Rapport de la 39^{e} olympiade mathématique du Canada 2007

Outre le soutien de son commanditaire principal, la Financière Sun Life, et de l'Université de Toronto, la Société mathématique du Canada adresse les remerciements suivants :

Sun Life du Canada
Ministère de l'Éducation de l'Alberta
Ministère du Nouveau-Brunswick
Ministère de Terre-Neuve-et-Labrador
Ministère des Territoires du Nord-Ouest
Ministère de la Nouvelle-Écosse
Ministère de l'Ontario et de la Saskatchewan
Nelson Thomson Learning
John Wiley and Sons Canada Ltd.
A.K. Peters Ltd.
Maplesoft
le Département de mathématiques de l'Université de Toronto
le Département de mathématiques et de statistique de l'Université d'Ottawa
le Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Calgary
le Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Regina
le Département de mathématiques et de statistique de l'Université York
le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique de l'Université de Waterloo
le Département de mathématiques de l'Université Wilfrid Laurier

L'Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l'OMC, un sous-comité du Comité des concours mathématiques. Instituée en 1969, l'OMC offre aux élèves qui se sont illustrés dans les concours provinciaux de mathématiques une occasion de concourir sur la scène nationale. Elle sert en outre d'épreuve préparatoire aux élèves canadiens qui participent à l'Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Se qualifient pour l'OMC les élèves qui obtiennent une note suffisamment élevée au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) ou qui sont désignés par le président du Comité de l'OMC. Je tiens à remercier Peter Minev de l'Université de l'Alberta d'avoir sélectionné les élèves de l'Alberta.

La Société remercie la Sun Life du Canada, compagnie d'assurance-vie, commanditaire de l'Olympiade mathématique du Canada 2007, et les autres commanditaires, dont : les ministères de l'Éducation de l'Ontario, du Québec, de l'Alberta, du Nouveau-Brunswick, de Terre-Neuve-et-Labrador, des Territoires du Nord-Ouest et de la Saskatchewan; le Département de mathématiques et de statistique de l'Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton; le Centre d'éducation en mathématiques et en statistique de l'Université de Waterloo; le Département de mathématiques et de statistique de l'Université d'Ottawa; le Département de mathématiques de l'Université de Toronto; le Département de mathématiques de l'Université de la Colombie-Britannique; Nelson Thompson Learning; John Wiley and Sons Canada Ltd; McGraw-Hill, A.K. Peters et Maplesoft.

Je remercie très sincèrement les membres du Comité de l'OMC qui ont proposé des problèmes en vue de l'olympiade de 2007 : Robert Barrington Leigh, Ed Doolittle, Chris Fisher, Valeria Pendelieva, Naoki Sato et Jacob Tsimerman. [Je souligne ici et avec une profonde tristesse le décès de Robert Barrington Leigh en août 2006.] Les examens ont été corrigés par Ed Barbeau, Man-Duen Choi, Felix Recio et Adrian Tang, avec l'aide, pour des cas particuliers, de Chris Fisher, de Naoki Sato, d'Adrian Tang et d'Ed Wang. Merci aussi à Tom Griffiths (London, ON) d'avoir servi de validateur et à Joseph Khoury d'avoir traduit l'examen en français. Je remercie en outre Susan Latreille et le directeur administratif, Graham Wright, du bureau de la SMC, dont la contribution inestimable y est pour beaucoup dans le succès de l'OMC.

Ed Barbeau, président
Comité de l'Olympiade mathématique du Canada

La 39e Olympiade mathématique du Canada (2007) a réuni, le mercredi 28 mars 2007, 76 concurrents en provenance de 50 écoles (46 au Canada, trois aux É-U et une à Hong Kong); sept provinces canadiennes étaient représentées :

C.-B. (11) Alb. (6) SK (1) ON (43) Qc (2) N.-B. (1) N.-É. (1)

L'OMC 2007 comportait cinq questions valant sept points chacune, pour un maximum de 30 points. Les concurrents officiels ont été classés dans quatre divisions, en fonction de leurs résultats :

Division	Fourchette	Nombre d'élèves
I	23 - 30	7
II	19 - 22	14
III	15 - 18	21
IV	0 - 14	33

PREMIER PRIX — Coupe Sun Life — 2 000 $

Yan Li
Dr. Norman Bethune Collegiate Institute, Scarborough, Ontario

DEUXIÈME PRIX — 1 500 $
Jonathan Schneider
University of Toronto Schools, Toronto, Ontario

TROISIÈME PRIX — 1 000 $
Jarno Sun
Western Canada High School, Calgary, Alberta

MENTIONS HONORABLES — 500 $

Jia Guo
O'Neill Collegiate Vocational Institute
Oshawa, ON

Kent Huynh
University of Toronto Schools
Toronto, ON

Steven Karp
Lord Byng Secondary School.
Vancouver, BC

Alexander Remorov
William Lyon Mackenzie Collegiate Institute
North York, ON

Division 1
23 - 30

Yan Li	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
Jonathan Schneider	University of Toronto Schools	ON
Jarno Sun	Western Canada H.S.	AB
Jeffrey Mo*	William Aberhart H.S.	AB
Alexander Remorov	William Lyon Mackenzie C.I.	ON
Steven Karp	Lord Byng S.S.	BC
Jia Guo	O'Neill C.V.I.	ON
Kent Huynh	University of Toronto Schools	ON

Division 2
19 - 22

Jimmy He	Seaquam S.S.	BC
Chen Sun	A.B. Lucas S.S.	ON
Linda Zhang	Western Canada H.S.	AB
Lin Fei	Don Mills C.I.	ON
Greg Tsang	Crescent School	ON
Haolong Zheng	London Int'l Academy	ON
William Fu	A.Y. Jackson S.S.	ON
Frank Meng	Burnaby South S.S.	BC
Danny Shi	Sir Winston Churchill H. S.	AB
Bobby Xiao	Walter Murray C.I.	SK
Sunil Argarwal	ICAE	MI
Bo Cheng Cui	West Vancouver S.S.	BC
Xiao Jiang	Marianopolis College	QC
Gary Peng	Don Mills C.I.	ON

Division 3
15 - 18

Bill Long	Glebe Collegiate Institute	ON
Johnson Mo	St. George's School	BC
Julian Sun	A.B. Lucas S.S.	ON
Arman Tavakoli	Kitsilano Secondary School	BC
Chen Bo Wan	Stephen Leacock C.I.	ON
Catherine Zhou	Albert Campbell C.I.	ON
Philip Chen	Glenforest S.S.	ON
Joe Kileel	Fredericton H.S.	NB
Kyle MJ Kim	Unionville H.S.	ON
Yifan Wang	Laura Secord S.S.	ON
Hao Yan	Jarvis C.I.	ON
Andy Kong	Vincent Massey S.S.	ON
Sina Makaremi	John Fraser S.S.	ON
Jonathan Zhou	Burnaby North Secondary School	BC
Neil Gurram	ICAE	MI
Jiayang Jiang	A.Y. Jackson S.S.	ON
Sheng Liu	Stephen Leacock C.I.	ON
David Wang	A.B. Lucas S.S.	ON
Shuyun Wu	Martingrove C.I.	ON
Chung Liang Yee	St. Paul's Co-educational College	HK
Tianyuan Zheng	Phillips Academy	MA

Division 4
0 - 14

Boris Braverman	Sir Winston Churchill H. S.	AB
Chuan Guo	St. Pius X High School	ON
Zhiqiang Liu	Don Mills C.I.	ON
Benjamin Niedzielski	Phillips Academy	MA
Max Zhou	L'Amoreaux C.I.	ON
Harry Chang	A.B. Lucas S.S.	ON
Simeng Ding	Waterloo C.I.	ON
Dimitri Dziabenko	Don Mills C.I.	ON
Kwonyong Jin	Phillips Academy	MA
Steven Wu	Martingrove C.I.	ON
Terry Zhang	Sir John A. Macdonald C.I.	ON
Hao Chen	The Woodlands S.	ON
Saurabh Pandey	ICAE	
Zhang Xinyang	Orillia D.C. & V.I.	ON
Shi Yao Zhang	Jarvis C.I.	ON
Corey Yednoroz	Vincent Massey S.S.	ON
Yunoso Kim	Phillips Academy	MA
Yang Zhou	Albert Campbell C.I.	ON
Fan Jiang	Albert Campbell C.I.	ON
James Yang	Phillips Academy	MA
Frank Ban	Vincent Massey S.S.	ON
Ram Bhaskar	ICAE	MI
Juliet Ji	Georges Vanier S.S.	ON
Heesung Yang	West Vancouver S.S.	BC
Bill Pang	Sir Winston Churchill S.S.	BC
Hwi Lee	Gleneagle S.S.	BC
Linhe Li	Queen Elizabeth H.S.	NS
Michael Wong	Tempo School	AB
Kou Kou	Bond Academy	ON
Ran Li	E.S. Honore-Mercier	QC
Takwai Lui	St. Paul's Co-educational College	HK
Vincent Zhou	Dr. Norman Bethune C.I.	ON
Daniel Lee	Crescent School	ON

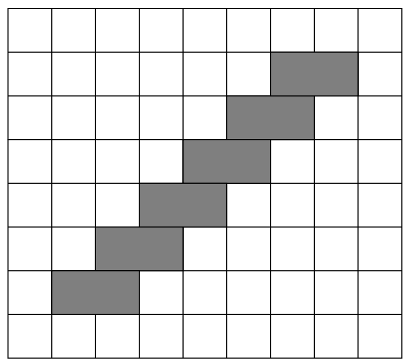
*unofficial candidate

39e Olympiade mathmatique du Canada

Mercredi le 28 mars, 2007

---

1. Quel est le nombre maximum de dominos 2×1 qui peuvent être placés sur un damier 8×9 si six d'entre eux sont placés comme illustré dans le digramme ci-dessous ? (les dominos ne doivent pas se chevaucher) Chaque domino doit être placé horizontalement ou verticalement afin de couvrir deux places adjacentes du damier.



2. Soit deux triangles qui satisfont aux conditions suivantes:

   (a) deux côtés d'un des triangles sont égaux (en longueur) à deux côtés du deuxième, et

   (b) les triangles sont semblables, mais pas nécessairement congruents.

   Montrer que le rapport des côtés qui sont liés par la similarité est un nombre entre $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ and $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

3. Supposer que f est une fonction à valeurs réelles qui satisfait

$$f(xy) + f(y-x) \geq f(y+x)$$

   pour tous nombres réels x et y.

   (a) Donner un polynôme non constant qui satisfait cette condition.

   (b) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout nombre réel x.

`Consulter la page 2 pour le reste des questions`

4. Si a, b, sont deux nombres réels tels que $ab \neq 1$, on définit l'opération $*$ par

$$a * b = \frac{a + b - 2ab}{1 - ab} \ .$$

Commencer par une liste de $n \, (\geq 2)$ nombres réels dont chaque entrée x est tel que $0 < x < 1$. Pour chaque choix de deux nombres a et b dans la liste; on enlève les deux nombres et on place le nombre $a * b$ à la fin de la liste réduisant ainsi sa longueur par un. Répéter le processus jusqu'à ce qu'il reste un seul élément dans la liste.

(a) Démontrer que le dernier élément qui reste est toujours le même indépendamment du choix de la paire des nombres à chaque étape.

(b) Supposer maintenant qu'on affaiblit la condition sur les nombres x dans la liste S à $0 < x \leq 1$. Qu'est-ce qui se passe si S contient exactement un 1?

5. Dans un triangle ABC, le cercle inscrit touche les côtés BC, CA et AB en D, E et F, respectivement. Soit Γ, Γ_1, Γ_2 et Γ_3 les cercles circonscrits aux triangles ABC, AEF, BDF et CDE respectivement.

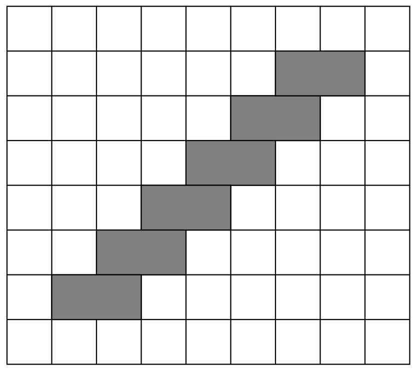
Soit A et P les points d'intersection de Γ et Γ_1, B et Q les points d'intersection de Γ et Γ_2, et C et R les points d'intersection de Γ et Γ_3.

(a) Démontrer que les cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 s'intersectent en un point commun.

39e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi, 29 Mars, 2007

Solutions aux problèmes 2007 de OMC



Solution à 1. Identifiez cinq sous-ensembles A, B, C, D, E du damier: C comprend les carrés occupés par les six dominos déjà placés, B est le coin supérieur droit, D est le coin inférieur gauche, A comprend les carrés au-dessus et à gauche de ceux dans $B \cup C \cup D$ et E comprend les carrés au-dessous et à droite de ceux dans $B \cup C \cup D$. Le damier peut être coloré de la même façon qu'un damier régulier (noir et blanc) de sorte que A ait 13 carrés noirs et 16 blancs, B ait un seul carré blanc, E ait 16 carrés noirs et 13 blancs et D ait un seul carré noir. Chaque domino autre que les six originaux doit se situer entièrement dans $A \cup B \cup D$ ou dans $E \cup B \cup D$, dont chacun contient au plus 14 dominos. Ainsi, on ne peut pas avoir au total plus que $2 \times 14 + 6 = 34$ dominos. Ceci est possible en plaçant 14 dominos dans $A \cup D$ et 14 dans $E \cup B$.

Solution à 2. Si les triangles sont isocèles, alors ils doivent être congruents et le rapport désiré est 1. En effet, si les deux triangles ont les deux côtés de même longueur en commun, au moins un de ces deux côtés dans un triangle correspond à un côté de même longueur dans l'autre. Si les longueurs communes ne sont pas égales, alors soit que les côtés de même longuer se correspondent ou les côtés de longueurs différentes se correspondent dans les deux directions. Dans ce cas, le rapport est 1 qui est dans les limites voulues.

Supposons maintenant que les triangles sont scalènes. Il est impossible que la même longueur soit extrême (maximum ou minimum) dans les deux triangles. Alors, on doit avoir une situation où les longueurs correspondantes dans les deux triangles sont (x, y, z) et (y, z, u) avec $x < y < z$ et $y < z < u$. On sait que $y/x = z/y = u/z = r > 1$. Alors, $y = rx$ et $z = ry = r^2x$. De l'inégalité triangulaire $z < x + y$, on a que $r^2 < 1 + r$. Comme $r^2 - r - 1 < 0$ et $r > 1$, $1 < r < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Le rapport des dimensions dans l'ordre croissant est $1/r$ qui satisfait $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) < 1/r < 1$. Le résultat s'en suit.

Solution à 3. (a) Soit $f(x) = x^2 + 4$. Alors

$$\begin{aligned} f(xy) + f(y-x) - f(y+x) &= (x^2y^2 + 4) + (y-x)^2 + 4 - (y+x)^2 - 4 \\ &= (xy)^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2 \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

D'où, $f(x) = x^2 + 4$ satisfait la condition.

(b) Considérer un couple (x,y) pour lequel $xy = x+y$. Si on écrit cette équation sous la forme $(x-1)(y-1) = 1$, on trouve la solution générale $(x,y) = (1+t^{-1}, 1+t)$, pour $t \neq 0$. En remplaçant ceci dans l'inégalité, on obtient que $f(t-t^{-1}) \geq 0$ pour tout $t \neq 0$. Pour tout nombre réel u, l'équation $t - t^{-1} = u$ mène à l'équation quadratique $t^2 - ut - 1 = 0$ qui admet un discriminant positif et par conséquent une solution réelle. Alors $f(u) \geq 0$ pour tout nombre réel u.

Commentaire. La substitution $v = y - x$, $u = y + x$ dont l'inverse est $x = \frac{1}{2}(u-v)$, $y = \frac{1}{2}(u+v)$ change la condition à $f(\frac{1}{4}(u^2 - v^2)) + f(v) \geq f(u)$. La même stratégie comme dans la solution précédente mène au choix $u = 2 + \sqrt{v^2+4}$ et par conséquent, $f(v) \geq 0$ pour tout v.

Solution à 4 (b). Il est facile de vérifier que $a * 1 = 1$ pour $a \neq 1$, ce qui implique que, dès que 1 est inclut dans la liste, il y sera toujours et cette dernière se termine avec la valeur unique 1.

Solution à 4 (a). Il y a plusieurs manières d'aborder la partie (a). Il est important de vérifier que l'ensemble $\{x : 0 < x < 1\}$ est fermé sous l'opération afin que le processus décrit ci-dessus soit toujours défini.

Si $0 < a, b < 1$, alors

$$0 < \frac{a+b-2ab}{1-ab} < 1 \ .$$

L'inégalité à gauche suit de

$$a + b - 2ab = a(1-b) + b(1-a) > 0$$

et celle à droite suit de

$$1 - \frac{a+b-2ab}{1-ab} = \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab} > 0 \ .$$

Alors, on n'aura jamais la situation où un ensemble de nombres contiendra une paire de réciproques, et l'opération peut toujours être effectuée.

Solution 1. On peut montrer par induction que deux nombres quelconques dans n'importe quel ensemble s'obtiennent des sous-ensembles disjoints de S.

On utilise un argument par induction sur le nombres d'entrées qu'on commence avec. À chaque étape, le nombre d'entrées est réduit par un. Si on commence par n nombres, le résultat final est

$$\frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + 3\sigma_3 - \cdots + (-1)^{n-1} n \sigma_n}{1 - \sigma_2 + 2\sigma_3 - 3\sigma_4 + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)\sigma_n} \ ,$$

où σ_i est la somme symétrique de touts les $\binom{n}{i}$ i-produits des n éléments x_i dans la liste.

Solution 2. On définit

$$a * b = \frac{a+b-2ab}{1-ab} \ .$$

Cette opération est commutative et associative:

$$a * (b * c) = (a * b) * c = \frac{a+b+c-2(ab+bc+ca)+3abc}{1-(ab+bc+ca)+2abc} \ .$$

Comme le résultat final est un $*-$produit des éléments de S avec quelques arrangements des parenthèses, le résultat s'en suit.

Solution 3. Soit $\phi(x) = x/(1-x)$ définie pour $0 < x < 1$. C'est une fonction injective de l'intervalle ouvert $(0,1)$ à $(0,\infty)$. Pour $a, b \in S$ arbitraires, on a que

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a+b-2ab}{1-ab}\right) &= \tfrac{a+b-2ab}{(1-ab)-(a+b-2ab)} = \tfrac{a+b-2ab}{1-a-b+ab} \\ &= \tfrac{a}{1-a} + \tfrac{b}{1-b} = \phi(a) + \phi(b) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Posons $T = \{\phi(s) : s \in S\}$ Alors remplacer a, b dans S comme indiqué dans la question revient à remplacer $\phi(a)$ et $\phi(b)$ dans T par $\phi(a) + \phi(b)$ pour obtenir une nouvelle paire d'ensembles liés par ϕ. Le résultat final est alors $\phi^{-1}\left(\sum\{\phi(s) : s \in S\}\right)$.

Solution 4. Soit $f(x) = (1-x)^{-1}$ définie pour x positif et différent de 1. Alors $f(x) > 1$ si et seulement si $0 < x < 1$. Remaqruer que

$$f(x * y) = \frac{1-xy}{1-x-y+xy} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} - 1 \ .$$

2

Si $f(x) > 1$ et $f(y) > 1$, alors $f(x*y) > 1$ aussi. Ceci implique que si x et y sont dans l'intervalle $(0,1)$, il en est de même pour $x*y$. Noter aussi $f(x)$ est une fonction injective.

À chaque liste L, on fait associer la fonction $g(L)$ définie par

$$g(L) = \sum\{f(x) : x \in L\} \ .$$

Dénotons par L_n la liste donnée et par $L_{n-1}, L_{n-2}, \cdots, L_1$ les listes suivantes, où L_i est la liste avec i éléments. Comme $f(x*y) = f(x) + f(y) - 1$, $g(L_i) = g(L_n) - (n-i)$ indépendamment du choix qui génère chaque liste des listes précédentes. Alors $g(L_1) = g(L_n) - (n-1)$ est fixe. Par contre, $g(L_1) = f(a)$ pour un certain nombre a avec $0 < a < 1$. D'où $a = f^{-1}(g(L_n) - (n-1))$ est fixe.

Solution à 5 (a). Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Comme le quadrilatère $AEIF$ a des angles droits aux sommets E et F, il est cyclique et par conséquent, Γ_1 passe par I. De même, Γ_2 et Γ_3 passent par I, ceci montre la partie (a).

Solution à 5 (b). Soient ω et I le cercle inscrit au triangle ABC et son centre respectivement. Remarquer que AI bissecte le segment FE en un angle droit car AI bissecte l'angle FAE et $AF = AE$. De même, BI bissecte le segment DF en un angle droit et CI bissecte le segment DE en un angle droit.

Considérer l'image du diagramme dans l'inversion par rapport à ω. Soit A' l'image de A dans cette inversion, *etc...* Noter que le centre I de l'inversion est situé sur la même droite avec n'importe quel point et son image dans l'inversion. Dans cette inversion, l'image de γ_1 est EF, ce qui fait que A' est le point milieu de EF. De même, B' est le point milieu de DF et C' est le point milieu de DE. Par conséquent, γ', l'image de γ dans cette inversion, est le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$, ce qui implique que γ' est le cercle des neuf points du triangle DEF.

Comme P est l'intersection de Γ et Γ_1 autre que A, alors P' est l'intersection de Γ' et EF autre que A', ce qui signifie que P' est le pieds de la hauteur de D à EF. De même, Q' est le pieds de la hauteur de E à DF et R' est le pieds de la hauteur de F à DE.

Maintenant, soit X, Y et Z les points milieu des arcs BC, AC et AB sur Γ respectivement. On montre par la suite que le point X est sur PD.

Soit X' l'image de X dans l'inversion, alors I, X et X' sont colinéaires. Mais X est le point milieu de l'arc BC, alors A, A', I, X' et X sont colinéaires. L'image de la droite PD est le cercle circonscrit au triangle $P'ID$, alors pour montrer que X est sur PD, il suffit de montrer les points P', I, X' et D sont cocycliques.

On a que B' est le point milieu de DF, C' est celui de DE et P' est le pieds de la hauteur de D à EF. Alors, D est la réflexion de P' dans $B'C'$.

Comme $IA' \perp EF$, $IB' \perp DF$ et $IC' \perp DE$, I est l'hortocentre du triangle $A'B'C'$. Alors, X' est l'intersection de la hauteur de A' à $B'C'$ avec le cercle circonscit au triangle $A'B'C'$. D'après un résultat bien connu, X' est la réfléxion de I dans $B'C'$. Ceci implique que $B'C'$ est la bissectrice perpendiculaire de $P'D$ et IX' et par conséquent, les points P', I, X' et D sont cocycliques.

Alors, X est sur PD. De même, Y est sur QE et Z est sur RF. D'où, pour montrer que PD, QE et RF sont concourantes, il suffit de montrer que DX, EY et FZ sont concourantes.

Pour montrer ceci, considérer les tangentes à Γ aux points X, Y et Z. Ces tangentes sont parallèles à BC, AC et AB, respectivement. Alors, le triangle Δ défini par ces tangentes est homothétique au triangle ABC. Soit S le centre de l'homothétie. Alors l'homothétie qui transforme le triangle ABC à Δ transforme ω à Γ, et par conséquent transforme D à X, E à Y et F à Z. D'où DX, EY et FZ se coupent en S.

Commentaire. La solution utilise le résultat suivant: *Supposons que H est l'orthocentre d'un triangle ABC et que AH coupe BC au point P et le cercle circonscrit au triangle ABC au point D. Alors $HP = PD$.* La preuve est facile: soit Q le point d'intersection de BH avec AC. Remarquer que $AD \perp BC$ et $BQ \perp AC$. Comme $\angle ACB = \angle ADB$,

$$\angle HBC = \angle QBC = 90^\circ - \angle QCB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle ADB = \angle DBP \ ,$$

les deux triangles HBP et DBP sont semblables et $HP = PD$.

Solution 2. (a) Soit J le point d'intersection de Γ_2 et Γ_3. Alors $BDJF$ et $CDJE$ sont cycliques. On a

$$\begin{aligned} \angle FJE &= 360^\circ - (\angle DJF + \angle DJE) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle ABC + 180^\circ - \angle ACB) \\ &= \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle FAE \ . \end{aligned} \tag{3}$$

D'où $AFJE$ est cyclique et par conséquent, les cercles circonscrits aux triangles AEF, BDF et CED passent par J.

(b) [Y. Li] Joignons RE, RD, RA et RB. Dans Γ_3, $\angle ERD = \angle ECD = \angle ACB$ et $\angle REC = \angle RDC$. Dans Γ, $\angle ARB = \angle ACB$. Alors, $\angle ERD = \angle ARB \Longrightarrow \angle ARE = \angle BRD$. De plus,

$$\angle AER = 180° - \angle REC = 180° - \angle RDC = \angle BDR \ .$$

Alors, les triangles ARE et BRD sont semblables, et $AR : BR = AE : BD = AF : BF$. Ceci implique que RF bissecte l'angle ARB, et par conséquent RF passe par le point milieu de l'arc mineur AB sur Γ. De même, PD et QE sont des bissectrices respectives des angles BPC et CQA et passent par les points milieu des arcs mineurs BC et CA sur γ.

Soit O le centre du cercle Γ, et U, V, W les points milieu respectifs des arcs mineurs BC, CA, AB sur ce cecle de sorte que PU contient D, QV contient E et RW contient F. On doit montrer que DU, EV et FW sont concourantes.

Comme ID et OU sont perpendiculaires à BC, $ID \| OU$. De même, $IE \| OV$ et $IF \| OW$. Comme $|ID| = |IE| = |IF| = r$ (le rayon du cercle inscrit) et $|OU| = |OV| = |OW| = R$ (le rayon du cercle circonscrit), une translation $\overrightarrow{IO}$ suivie par une dilatation d'un facteur de R/r transforment le triangle DEF au triangle UVW, de sorte que ces triangles sont semblables avec des côtés correspondants parallèles.

Soit K le point d'intersection de EV et FW, L celui de DU et FW. Comme les triangles KEF et KVW, LDF et LUW, DEF et UVW sont semblables, on a

$$KF : FW = EF : VW = DF : UW = LF : LW \ ,$$

d'où $K = L$ et les droites DU, EV et FW se coupent en un point commun K, comme voulu.

RAPPORT DES CORRECTEURS

Ed Barbeau, Man-Duen Choi, Felix Recio et Adrian Tang ont corrigé les examens. Les examens des grands gagnants ont aussi été revus en détail par Ed Wang, avec l'aide de Chris Fisher, de Naoki Sato et de Jacob Tsimerman, pour des solutions particulières. Les examens des concurrents des trois premières divisions, et de bon nombre de ceux de la quatrième, ont été corrigés séparément par au moins deux personnes, et au moins quatre personnes ont établi le classement des douze premières places.

Les problèmes ont été conçus de manière à ce que les élèves puissent obtenir deux points assez facilement, notamment une partie du problème des dominos à la question 1, ainsi que les questions 3a), 4b) et 5a). Un nombre étonnant d'élèves n'ont pas pu profiter de cet avantage.

Quelque 78 élèves se sont inscrits à l'OMC, mais deux ne se sont pas présentés le jour du concours.

Le tableau suivant présente le nombre de points accordé à chaque problème :

Points	#1	#2	#3	#4	#5
7	24	23	5	6	1
6	5	12	1	25	0
5	10	8	1	11	1
4	4	8	2	4	0
3	4	5	5	3	0
2	16	7	23	10	39
1	2	7	6	2	3
0	6	4	23	5	4
-	5	2	10	10	28

Problème 1 : Deux points ont été accordés pour un exemple de placement de 34 dominos. Plusieurs élèves, qui avaient pourtant une bonne justification, n'ont pas réussi à démontrer qu'il était effectivement possible de placer un maximum de 34 dominos. Un bon nombre d'élèves ont colorié les carrés du damier en noir et blanc et ont exploité le fait qu'un domino devait couvrir un carré de chaque couleur. Plusieurs ont choisi de séparer les carrés non couverts en deux zones triangulaires et de traiter chacune séparément, même si tous n'ont pas su quoi faire de la possibilité qu'un domino déborde d'une zone. Dans les meilleures solutions, les élèves ont exclu les cellules du coin inférieur gauche et du coin supérieur droit du damier de la division, et ont expliqué que, même si un domino d'une des zones triangulaires débordait dessus, le déséquilibre entre les carrés blancs et les carrés noirs disponibles ne permettait pas de couvrir toutes les cellules de toute façon. Quelques élèves ont fait une analyse exhaustive cas par cas selon les possibilités que le coin inférieur gauche et le coin supérieur droit soient couverts ou non, mais cela donnait lieu à une solution longue et détaillée. Ce problème a été proposé par le regretté Robert Barrington Leigh.

Problème 2 : Presque tous les élèves ont tenté de résoudre ce problème, qui s'est avéré difficile à résoudre. Une bonne approche était de commencer par considérer le cas où les triangles étaient isocèles (donc congruents), et ensuite étudier le cas des triangles scalènes. Pour des triangles non congruents, l'observation du fait que les longueurs du plus long côté du grand triangle et du plus court côté du petit triangle ne correspondaient pas dans l'autre triangle a aidé à ne pas considérer un grand nombre de cas et à donner un argument relativement court. Beaucoup d'élèves qui ont essayé une analyse exhaustive des côtés dans les deux triangles ont oublié des cas et ont fait des hypothèses qui n'étaient pas justifiées. Le rôle de l'inégalité triangulaire pour les longueurs des côtés était compris par tous ceux qui ont résolu le problème, mais beaucoup d'entre eux n'ont pas fait beaucoup d'attention à bien écrire l'inégalité quadratique satisfaite par le rapport ou à la bien résoudre. Ce problème a été proposé par Chris Fisher.

Problème 3 : Plus d'élèves que prévu ont trouvé l'exemple $x2 + 4$, mais quelques-uns n'ont donné aucune justification. Quelques élèves ne savaient pas ce qu'était un polynôme. Les bonnes solutions proposaient les situations où $xy = x + y$, mais certains élèves n'ont pas réussi à bien montrer que cela couvrait toutes les valeurs possibles de la variable. Ceux qui n'ont pas réussi à trouver cette justification se sont souvent rendus jusqu'à montrer que $f(0) \geq 0$ et $f(x) + f(-x) >= 0$, sans toutefois réussir à aller plus loin ou en se trompant dans les inégalités.

Problème 4 : Dans l'ensemble, ce problème a été mieux réussi que prévu, plusieurs élèves ayant reconnu la valeur de montrer que l'opération était associative. Toutefois, il fallait deux observations importantes pour obtenir tous les points. Il fallait montrer que l'opération * était interne dans le domaine $0 < x < 1$ pour que le dénominateur n'ait aucune chance d'être nul. De plus, il fallait au moins mentionner que l'opération était commutative. Certains élèves ont reconnu l'expression d'une combinaison d'ordre n d'éléments, bien que certains n'ont pas bien réussi à expliquer les détails de l'argument d'induction. De nombreux élèves ont réussi la partie b), qui valait 2 points. Ce problème a été proposé par Jacob Tsimerman.

Problème 5 : Prévoyant que ce problème serait difficile, nous avons modifié la partie a) pour que les élèves puissent obtenir deux points assez facilement et, peut-être, qu'ils envisagent une inversion par rapport au cercle, comme un moyen pour résoudre le problème. Le gagnant du premier prix a proposé une justification très élégante, qui différait de la solution attendue. Un seul autre élève a fait des progrès intéressants, sans toutefois parvenir à résoudre le problème. Ce problème a été proposé par Naoki Sato.