (23, 12, 10)
77 (28, 25, 18)
76 (12, 11, 11, 7, 6)
75 (15, 8, 5, 3)
74 (17, 17, 14, 14, 10, 6, 6, 3, 3, 3, 1)
73 (25, 21, 9, 9, 8, 7, 2, 2, 1, 0)
72 (15, 15, 11, 10, 9, 7, 5, 5, 4, 4, 2, 2, 1)

71 (19, 16, 11)
70 (4, 1)
69 (17, 4)
68 (19)
67 (13, 9, 8, 5, 1)
66 (11, 11, 10, 9, 9, 7, 6, 4, 1)
65 (10, 3, 3, 0)

PREMIER PRIX — Coupe Sun Life — 2 000 $

Chen Sun
A.B. Lucas Secondary School, London, Ontario

DEUXIÈME PRIX — 1 500 $

Jonathan Schneider
University of Toronto Schools, Toronto, Ontario

TROISIÈME PRIX — 1 000 $

Yan Li
Dr. Norman Bethune Collegiate Institute, Toronto, Ontario

MENTIONS HONORABLES — 500 $

Dimitri Dziabenko
Don Mills Collegiate Institute
Toronto, ON

Neil Gurram
ICAE
Troy, MI

Danny Shi
Sir Winston Churchill High School
Calgary, AB

Jarno Sun
Western Canada High School
Calgary, AB

Tianyao Zhang
Sir John A. Macdonald Collegiate Institute
Toronto, ON

Division 1
21-28

Chen Sun	A.B. Lucas S.S.	ON
Jonathan Schneider	UTS	ON
Yan Li	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
Dimitri Dziabenko	Don Mills C.I.	ON
Neil Gurram	ICAE	MI
Danny Shi	Sir Winston Churchill H.S.	AB
Jarno Sun	Western Canada H.S.	AB
Tianyao Zhang	Sir John A. Macdonald C.I.	ON

Division 2
13-19

Mohammad Babadi	Thornlea S.S.	ON
Frank Ban	Vincent Massey S.S.	ON
Yuhan Chen	Sir Winston Churchill C.V.I.	ON
Robin Cheng	Pinetree S.S.	BC
Bo Cheng Cui	West Vancouver S.S.	BC
Tony Feng	Phillips Academy	MA
David Field	Phillips Academy	MA
Yuting Huang	Johnston Heights S.S.	BC
Joe Kileel	Fredericton H.S.	NB
Zhiqiang Liu	Don Mills C.I.	ON
Jingyuan Mo	St. George's School	BC
Alexander Remorov	William Lyon Mackenzie King C.I.	ON
Jixuan Wang	Don Mills C.I.	ON
Weinan Peter Wen	Vincent Massey S.S.	ON
Anqi Zhang	Vincent Massey S.S.	ON
Linda Zhang	Western Canada H.S.	AB
Jonathan Zhou	Burnaby North S.S.	BC

Division 3
7-12

Golam Tahrif Bappi	Waterloo C.I.	ON
Shalev Ben David	Waterloo C.I.	ON
Ram Bhaskar	ICAE	MI
Philip Chen	Glenforest S.S.	ON
Weiliang Chen	Walter Murray C.I.	SK
Andrew Dhawan	The Woodlands School	ON
Henry Fung	Glenforest S.S.	ON
Fang Guo	Richmond Hill H.S.	ON
Tony Han	Jarvis C.I.	ON
Fan Jiang	Albert Campbell C.I.	ON
Heinrich Jiang	Vincent Massey S.S.	ON
Kwon Yong Jin	Phillips Academy	MA
Eric Gwangseung Kim	Prince of Wales S.S.	BC
Jung Hun Koh	Phillips Academcy	MA
Nikita Lvov	Marianopolis College	QC
Anupa Murali	Derryfield School	NH
Bill Pang	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Owen Zhu Ren	Magee S.S.	BC
Mariya Sardarli	McKernan J.H.S.	AB
Alex Song	Waterloo C.I.	ON
Julian Sun	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Ning Tang	London International Academy	ON
Ming Jing Wong	A.B. Lucas S.S.	ON
Xiao Xu	Georges Vanier S.S.	ON
Meng Ye	Marianopolis College	QC
Pei Jun Zhao	London Central S.S.	ON
Vincent Zhou	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
Zimu Zhu	Richmond Hill H.S.	ON
Jonathan Zung	University of Toronto Schools	ON

Division 4
0-6

Shek Wah Chan	St. Paul's Co-ed. College	CN
Jerry Chen	Moscrop S.S.	BC
Lingjun Chen	Don Mills C.I.	ON
Chengcheng Gui	St. John's-Ravenscourt School	MB
Adam Halski	Kuwait English School	KW
Ding Henry Hao	Albert Campbell C.I.	ON
Matthew Harrisontraino	Marc Garneau C.I.	ON
Kevin He	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Emily Wei-En Hsu	Branksome Hall School	ON
Yihuan Peter Huang	Kingston C.V.I.	ON
Navid Javadi	Earl Haig S.S.	ON
Chen Jiang	Central Technical School	ON
Yangzi Jiang	Waterloo C.I.	ON
Hee Woo Jun	Pinetree S.S.	BC
Randy Li	Phillips Academy	MA
Alex Liang	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
William Lin	Albert Campbell C.I.	ON
Chieh Ming Liu	Fraser Heights S.S.	BC
Eric Liu	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Xun Chao Max Liu	Port Moody S.S.	BC
David Ma	Marianopolis College	QC
Sudharshan Mohanram	ICAE	MI
Susanne Michelle Morill	St. Mary's Academy	MB
Ryan Peng	Centennial Collegiate	SK
Zhe Qu	Sir Allan MacNab S.S.	ON
Calvin Seo	St. Andrew's College	ON
Yeongseok Suh	York Mills C.I.	ON
Hao Sun	Centennial Collegiate	SK
Tanya Tang	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Russell Vanderhout	Fraser Heights S.S.	BC
Kedi Wang	Fort Richmond Collegiate	MB
Richard Wang	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Susan Wang	Burnaby Central S.S.	BC
Wen Wang	Western Canada H.S.	AB
Jun Wen	London International Academy	ON
Carrie Xing	Marc Garneau C.I.	ON
Vick Yao	Vincent Massey S.S.	ON
Victor Zhang	Marc Garneau C.I.	ON
Yunfan Zhang	Phillips Academy	MA
Dabo Zhao	White Oaks S.S.	ON
Steven Zhu	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Yang Zhu	Albert Campbell C.I.	ON

40e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 26 mars, 2008

1. $ABCD$ est un quadrilatère convexe dans lequel AB est le côté le plus long. Les points M et N sont situés sur les côtés AB et BC respectivement, de sorte que chacun des segments AN et CM divise le quadrilatère en deux parties de même aire. Montrez que le segment MN coupe la diagonale BD en deux parties égales.

2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des nombres rationnels et qui prennent des valeurs rationnelles telles que
$$f(2f(x)+f(y)) = 2x+y\ ,$$
pour tous les nombres rationnels x et y.

3. Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $a+b+c=1$. Montrer que
$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}\ .$$

4. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des entiers naturels et qui prennent des valeurs dans l'ensemble des entiers naturels telles que
$$(f(n))^p \equiv n \mod f(p)$$
pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout nombre premier p.

5. Une *Marche autoévitante d'une tour* sur un échiquier (une grille rectangulaire formée de carrés unitaires) est un chemin tracé par une suite de mouvements parallèles à un bord de l'échiquier partant d'un carré unitaire à un autre de sorte que chacun de ces mouvements commence où le mouvement précédent a terminé et qu'aucun mouvement ne croise un carré qui a été précédemment croisé, *c'est-à-dire* le chemin de la tour ne se croise pas.

   Soit $R(m,n)$ le nombre de Marches autoévitantes d'une tour sur un échiquier $m\times n$ (m lignes, n colonnes) qui commencent au coin inférieur gauche et se terminent au coin supérieur gauche. Par exemple, $R(m,1)=1$ pour tout entier naturel m; $R(2,2)=2$; $R(3,2)=4$; $R(3,3)=11$. Trouver une formule pour $R(3,n)$ pour chaque entier naturel n.

40e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 26 mars, 2008

Solutions - OMC 2008

1. $ABCD$ est un quadrilatère convexe dans lequel AB est le côté le plus long. Les points M et N sont situés sur les côtés AB et BC respectivement, de sorte que chacun des segments AN et CM divise le quadrilatère en deux parties de même aire. Montrez que le segment MN coupe la diagonale BD en deux parties égales.

Solution. Comme $[MADC] = \frac{1}{2}[ABCD] = [NADC]$, on a que $[ANC] = [AMC]$, et par suite $MN \| AC$. Soit m une droite passant par D et parallèlle à AC et MN et soit P le point d'intersection de m avec le prolongement de la droite AB et Q celui de m avec le prolongement de la droite BC. Alors

$$[MPC] = [MAC] + [CAP] = [MAC] + [CAD] = [MADC] = [BMC]$$

d'où $BM = MP$. De même, $BN = NQ$, et par conséquence MN est une droite joignant les milieux de deux côtés dans le triangle BPQ; elle doit alors couper le côté BC en deux parties égales.

2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des nombres rationnels et qui prennent des valeurs rationnelles telles que

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y \ ,$$

pour tous les nombres rationnels x et y.

Solution 1. Les seules solutions sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ pour tout nombre rationnel x . Il est facile de vérifier que ces deux fonctions sont des solutions.

Si $y = x$, on obtient $f(3f(x)) = 3x$ pour tout nombre rationnel x. La substitution $y = x = 3f(x)$ dans la deuxième égalité donne

$$f(9x) = f(3f(3f(x)) = 3[3f(x)] = 9f(x) \ ,$$

pour tout nombre rationnel x. En posant $x = 0$ on obtient $f(0) = 9f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

En posant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(f(y)) = y$ pour tout nombre rationnel y. Alors f est injective et surjective. En appliquant la fonction f à l'équation fonctionnelle, on obtient

$$2f(x) + f(y) = f(2x + y)$$

pour chaque couple (x, y) de nombres rationnels.

En posant $y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(2f(x)) = 2x$, d'où $2f(x) = f(2x)$. Alors $f(2x) + f(y) = f(2x + y)$ pour chaque couple (x, y) de nombres rationnels, et par conséquent

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

pour chaque couple (u, v) de nombres rationnels.

Comme $0 = f(0) = f(-1) + f(1)$, $f(-1) = -f(1)$. On peut établir par induction que $f(nx) = nf(x)$ pour chaque entier n et pour chaque nombre rationnel x. Si $k = f(1)$, on peut déduire que $f(n) = nk$, $f(1/n) = k/n$ et $f(m/n) = mk/n$ pour chaque couple (m, n). Alors $f(x) = kx$ pour tout nombre rationnel x. Comme $f(f(x)) = x$, on doit avoir $k^2 = 1$. Alors $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.

Solution 2. Dans l'équation fonctionnelle, posons

$$x = y = 2f(z) + f(w).$$

Alors $f(x) = f(y) = 2z + w$ et

$$f(6z + 3w) = 6f(z) + 3f(w)$$

pour toutes les couples (z, w) des nombres rationnels. Si $(z, w) = (0, 0)$, on obtient $f(0) = 0$, et si $w = 0$ on obtient $f(6z) = 6f(z)$. Si $z = 0$ on obtient $f(3w) = 3f(w)$ pour tous les nombres rationnels z et w. D'où $f(6z + 3w) = f(6z) = f(3w)$. En remplaçant $(6z, 3w)$ par (u, v) on obtient

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

pour toutes les couples (z, w) des nombres rationnels. Alors $f(x) = kx$ où $k = f(1)$ pour tout nombre rationnel x. La Substitution dans l'équation fonctionnelle avec $(x, y) = (1, 1)$ donne $3 = f(3f(1)) = f(3k) = 3k^2$, d'où $k = \pm 1$. On peut vérifier que chacune des fonctions $f(x) \equiv 1$ et $f(x) \equiv -1$ satisfait l'équation.

Cette solution a été écrite par Ed Doolittle.

3. Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$\frac{a - bc}{a + bc} + \frac{b - ca}{b + ca} + \frac{c - ab}{c + ab} \leq \frac{3}{2}\ .$$

Solution 1. Noter que

$$1 - \frac{a - bc}{a + bc} = \frac{2bc}{1 - b - c + bc} = \frac{2bc}{(1 - b)(1 - c)}\ .$$

L'inégalité est équivalente à

$$\frac{2bc}{(1 - b)(1 - c)} + \frac{2ca}{(1 - c)(1 - a)} + \frac{2ab}{(1 - a)(1 - b)} \geq \frac{3}{2}\ .$$

Autrement dit

$$4(bc + ca + ab - 3abc) \geq 3(bc + ca + ab + 1 - a - b - c - abc)\ .$$

En simplifiant, on trouve $ab + bc + ca \geq 9abc$ ou

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9\ .$$

Ceci est une conséquence de l'inégalité des moyennes arithmétiques-géométriques

Solution 2. Remarquer que

$$a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$$

et que $a + b = 1 - c$, avec des relations analogues pour d'autres permutations des variables. Alors

$$(b+c)(c+a)(a+b) = (1-a)(1-b)(1-c) = (ab+bc+ca) - abc\ .$$

En écrivant le côté gauche de l'inégalité voulue au dénominateur commun, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{(a-bc)(1-a)+(b-ac)(1-b)+(c-ab)(1-c)}{(b+c)(c+a)(a+b)} &= \frac{(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)-(bc+ca+ab)+3abc}{(b+c)(c+a)(a+b)} \\ &= \frac{1-(a+b+c)^2+(bc+ca+ab)+3abc}{(ab+bc+ca)-abc} \\ &= \frac{(bc+ca+ab)+3abc}{(bc+bc+ab)-abc} \\ &= 1+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ .\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité des moyennes arithmétiques-géométriques , on obtient

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+2abc \\ &\geq 3abc+3abc+2abc = 8abc\ ,\end{aligned}$$

d'où $4abc/[(a+b)(b+c)(c+a)] \leq \frac{1}{2}$. Le résultat voulu s'en suit. On obtient l'égalité lorsque $a=b=c=\frac{1}{3}$.

4. Déterminer toutes les fonctions f définies sur l'ensemble des entiers naturels et qui prennent des valeurs dans l'ensemble des entiers naturels telles que

$$(f(n))^p \equiv n \qquad \text{mod } f(p)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout nombre premier p.

Solution. Si p est un nombre premier, la substitution $n=p$ donne $p \equiv (f(p))^p \equiv 0 \pmod{f(p)}$, alors p est divisible par $f(p)$. Donc, pour tout nombre premier p, $f(p)=1$ ou $f(p)=p$.

Soit $S = \{p : p \text{ est premier et } f(p)=p\}$. Si S est un ensemble infini, alors $f(n)^p \equiv n \pmod p$ pour une infinité des nombres premiers p. Par le petit théorème de Fermat, $n \equiv f(n)^p \equiv f(n)$, d'où $f(n)-n$ est un multiple de p pour une infinité des nombres premiers p. Ceci est possible seulement lorsque $f(n)=n$ pour tout n, et on peut vérifier que c'est en effet une solution.

Si S est vide, alors $f(p)=1$ pour tout nombre premier p, et chaque fonction qui satisfait cette condition est une solution.

Supposons maintenant que S est fini et non vide. Soit q le plus grand nombre premier dans S. Supposons (si possible) que $q \geq 3$. Alors $p \equiv 1 \pmod q$ pour tout nombre premier p plus grand que q. Cependant, ceci n'est pas vari. Soit Q le produit des nombres premiers inéfrieurs ou égals à q. Alors $Q+2$ doit avoir un facteur premier plus grand que q et au moins un d'eux n'est pas congru à 1 (mod q). (Un autre argument note que le postulat de Bertrand peut être utilisé pour produire un nombre premier p entre q et $2q$ qui ne satisfait pas ceci.)

Le seul cas qui reste est $S=\{2\}$. Alors $f(2)=2$ et $f(p)=1$ pour tout nombre premier impair p. Comme $f(n)^2 \equiv n \pmod 2$, $f(n)$ et n doivent avoir la même parité. Par conséquence, toute fonction f qui satisfait $f(n) \equiv n \pmod 2$ pour tout n, $f(2)=2$ et $f(p)=1$ pour tout nombre premier impair p satisfait la condition.

Alors, les seules solutions sont
- $f(n)=n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- toute fonction f avec $f(p)=1$ pour tout nombre premier p;
- toute fonction f avec $f(2)=2$, $f(p)=1$ pour les nombres premiers $p>2$ et $f(n)$ et n de même parité.

5. Une *Marche autoévitante d'une tour* sur un échiquier (une grille rectangulaire formée de carrés unitaires) est un chemin tracé par une suite de mouvements parallèles à un bord de l'échiquier partant d'un carré

unitaire à un autre de sorte que chacun de ces mouvements commence où le mouvement précédent a terminé et qu'aucun mouvement ne croise un carré qui a été précédemment croisé, *c'est-à-dire* le chemin de la tour ne se croise pas.

Soit $R(m,n)$ le nombre de Marches autoévitantes d'une tour sur un échiquier $m \times n$ (m lignes, n colonnes) qui commencent au coin inférieur gauche et se terminent au coin supérieur gauche. Par exemple, $R(m,1) = 1$ pour tout entier naturel m; $R(2,2) = 2$; $R(3,2) = 4$; $R(3,3) = 11$. Trouver une formule pour $R(3,n)$ pour chaque entier naturel n.

Solution 1. Soit $r_n = R(3,n)$. On peut vérifier directement que $r_1 = 1$ et $r_2 = 4$. Dénotons par (i,j) la cellule dans la $i$ème ligne du bas et la $j$ème colonne du gauche, de sorte que les chemins en question passent de $(1,1)$ à $(3,1)$.

Supposons que $n \geq 3$. Les marches de la tour tombent en exactement une des six catégories suivantes:

(1) Une marche donnée par $(1,1) \to (2,1) \to (3,1)$.

(2) Les marchent qui évitent la cellule $(2,1)$: Chacune de ces marches doit commencer avec $(1,1) \to (1,2)$ et terminer avec $(3,2) \to (3,1)$; Il y a r_{n-1} telles marches.

(3) Les marches qui commencent avec $(1,1) \to (2,1) \to (2,2)$ et qui ne retournent jamais à la première ligne: des telles marches entrent la troisième ligne de $(2,k)$ pour un certain k avec $2 \leq k \leq n$ et vont ensuite le long la troisième ligne vers la gauche à $(3,1)$; il y a $n-1$ telles marches.

(4) Les marches qui commencent avec $(1,1) \to (2,1) \to \cdots \to (2,k) \to (1,k) \to (1,k+1)$ et terminent avec $(3,k+1) \to (3,k) \to (3,k-1) \to \cdots \to (3,2) \to (3,1)$ pour un certain k avec $2 \leq k \leq n-1$; il y a $r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1$ telles marches.

(5) Les marches qui sont des images d'une réflexion horizontale des marches en (3) qui commencent avec $(1,1) \to (2,1)$ et qui n'entrent jamais la troisième ligne jusqu'à la dernière cellule; il y a $n-1$ telles marches.

(6) Les marches qui sont des images d'une réflexion horizontale des marches en (5); il y a $r_{n-2}+r_{n-3}+\cdots+r_1$ telles marches.

Alors, $r_3 = 1 + r_2 + 2(2 + r_1) = 11$ et, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} r_n &= 1 + r_{n-1} + 2[(n-1) + r_{n-2} + r_{n-3} + \cdots + r_1] \\ &= 2n - 1 + r_{n-1} + 2(r_{n-2} + \cdots + r_1) \ , \end{aligned}$$

et

$$r_{n+1} = 2n + 1 + r_n + 2(r_{n-1} + r_{n-2} + \cdots + r_1) \ .$$

D'où

$$r_{n+1} - r_n = 2 + r_n + r_{n-1} \Longrightarrow r_{n+1} = 2 + 2r_n + r_{n-1} \ .$$

Par conséquence

$$r_{n+1} + 1 = 2(r_n + 1) + (r_{n-1} + 1) \ ,$$

alors

$$r_n + 1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1} \ ,$$

et

$$r_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1} - 1 \ .$$

Solution 2. Utilisons les mêmes notations dans la Solution 1. On a $r_1 = 1$, $r_2 = 4$ et $r_3 = 11$. Soit $n \geq 3$. Considérer la situation où il y a r_{n+1} colonnes. En principe, il y a trois types de Marches de la tour.

Type 1. Il y a quatre marches qui entrent seulement les deux premières colonnes.

Type 2. Il y a $3r_{n-1}$ marches qui ne passent pas entre la deuxième et la troisième colonne dans la ligne du milieu (dans toutes les directions), plus précisément, il y a r_{n-1} de chacun des types suivants:

$$(1,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (3,1)\ ;$$

$$(1,1) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (3,1)\ ;$$

$$(1,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,1) \longrightarrow (3,1)\ .$$

Type 3. Considérer les marches de la tour qui passent entre la deuxième et la troisième colonne le long de la ligne du milieu. Elles sont du Type 3a:

$$(1,1) \longrightarrow * \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (3,1)\ ,$$

ou du Type 3b:

$$(1,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (2,3) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow * \longrightarrow (3,1)\ ,$$

où dans chacun des cas, l'astérisque représente une des deux options possibles.

On peut associer les marches du Type 3a à des marches de la tour dans les dernières n colonnes, plus précisément

$$(1,2) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,2)$$

et les marches du Type 3b sont associées à une marche de la tour sur les dernières n colonnes, plus précisément

$$(1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (2,3) \longrightarrow (2,2) \longrightarrow (3,2)\ .$$

Le nombre des marches de la tour des derniers deux types ensemble est $r_n - 1 - r_{n-1}$. Du nombre des marches de la tour sur les dernières n colonnes, on soustrait un pour la marche $(1,2) \to (2,2) \to (3,2)$ et r_{n-1} pour les marches du type

$$(1,2) \longrightarrow (1,3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (2,3)\ .$$

Alors, le nombre des marches du type 3 est $2(r_n - 1 - r_{n-1}$ et on trouve que

$$r_{n+1} = 4 + 3r_{n-1} + 2(r_n - 1 - r_{n-1}) = 2 + 2r_n + r_{n-1}\ .$$

À partir de ce point, on complète la solution comme dans la Solution 1.

Solution 3. Soit $S(3,n)$ le nombre des marches autoévitantes d'une tour dans lesquelles la tour occuppe la colonne n mais pas la colonne $n+1$. Alors $R(3,n) = |S(3,1)| + |S(3,2)| + \cdots + |S(3,n)|$. De plus, des considérations topologiques nous permettent d'écrire $S(3,n)$ comme l'union de trois sous-ensembles disjoints $S_1(3,n)$, l'ensemble des chemins dans lesquels le coin $(1,n)$ n'est pas occupé, mais il y a un segment de chemin $(2,n) \longrightarrow (3,n)$; $S_2(3,n)$, l'ensemble des chemins dans lesquels les coins $(1,n)$ et $(3,n)$ sont occupés par un chemin $(1,n) \longrightarrow (2,n) \longrightarrow (3,n)$; et $S_3(3,n)$, l'ensemble des chemins dans lesquels le coin $(3,n)$ n'est pas occupé, mais il y a un segment de chemin $(1,n) \longrightarrow (2,n)$. Soit $s_i(n) = |S_i(3,n)|$ pour $i = 1,2,3$. Noter que $s_1(1) = 0$, $s_2(1) = 1$ et $s_3(1) = 0$. Par symétrie, $s_1(n) = s_2(n)$ pour tout entier positif n. De plus, on peut construire des chemins dans $S(3,n+1)$ par "enflement" des chemins dans $S(3,n)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_1(n) + s_2(n)\ ; \\ s_2(n+1) &= s_1(n) + s_2(n) + s_3(n)\ ; \\ s_3(n+1) &= s_2(n) + s_3(n)\ ; \end{aligned}$$

après simplification, on trouve

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_1(n) + s_2(n)\ ; \\ s_2(n+1) &= 2s_1(n) + s_2(n)\ . \end{aligned}$$

Ici, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} s_1(n+1) &= s_1(n) + 2s_1(n-1) + s_2(n-1) \\ &= s_1(n) + 2s_1(n-1) + s_1(n) - s_1(n-1) \\ &= 2s_1(n) + s_1(n-1)\ . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_2(n+1) &= 2s_1(n) + s_2(n) = 2s_1(n-1) + 2s_2(n-1) + s_2(n) \\ &= s_2(n) - s_2(n-1) + 2s_2(n-1) + s_2(n) \\ &= 2s_2(n) + s_2(n-1)\ . \end{aligned}$$

On trouve que

$$\begin{aligned} s_1(n) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n-1}\ ; \\ s_2(n) &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n-1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n-1}\ . \end{aligned}$$

En écrivant la somme d'une série géométrique, on trouve que

$$\begin{aligned} R(3,n) &= (s_2(1) + \cdots + s_2(n)) + 2(s_1(1) + \cdots + s_1(n)) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(1+\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(1-\sqrt{2})^n - 1}{-\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)[(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}] - 1\ . \end{aligned}$$

Cette formule est compatible avec $R(3,1) = 1$, $R(3,2) = 4$ et $R(3,3) = 11$.

Reconnaissance. Les deux premières solutions sont dues à Man-Duen Choi.

RAPPORT DES CORRECTEURS

Ed Barbeau, Man-Duen Choi, Felix Recio et Lindsey Shorser ont corrigé les examens. Les examens des trois premières divisions et la plupart de ceux de la quatrième ont été corrigés de manière indépendante par deux correcteurs. Tous les examens de la division I et un bon nombre de ceux de la division II ont été revus par quatre personnes.

L'examen était plus difficile qu'en 2007. Le comité a décidé de n'inclure qu'un problème de géométrie, mais que ce serait un problème assez facile. La possibilité d'obtenir une partie des points était mince, ce qui a paru dans les résultats globaux.

Durant la correction, il est paru évident que l'écart se creuse constamment entre les connaissances de base et avancées des dix ou vingt élèves les plus forts et les autres. C'est là un fait inquiétant pour toute personne qui croit à la nécessité de former un nombre suffisant d'élèves bien préparés à des études universitaires en génie ou en sciences. Cela confirme toutefois la difficulté de composer, même pour une soixantaine d'élèves invités, un examen assez difficile pour les meilleurs, mais aussi accessible pour les autres.

Les habitués des concours connaissent déjà les réponses à des questions que les lecteurs du présent rapport n'ont peut-être vues qu'à l'université ou même aux cycles supérieurs, le cas échéant. Ils sont capables de résoudre une relation de récurence linéaire; ils connaissent les résultats avancés de la géométrie euclidienne, comme les théorèmes de Céva et de Menelaüs, ou l'inégalité de Ptolémée; ils utilisent couramment les arguments de la transformation (y compris l'inversion du cercle) en géométrie planaire; ils maîtrisent les résultats de base de la théorie des graphes; ils connaissent l'arithmétique modulaire et les résultats de la théorie des nombres comme le petit théorème de Fermat et le théorème des restes chinois; ils ont des bases en calcul différentiel, et leur connaissance des inégalités est loin de se limiter à l'inégalité arithmético-géométrique et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz; deux élèves ont d'ailleurs utilisé les inégalités de la majorisation de Muirhead pour résoudre le problème no 3. Les membres du comité n'avaient pas songé à ces techniques avancées en composant les problèmes; ils ont rédigé des problèmes qu'il est possible de résoudre à l'aide d'un raisonnement de base et d'une application judicieuse de techniques standard.

De nombreux élèves se tournent instinctivement vers des formules et des calculs sans prendre le temps d'évaluer l'essence même du problème et de trouver une méthode qui convient mieux à la structure du problème. Les réponses aux questions 1, 2 et 4 illustrent ce fait de façon éloquente.

Les élèves invités à l'OMC ne peuvent espérer bien réussir sans se préparer. La préparation passe par l'étude de problèmes du même niveau des années précédentes et l'enrichissement des connaissances dans les domaines peu ou mal couverts par les programmes de mathématiques scolaires (géométrie, combinatoire de base, inégalités, algèbre des polynômes). La Société mathématique du Canada (www.smc.math.ca) et la Mathematical Association of America (www.maa.org) sont d'ailleurs des mines de ressources pour la préparation aux concours.

L'emploi de techniques complexes ou « maladroites » pour résoudre des problèmes est ressorti comme une lacune des programmes standards. Quelques élèves sont exposés de façon superficielle à des notions mathématiques avancées, comme la trigonométrie et le calcul différentiel et intégral avant d'avoir maîtrisé des notions beaucoup plus élémentaires de géométrie et d'algèbre.

Chaque problème valait un total de 7 points.
Les points accordés à chacun des problèmes sont décrits ci-dessous :

Points	#1	#2	#3	#4	#5
7	30	7	23	0	1
6	1	3	2	0	0
5	4	1	3	1	0
4	6	4	2	2	1
3	6	9	8	4	1
2	8	18	14	9	3
1	15	29	15	29	15
0	13	15	25	12	33
-	13	10	4	39	42

Problème 1 : La solution reposait principalement sur le fait que deux triangles ayant la même base et les mêmes parallèles ont aussi la même aire. Bien des élèves ont toutefois compliqué leur solution inutilement en y introduisant la notion d'altitude ou la formule du calcul de l'aire (hauteur multipliée par base divisée par deux). Même si la plupart de ces élèves ont donné une bonne réponse, leur solution était deux fois plus longue que nécessaire. Plusieurs élèves ont eu recours à la géométrie analytique, méthode peu pratique lorsqu'utilisée en conjonction avec la formule « up-and-down » pour calculer l'aire d'un triangle.

Problème 2 : Les problèmes d'équations fonctionnelles sont généralement plus difficiles lorsque des restrictions injustifiées sont imposées à la fonction; c'est ce qui s'est produit ici. Certains élèves, qui connaissaient quelques notions de calcul, ont immédiatement eu recours à la dérivation et n'ont pu aller plus loin. De toute évidence, ils n'ont pas compris que les fonctions n'ont pas toutes une dérivée. Plusieurs élèves ont implicitement supposé que la fonction est continue et monotone à cause de la nature bijective de f. Certains concurrents ont plutôt considéré f comme un polynôme, et certains comme un polynôme linéaire, et ont poursuivi dans cette direction. D'autres encore savaient qu'une fonction qui satisfait l'équation $g(x + y) = g(x) + g(y)$ sur les nombres rationnels doit avoir la forme $g(x) = kx$; les correcteurs ont accepté l'énoncé de ce fait sans preuve.

Problème 3 : Les élèves ont mieux réussi ce problème que prévu. Ils ont eu recours à plusieurs méthodes efficaces pour trouver une solution. Même s'il suffisait d'appliquer de façon judicieuse une inégalité arithmético-géométrique ou harmonique-arithmétique pour résoudre ce problème, quelques élèves ont sorti l'artillerie lourde sans pour autant trouver une solution plus efficace.

Problème 4 : Ce problème était difficile, mais il a été moins bien réussi que prévu. La possibilité de congruence modulo 1 n'a pas causé de difficultés, à une ou deux exceptions près. De nombreux concurrents connaissaient le petit théorème de Fermat (connaissance essentielle à toute préparation à l'OMC); moins de concurrents qu'on l'aurait souhaité ont toutefois trouvé les solutions $f(n) = n$ ou $f(p) = 1$ pour tous les nombres premiers p. La plupart des élèves qui ont obtenu des points à ce problème ont pu constater assez tôt que $f(p)$ divise p et par conséquence, $f(p)$ est 1 ou p, pour tout nombre premier p. Quelques élèves pensaient que l'une de ces deux options devait nécessairement se réaliser. De nombreux élèves ont posé $f(n) = n + kp$, après quoi les solutions sont généralement devenues beaucoup trop compliquées.

Problème 5 : Il était prévu que ce problème soit difficile. Les élèves devaient en effet résoudre une récursion linéaire. Toutefois, quatre points ont été accordés à toute personne qui arrivait à établir la récursion. La principale difficulté de ce problème tenait à l'analyse des divers types de marches de la tour et à la formulation d'un processus d'induction. Nous avons été déçus de constater que si peu d'élèves ont pu raisonner de façon suffisamment claire pour bien amorcer la résolution du problème. Quelques concurrents ont mal lu le problème, et la tour a abouti dans le coin supérieur droit.