Rapport de la 38ième olympiade mathématique du Canada 2006

Outre la Financière Sun Life, notre commanditaire principal, et l'Université de Winnipeg, la Société mathématique du Canada remercie chaleureusement les commanditaires suivants de leur appui :

Nelson Thomson Learning
John Wiley and Sons Canada Ltd.
Maplesoft
A.K. Peters, Ltd.

Alberta Learning
Department of Education, New Brunswick
Department of Education, Newfoundland and Labrador
Department of Education, Northwest Territories
Department of Education, Nova Scotia
Ministry of Education, Ontario
Ministère de l'Éducation, Québec
Department of Education, Saskatchewan

University of British Columbia
University of New Brunswick at Fredericton
University of Ottawa
University of Toronto
Centre for Education in Mathematics and Computing, University of Waterloo

L'Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l'OMC, un sous-comité du Comité des concours mathématiques. Instituée en 1969, l'OMC offre aux élèves qui se sont illustrés dans les concours provinciaux de mathématiques une occasion de concourir sur la scène nationale. Elle sert en outre d'épreuve préparatoire aux élèves canadiens qui participent à l'Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Se qualifient pour l'OMC les élèves qui obtiennent une note suffisamment élevée au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) ou qui sont désignés par un coordonnateur provincial.

La Société remercie la Sun Life du Canada, compagnie d'assurance-vie, commanditaire principal de l'Olympiade mathématique du Canada 2006 et les autres commanditaires, dont : les ministères de l'Éducation de l'Ontario, du Québec, de l'Alberta, du Nouveau-Brunswick, de Terre-Neuve-et-Labrador, des Territoires du Nord-Ouest et de la Saskatchewan; le Département de mathématiques et de statistique, Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton; le Centre d'éducation en mathématiques et en statistique, Université de Waterloo; le Département de mathématiques et de statistique, Université d'Ottawa; le Département de mathématiques, Université de Toronto; le Département de mathématiques, Université de la Colombie-Britannique; Nelson Thompson Learning; John Wiley and Sons Canada Ltd; A.K. Peters et Maplesoft.

Je tiens à remercier Robert Bilinski du Collège Montmorency d'avoir sélectionné les élèves du Québec pour l'OMC, Peter Minev de l'Université de l'Alberta, ceux de l'Alberta, et Rob Craigen de l'Université du Manitoba d'avoir vérifié l'admissibilité des élèves de sa province.

Mes remerciements chaleureux vont également aux membres du Comité de l'OMC qui contribué à la conception et à la correction de l'examen : Robert Barrington Leigh (Université de Toronto), Man-Duen Choi (Université de Toronto), Chris Fisher (Université de Regina), Richard Hoshino (Université Dalhousie), Roger Mong (Université de Toronto), Igor Poliakov (Université York), Felix Recio (Université de Toronto), Naoki Sato (San Diego, CA), Jacob Tsimerman (Université de Toronto), Terry Visentin (Université de Winnipeg) et Ed Wang (Université Wilfrid-Laurier). Merci aussi à Tom Griffiths (London, ON) d'avoir servi de validateur et à Joseph Khoury pour la traduction de l'examen en français. Je remercie en outre le Comité des concours mathématiques et son président, George Bluman (Université de la Colombie-Britannique), sans oublier Nathalie Blanchard et le directeur administratif, Graham Wright, du bureau de la SMC, dont la contribution inestimable y est pour beaucoup dans le succès de l'OMC.

Ed Barbeau, président
Comité de l'Olympiade mathématique du Canada

La 38e Olympiade mathématique du Canada (2006) a réuni, le mercredi 29 mars 2006, 79 concurrents en provenance de 55 écoles (52 au Canada, deux aux É-U et un à Singapour); huit provinces canadiennes étaient représentées. Voici la répartition provinciale des concurrents :

C.-B.(14) Alb.(8) SK(1) MB(1) ON(40) Qc(6) N.-B.(2) N.-É.(1)

L'OMC 2006 comportait cinq questions, pour un maximum de 33 points. Les élèves ont été classés dans quatre divisions, en fonction de leurs résultats :

Division	Fourchette	Nbre d'élèves
I	$18 \leq m < 28$	8
II	$14 \leq m < 17$	16
III	$9 \leq m < 13$	21
IV	$1 \leq m < 8$	34

PREMIER PRIX -- la Coupe Sun Life – 2 000 $

Dong Uk (David) Rhee
McNally School, Edmonton, Alberta

DEUXIÈME PRIX – 1 500 $
Yufei Zhao
Don Mills Collegiate Institute, Toronto, Ontario

TROISIÈME PRIX – 1000 $
Shawn Eastwood
Canadian International School, Singapour

MENTIONS HONORABLES – 500 $

Alan Guo
O'Neill Collegiate and Vocational Institute
Oshawa, Ontario

Kent Huynh
University of Toronto Schools
Toronto, Ontario

Viktoriya Krakovna
Vaughan Road Academy
Toronto, Ontario

Alex Remerov
Waterloo Collegiate Institute
Waterloo, Ontario

Thomas Tang
A.Y. Jackson High School
North York, Ontario

Division 2

$14 \leq m < 17$

Farzin Barekat	Sutherland Secondary School	C.-B.
Dimitri DziAlb.enko	Don Mills Collegiate Institute	ON
Xiaoshi Huang	Sir Winston Churchill High School	Alb.
Lei Jia	Waterloo Collegiate Institute	ON
Steven Karp	Lord Byng Secondary School	C.-B.
Adrian Keet	Westmount Charter School	Alb.
Andy Kong	Vincent Massey Secondary School	ON
William Ma	Waterloo Collegiate Institute	ON
Johnson Mo	St. John's School	C.-B.
Jeffrey Mo	William Alb.erhart High School	Alb.
Jennifer Park	Bluevale Collegiate Institute	ON
Yongho Park	Richmond Hill High School	ON
Richard Peng	Vaughan Road Academy	ON
Chen Sun	Tom Griffiths Home School	ON
Alex Wice	Leaside High School	ON
Alex Xu	Indus Center for Academic Excellence	MI

Division 3

$9 \leq m < 13$

Nicolas Berube	College de Bois-de-Boulogne	QC
Boris Braverman	Sir Winston Churchill High School	Alb.
Lin Fei	Don Mills Collegiate Institute	ON
Ioan Filip	Marianopolis College	QC
William (Jiening) Fu	A.Y. Jackson Secondary School	ON
Jimmy He	Seaquam Secondary School	C.-B.
Jiayang Jiang	A.Y. Jackson Secondary School	ON
Fang Lu	Glebe Collegiate Institute	ON
Frank Meng	BurnAlb.y South Secondary School	C.-B.
Clare Park	St. Theresa of Lisieux Collegiate H.S.	ON
Luke Schaeffer	Centennial C. & V. I.	ON
Jonathan Schneider	University of Toronto Schools	ON
Peng Shi	Sir John A. Macdonald Collegiate Institute	ON
Tony Wan	Stephen Leacock Collegiate Institute	ON
Ze Wang	Colonel By Secondary School	ON
Chen Xi	Harry Ainly High School	Alb.
Bobby Xiao	Walter Murray Collegiate Institute	SK
Hao Yan	Jarvis Collegiate Institute	ON
Yiyi Yang	Western Canada High School	Alb.
Allen Zhang	St. George's School	C.-B.
John Zhou	Indus Center for Academic Excellence	MI

Division 4

$1 \leq m < 8$

Sunil Agarwal	Indus Center for Academic Excellence	MI
Vivek Behera	Indus Center for Academic Excellence	MI
Eunse Chang	Don Mills Collegiate Institute	ON
Harry Chang	A.B. Lucas Secondary School	ON
Derek Chiu	Crescent School	ON
Bo Hong Deng	Jarvis Collegiate Institute	ON
Julia Evans	John Alb.bott College	QC
Joe Kileel	Fredericton High School	N.-B.
Ben Krause	St. George's School	C.-B.
Michael Lee	The Woodlands School	ON
Robert Legassicke	Dover Bay Secondary School	C.-B.
Stanley Lei	York Mills Collegiate Institute	ON
Scott (Yi-Heng) Lin	Moscrop Secondary School	C.-B.
Sunny Liu	Sir Winston Churchill Secondary School	C.-B.
Ethan Macaulay	The Halifax Grammar School	NS
Yale Mao	The Woodlands School	ON
P Alexandre Menard	College de Bois-de-Boulogne	QC
Yuchen Mu	St. John's-Ravenscourt School	MB
Jeremy Pham	The Advance Academy of Georgia	ON
Silviu Pitis	Don Mills Collegiate Institute	ON
Bruno Savard	Cegep St-Jean-sur-Richelieu	QC
Danny Shi	Windermere Secondary School	C.-B.
Sarah Sun	Holy Trinity Academy	Alb.
Peter Sun	Sir Winston Churchill Secondary School	C.-B.
Shirley Wu	Sir John A. Macdonald Collegiate Institute	ON
Lei Wu	Vincent Massey Secondary School	ON
Thomas Wu	Sir Winston Churchill Secondary School	C.-B.
Kevin Xiong	Don Mills Collegiate Institute	ON
Vick Yao	Vincent Massey Secondary School	ON
Wei Zhong Ye	Fredericton High School	N.-B.
Alan Ye	University Hill Secondary School	C.-B.
Boyang Zhang	The Woodlands School	ON
Qiyu Zhu	A.Y. Jackson Secondary School	ON
Chenglong Zou	John Alb.bott College	QC

38e Olympiade mathmatique du Canada

Mercredi le 29 mars, 2006

1. Soit $f(n,k)$ le nombre de façons de distribuer k biscuits à n enfants afin que chaque enfant reçoive au plus 2 biscuits. Par exemple, si $n = 3$, alors $f(3, 7) = 0$, $f(3, 6) = 1$ et $f(3, 4) = 6$.

Déterminer la valeur de

$$f(2006, 1) + f(2006, 4) + f(2006, 7) + \cdots + f(2006, 1000) + f(2006, 1003)\ .$$

2. Soit ABC un triangle acutangle (triangle dont les angles sont aigus). Inscrire un rectangle $DEFG$ dans ce triangle de sorte que D est sur AB, E est sur AC et F et G sont sur BC. Décrire le lieu des points d'intersection des diagonales de tous les rectangles $DEFG$ possibles (c'est-à-dire décrire la courbe occupée par ces points).

3. Dans un arrangement rectangulaire de nombres réels non négatifs à m lignes et n colonnes, chaque ligne et chaque colonne contient au moins un élément positif. De plus, si l'intersection d'une ligne et d'une colonne est un élément positif, alors la somme de leurs éléments est la même. Démontrer que $m = n$.

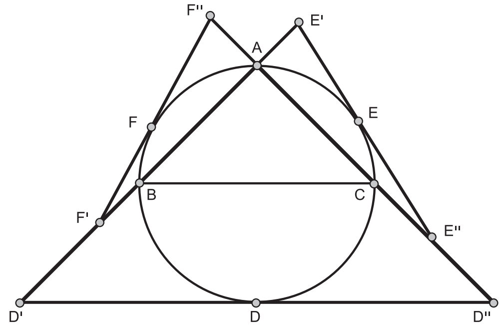
4. Considérer un tournoi composé de $2n+1$ équipes. Chaque équipe rencontre les autres équipes exactement une fois. On dit que trois équipes X, Y et Z forment un *triplet cyclique* si X défait Y, Y défait Z, et Z défait X. Il y a aucune égalité.

(a) Déterminer le nombre minimum de triplets cycliques possibles.

(b) Déterminer le nombre maximum de triplets cycliques possibles.

5. Les sommets d'un triangle rectangle ABC inscrit dans un cercle divisent la circonférence du cercle en trois arcs. L'angle droit du triangle est en A, alors l'arc opposé BC est un demi-cercle tandis que les arcs AB et AC sont supplémentaires. Pour chaque arc, on trace une tangente de sorte que son point de tangence est le point milieu du segment de droite défini par les intersections de la tangente avec l'extension des segments de droite AB et AC. Plus précisement, le point D sur l'arc BC est le point-milieu du segment de droite $D'D''$ où D' et D'' sont les intersections de la tangente à D avec les droites AB et AC, respectivement. Pareillement pour le point E sur l'arc AC et pour F sur l'arc AB.

Démontrer que le triangle DEF est équilatérale.



38e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi, 29 mars, 2006

Solutions aux problèmes 2006 de OMC

1. Soit $f(n,k)$ le nombre de façons de distribuer k biscuits à n enfants de sorte que chaque enfant reçoive au plus 2 biscuits. Par exemple, si $n=3$, alors $f(3,7)=0$, $f(3,6)=1$ et $f(3,4)=6$.

Déterminer la valeur de

$$f(2006,1)+f(2006,4)+f(2006,7)+\cdots+f(2006,1000)+f(2006,1003)\ .$$

Commentaire. Malheuresement, il avait une erreur dans l'énoncé de ce problème. Il était prévu que la somme continuait jusqu'à $f(2006,4012)$.

Solution 1. Le nombre de façons de distribuer k biscuits à 2006 enfants est égal au nombre de façons de distribuer 0 biscuit à un enfant particulier et k au reste, plus le nombre de façons de distribuer 1 biscuit à l'enfant particulier et $k-1$ au reste, plus le nombre de façons de distribuer 2 biscuits à l'enfant particulier et $k-2$ au reste. Ainsi, $f(2006,k)=f(2005,k)+f(2005,k-1)+f(2005,k-2)$, d'où la somme demandée est

$$1+\sum_{k=1}^{1003} f(2005,k)\ .$$

Dans l'évaluation de $f(n,k)$, supposons qu'il y a r enfants qui reçoivent 2 biscuits ; ces r enfants peuvent être choisis de $\binom{n}{r}$ façons. Alors il y a $k-2r$ biscuits desquels au plus un est donné pour chacun des $n-r$ enfants. Par conséquent,

$$f(n,k)=\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-2r}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-2r}\ ,$$

avec $\binom{x}{y}=0$ si $x<y$ et si $y<0$. La réponse est

$$\sum_{k=0}^{1003}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2005}{r}\binom{2005-r}{k-2r}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2005}{r}\sum_{k=0}^{1003}\binom{2005-r}{k-2r}\ .$$

Solution 2. Le nombre cherché est la somme des coefficients des termes dont les degrés n'excédent pas 1003 dans l'expansion de $(1+x+x^2)^{2005}$, qui est égal au coefficient de x^{1003} dans l'expansion de

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{2005}(1+x+\cdots+x^{1003}) &= [(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2005}](1-x^{1004})(1-x)^{-1}\\ &= (1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006}-(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006}x^{1004}\ .\end{aligned}$$

Comme le degré de chaque terme dans l'expansion du deuxième membre du côté droit excède 1003, on cherche alors le coefficient de x^{1003} dans l'expansion du premier membre:

$$(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006} = \sum_{i=0}^{2005}(-1)^i\binom{2005}{i}x^{3i}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-2006}{j}x^j$$

1

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{2005}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{2005}{i}\binom{2005+j}{j}x^{3i+j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2005}(-1)^i\binom{2005}{i}\binom{2005+k-3i}{2005}\right)x^k \ .
\end{aligned}
$$

Le nombre cherché est alors

$$\sum_{i=1}^{334}(-1)^i\binom{2005}{i}\binom{3008-3i}{2005} = \sum_{i=1}^{334}(-1)^i\frac{(3008-3i)!}{i!(2005-i)!(1003-3i)!} \ .$$

(Noter que $\binom{3008-3i}{2005} = 0$ lorsque $i \geq 335$.)

2. Soit ABC un triangle acutangle (triangle dont les angles sont aigus). Inscrire un rectangle $DEFG$ dans ce triangle de sorte que D est sur AB, E est sur AC et F et G sont sur BC. Décrire le lieu des points d'intersection des diagonales de tous les rectangles $DEFG$ possibles (c'est-à-dire décrire la courbe occupée par ces points).

Solution. Le lieu cherché est le segment de droite joignant le point milieu M de BC au point milieu K de la hauteur AH. Remarquer qu'un segment de droite DE avec D sur AB et E sur AC détermine un rectangle inscrit; le point milieu F de DE est sur la médiane AM, tandis que le point milieu de la perpendiculaire à BC issue de F est le centre du rectangle. Celui-ci est sur la médiane MK du triangle AMH.

Réciproquement, n'importe quel point P sur MK est le centre d'un triangle ayant une base sur BC et dont la hauteur est égale au double de la distance du point K à BC.

3. Dans un arrangement rectangulaire de nombres réels non négatifs à m lignes et n colonnes, chaque ligne et chaque colonne contient au moins un élément positif. De plus, si l'intersection d'une ligne et d'une colonne est un élément positif, alors la somme de leurs éléments est la même. Démontrer que $m = n$.

Solution 1. Considérons tout d'abord le cas où toutes les lignes possèdent la même somme positive s; ceci comprend la situation particulière où $m = 1$. Alors chaque colonne ayant un élément positif en commun avec une autre ligne doit avoir aussi une somme égale à s. Par conséquent, la somme de toutes les entrées dans la matrice est $ms = ns$, d'où $m = n$.

On montre le cas général par induction sur m. Le cas $m = 1$ étant déjà réglé. Supposons qu'on a un tableau $m \times n$ dont les lignes n'ont pas toutes la même somme. Soit $r < m$ le nombre des lignes qui ont la même somme s, et chacune des autres lignes a une somme différente. Alors chaque colonne partageant une entrée positive avec une de ces lignes doit aussi avoir s comme somme. Supposons qu'il y a c colonnes avec une somme s. La situation est essentiellement inchangée si on permute les lignes et puis les colonnes de sorte que les premières r lignes et les premières c colonnes aient s comme somme. Puisque toutes les entrées qui sont dans les r premières lignes et non pas dans les c premières colonnes et toutes les entrées qui sont dans les c premières colonnes et non pas dans les r premières lignes doivent être 0, on peut partitionner le tableau en une sous-matrice de format $r \times c$ dans lequel toutes les lignes et les colonnes ont la somme s et qui satisfait l'hypothse du problme, deux sous-matrices rectangulaires formés d'entrées nulles dans le coin supérieur droit et le coin inférieur gauche et une sous-matrice de format $(m-r) \times (n-c)$ dans le coin inférieur droit qui satisfait les conditions du problème. Par l'hypothèse d'induction, on voit que $r = c$, d'où $m = n$.

Solution 2. [Y. Zhao] Dénotons par a_{ij} l'entrée de la $i$ème ligne et la $j$ième colonne du tableau, et posons $S = \{(i,j) : a_{ij} > 0\}$. Supposons que r_i est la somme de la $i$ème ligne et que c_j est la somme de la $j$ième colonne. Alors $r_i = c_j$ chaque fois que $(i,j) \in S$. On a alors

$$\sum\{\frac{a_{ij}}{r_i} : (i,j) \in S\} = \sum\{\frac{a_{ij}}{c_j} : (i,j) \in S\} \ .$$

On calcule la somme de chaque côté séparément.

$$\sum\{\frac{a_{ij}}{r_i} : (i,j) \in S\} = \sum\{\frac{a_{ij}}{r_i} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{r_i}\right)r_i = \sum_{i=1}^{m}1 = m \ .$$

$$\sum\{\frac{a_{ij}}{c_j} : (i,j) \in S\} = \sum\{\frac{a_{ij}}{c_j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{c_j}\right)c_j = \sum_{j=1}^{n}1 = n \ .$$

2

D'où $m = n$.

Commentaire. La deuxième solution peut être rendue plus claire et plus élégante en définissant $u_{ij} = a_{ij}/r_i$ pour tout (i,j). Si $a_{ij} = 0$, alors $u_{ij} = 0$. Si $a_{ij} > 0$, alors, par hypothèse, $u_{ij} = a_{ij}/c_j$, une relation qui est satisfaite pour tout (i,j). On trouve que

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1$$

pour $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$, de sorte que (u_{ij}) est un tableau de format $m \times n$ dont la somme sur chaque ligne et chaque colonne est égale à 1. Ainsi

$$m = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\right) = \sum\{u_{ij} : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{ij}\right) = n$$

(étant la somme de toutes les entrées du tableau).

4. Considérer un tournoi composé de $2n+1$ équipes. Chaque équipe rencontre les autres équipes exactement une fois. On dit que trois équipes X, Y et Z forment un *triplet cyclique* si X défait Y, Y défait Z, et Z défait X. Il y a aucune égalité.

(a) Déterminer le nombre minimum de triplets cycliques possibles.

(b) Déterminer le nombre maximum de triplets cycliques possibles.

Solution 1. (a) Le minimum est 0, ce qui est réalisé par un tournoi dans lequel l'équipe T_i défait l'équipe T_j si et seulement si $i > j$.

(b) N'importe quel ensemble de trois équipes constitue soit un triplet cyclique soit un "triplet dominé" dans lequel un équipe défait les deux autres; dénotons par c le nombre des triplets cycliques et par d celui des triplets dominés. Alors $c + d = \binom{2n+1}{3}$. Supposons que l'équipe T_i défait x_i autres équipes; alors il est l'équipe gagnant dans exactement $\binom{x_i}{2}$ triplets dominés. Remarquer que $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i = \binom{2n+1}{2}$, le nombre total des jeux. Alors

$$d = \sum_{i=1}^{2n+1}\binom{x_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 - \frac{1}{2}\binom{2n+1}{2} .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(2n+1)\sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2 \ge (\sum_{i=1}^{2n+1} x_i)^2 = n^2(2n+1)^2$, d'où

$$c = \binom{2n+1}{3} - \sum_{i=1}^{2n+1}\binom{x_i}{2} \le \binom{2n+1}{3} - \frac{n^2(2n+1)}{2} + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Pour trouver la borne supérieure, supposons que les équipes sont $T_1 = T_{2n+2}$, $T_2 = T_{2n+3}$, $\cdots$, $T_i = T_{2n+1+i}$, $\cdots$, $T_{2n+1} = T_{4n+2}$. Pour chaque i, supposons que l'équipe T_i défait $T_{i+1}, T_{i+2}, \cdots, T_{i+n}$ et perd à $T_{i+n+1}, \cdots, T_{i+2n}$. On doit vérifier que c'est une attribution cohérente des victoires et des pertes, puisque le résultat pour chaque paire d'équipes est défini deux fois. On peut voir ceci en remarquant que $(2n+1+i) - (i+j) = 2n+1-j \ge n+1$ for $1 \le j \le n$. Les triplets cycliques sont: $(T_i, T_{i+j}, T_{i+j+k})$ où $1 \le j \le n$ et $(2n+1+i) - (i+j+k) \le n$, *i.e.*, lorsque $1 \le j \le n$ et $n+1-j \le k \le n$. Pour tout i, ceci donne $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ triplets cycliques. Lorsqu'on couvre toutes les valeurs de i, chaque triplet cyclique est compté trois fois, d'où le nombre de triplets cycliques est

$$\frac{2n+1}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Solution 2. [S. Eastwood] (b) Soit t le nombre de triplets cycliques et u celui de triplets ordonnés d'équipes (X, Y, Z) où X défait Y et Y défait Z. Chaque triplet cyclique produit trois triplets ordonnés tandis que les autres triplets en produisent exactement un. Le nombre total de triplets est

$$\binom{2n+1}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3} .$$

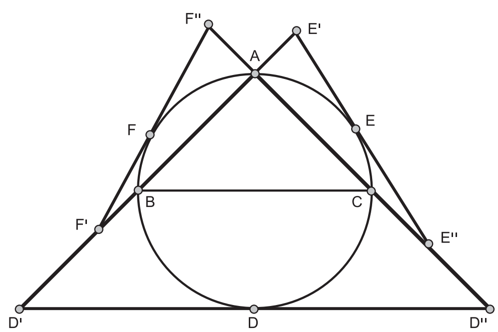
Le nombre de triplets non-cycliques est
$$\frac{n(4n^2-1)}{3} - t \;.$$
Alors
$$u = 3t + \left(\frac{n(4n^2-1)}{3} - t\right) \Longrightarrow$$
$$t = \frac{3u - n(4n^2-1)}{6} = \frac{u-(2n+1)n^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;.$$

Si l'équipe Y défait a équipes et perd contre b autres, alors le nombre de triplets ordonnés ayant Y comme composante centrale est ab. Comme $a+b=2n$, on a $ab \leq n2$ par l'inégalité des moyennes arithmético-géométriques. D'où $u \leq (2n+1)n2$ et par conséquent
$$t \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;.$$
Le maximum est atteint quand $u = (2n+1)n2$, ce qui peut se produire lorsqu'on arrange touts les équipes en cercle avec chaque équipe défiant exactement les n équipes dans le sens horaire.

Commentaire. Le fait que le maximum est $\sum_{i=1}^{n} i^2$ est assez intéressant; exsite-t-il un argument clair qui donne la réponse sous cette forme?

5. Les sommets d'un triangle rectangle ABC inscrit dans un cercle divisent la circonférence du cercle en trois arcs. L'angle droit du triangle est en A, alors l'arc opposé BC est un demi-cercle tandis que les arcs AB et AC sont supplémentaires. Pour chaque arc, on trace une tangente de sorte que son point de tangence est le point milieu du segment de droite défini par les intersections de la tangente avec l'extension des segments de droite AB et AC. Plus précisement, le point D sur l'arc BC est le point-milieu du segment de droite $D'D''$ où D' et D'' sont les intersections de la tangente à D avec les droites AB et AC, respectivement. Pareillement pour le point E sur l'arc AC et pour F sur l'arc AB.

Démontrer que le triangle DEF est équilatérale.



Solution 1. Un prime indique le point d'intersection d'une tangente avec AB et un double prime indique le point où cette tangente rencontre AC. On sait que $DD' = DD''$, $EE' = EE''$ et $FF' = FF''$. On doit montrer que l'arc EF est le tier de la circonférence ainsi que l'arc DBF.

AF est la médiane à l'hypothèse du triangle rectangle $AF'F''$, de sorte que $FF' = FA$ et alors
$$\text{arc } AF = 2\angle F''FA = 2(\angle FF'A + \angle FAF') = 4\angle FAF' = 4\angle FAB = 2 \text{ arc } BF \;,$$
ainsi arc $FA = (2/3)$ arc BFA. De même, arc $AE = (2/3)$ arc AEC. Par conséquent, arc FE est 2/3 du demi-cercle, ou 1/3 de la circonférence comme demandé.

Tant qu'à l'arc DBF, arc $BD = 2\angle BAD = \angle BAD + \angle BD'D = \angle ADD'' = (1/2)$ arc ACD. Mais, arc $BF = (1/2)$ arc AF, donc arc $DBF = (1/2)$ arc $FAED$. Alors, arc DBF est 1/3 de la circonférence et la preuve est complète.

Solution 2. Comme $AE'E''$ est un triangle rectangle, $AE = EE' = EE''$ d'où $\angle CAE = \angle CE''E$. De plus, $AD = D'D = DD''$, donc $\angle CDD'' = \angle CAD = \angle CD''D$. Comme $EADC$ est un quadrilatère cyclique,

$$\begin{aligned}
180^\circ &= \angle EAD + \angle ECD \\
&= \angle DAC + \angle CAE + \angle ECA + \angle ACD \\
&= \angle DAC + \angle CAE + \angle CEE'' + \angle CE''E + \angle CDD'' + \angle CD''D \\
&= \angle DAC + \angle CAE + \angle CAE + \angle CAE + \angle CAD + \angle CAD \\
&= 3(\angle DAC + \angle DAE) = 3(\angle DAE)
\end{aligned}$$

Alors $\angle DFE = \angle DAE = 60^\circ$. De même, $\angle DEF = 60^\circ$. Ceci implique que le triangle DEF is équilatérale.

RAPPORT DES CORRECTEURS

Le Comité de notation était composé d'Ed Barbeau, de Robert Barrington Leigh, de Man-Duen Choi, de Felix Recio, de Jacob Tsimerman et d'Ed Wang. Chaque question a été notée par deux personnes et, dans le cas des élèves qui se sont classés dans le quartile supérieur, la note obtenue a été vérifiée par une troisième personne. Les cahiers d'examen des élèves ayant obtenu les meilleurs résultats ont été révisés par l'ensemble des membres du Comité afin de s'entendre sur le classement. Étonnamment et malheureusement, une erreur s'était glissée dans le premier problème et ni les membres du Comité, ni le validateur ne l'avait relevée. D'où vient l'erreur? L'effet psychologique du travail en groupe peut-être… Quoi qu'il en soit, le président du Comité regrette beaucoup cette aberration. En conséquence, l'on a accordé 5 points quand l'élève a pu fournir une explication soigneuse pour décrire comment il était arrivé à une somme bien fondée. On a accordé 6 points à un élève qui a produit une solution particulièrement élégante. À noter que les autres questions ont été notées sur un maximum de 7 points. Pour le classement, les meilleurs cahiers d'examen ont été évalués en incluant, puis en excluant la question 1. Dans le cas des trois meilleurs cahiers, cela n'a heureusement rien changé. En ce qui concerne les mentions honorables cependant, cela a affecté certains classements.

Quatre-vingt-un élèves s'étaient inscrits pour participer à l'Olympiade mathématique du Canada. Deux n'ont pas soumis de cahiers d'examen. Le premier se trouvait à l'étranger et était trop occupé pour prendre part au concours. Le deuxième, ayant à se présenter à un autre examen le même jour, a participé, mais décidé de ne pas soumettre son cahier.

Les notes accordées pour chaque problème sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Points	**Prob. 1**	**Prob. 2**	**Prob. 3**	**Prob. 4**	**Prob. 5**
7	0	31	5	2	8
6	1	11	1	0	0
5	8	5	1	0	1
4	3	1	2	2	1
3	13	3	5	13	1
2	16	12	9	41	2
1	21	4	15	1	3
0	5	8	27	7	25
--	12	4	14	13	38

Problème 1. Les élèves pouvaient obtenir 2 points en indiquant, avec une justification appropriée, le nombre correct de façons de distribuer 1 et 4 biscuits. Pour obtenir 5 points, ils devaient cependant fournir une somme correcte, soit sous une forme fermée dans laquelle les limites de leur opération étaient clairement indiquées ou en forme développée accompagnée d'une description de leur raisonnement. Plusieurs ont donné une réponse sans aucune forme de justification et d'autres ont fait des erreurs dans les indices. Ce problème montre à quel point il est important pour les participants de justifier les formules utilisées et de donner autant d'éléments de la solution que possible, même s'ils ne peuvent, ou pensent ne pouvoir, résoudre le problème. On a reconnu le mérite de ceux qui ont repéré la relation $f(2006, k) = f(2005, k) + f(2005, k - 1) + f(2005, k - 2)$, laquelle était un élément important du problème et un outil pour en simplifier la formulation.

2. Pour la plupart des élèves, il s'agissait de la question la moins compliquée de l'examen et, en général, ils se sont servis de la géométrie analytique pour résoudre le problème. Cependant, à la lumière des solutions proposées, il appert que bon nombre d'entre eux maîtrisent mal cette méthode. Certains ont soumis des solutions qui faisaient une utilisation excessive d'indices inférieurs. En outre, beaucoup d'élèves n'ont pas pris soin d'indiquer avec précision dans quelle partie de la ligne droite se trouvait le lieu.

3. Bien que de nombreux élèves avaient une certaine idée de la façon de procéder, ils se sont rapidement embourbés. Plusieurs ont commencé par examiner une entrée positive dans une ligne, pour passer aux colonnes affectées, puis les lignes associées à ses colonnes, et ainsi de suite, et ont sombré dans une spirale de conséquences qu'ils n'ont pu contrôler. La façon de contourner l'impasse était d'essayer de définir d'emblée le résultat final de la spirale, soit en examinant l'ensemble des lignes et des colonnes qui avaient en commun une somme particulière, ou, comme l'a fait un élève, en examinant un bloc minimum d'entrées de l'arrangement, qui contenait, avec chaque entrée non nulle, toutes les entrées non nulles appartenant à la même ligne ou colonne, ce qui lui a permis d'établir les bases d'un argument par induction. Plusieurs élèves ont tenté de résoudre le problème en s'appuyant sur des hypothèses erronées. Ils ont postulé, par exemple, que l'on pouvait réarranger les lignes et les colonnes pour créer une situation, dans le cas $m < n$, où l'on obtenait une sous-matrice $m \times m$ ayant une diagonale d'entrées non nulles, les autres entrées étant nulles. Cependant, l'argument très élégant (Solution 2) proposé par Yufei Zhao permettait d'éliminer le besoin d'un raisonnement compliqué et la possibilité de confusion. Cette solution devrait être étudiée par les élèves afin de voir si elle permettrait de résoudre d'autres problèmes.

4. Beaucoup d'élèves ont réussi la partie facile (a) du problème, pour laquelle on attribuait deux points, mais peu ont progressé plus loin. Néanmoins, certaines des bonnes solutions proposées pour la partie (b) étaient fort élégantes, car elles s'appuyaient sur un comptage des triplets cycliques et non cycliques (comme dans les solutions officielles). Certains élèves ont tenté d'aborder le problème en utilisant un argument par induction, mais ils se sont fourvoyés en ajoutant une paire additionnelle d'équipes. Personne n'a réussi en utilisant cette approche.

5. Ce problème a posé moins de difficulté que prévu. En effet, de nombreux élèves ont associé ensemble les angles inscrits dans un cercle sous-tendu par la même corde, identifié l'angle extérieur d'un triangle avec la somme des triangles intérieur et opposés et assimilé l'angle entre la tangente et la corde à l'angle sous-tendu par la corde. Certains élèves se sont trop appuyés sur la symétrie pour leur argumentation. En effet, l'on pouvait arguer que, l'angle DEF étant égal à 60 degrés, sa valeur était la même que celle de l'angle DFE, mais il fallait néanmoins traiter l'angle EDF différemment. Quelques élèves ont mal interprété le diagramme et ont pensé que BC était parallèle à D'D'' ou présumé l'existence d'un autre facteur fondé sur l'hypothèse que le triangle ABC était isocèle.