Rapport et résultats de la 37ième Olympiade mathématique du Canada 2005

Outre la Financière Sun Life, notre commanditaire principal, et l'Université de Winnipeg, la Société mathématique du Canada remercie chaleureusement les commanditaires suivants de leur appui :

Nelson Thomson Learning
John Wiley and Sons Canada Ltd.
McGraw Hill Ryerson
Maplesoft
A.K. Peters, Ltd.

Ministère de l'Éducation de l'Alberta
Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick
Ministère de l'Éducation de Terre-Neuve-et-Labrador
Ministère de l'Éducation des Territoires du Nord-Ouest
Ministère de l'Éducation de la Nouvelle-Écosse
Ministère de l'Éducation de l'Ontario
Ministère de l'Éducation du Québec
Ministère de l'Éducation de la Saskatchewan

Université de la Colombie-Britannique
Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton
Université d'Ottawa
Université de Toronto
Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo

L'Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l'Olympiade mathématique du Canada (Comité de l'OMC), qui relève du Comité des concours mathématiques. Instituée en 1969, l'OMC offre aux élèves qui se sont illustrés dans les concours provinciaux de mathématiques une occasion de concourir sur la scène nationale. Elle sert en outre d'épreuve préparatoire aux élèves canadiens qui participent à l'Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Se qualifient pour l'OMC les élèves qui obtiennent une note suffisamment élevée au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) ou qui sont désignés par un coordonnateur provincial.

La Société remercie la Sun Life du Canada, compagnie d'assurance-vie, commanditaire principal de l'Olympiade mathématique du Canada 2005 et les autres commanditaires, dont : les ministères de l'Éducation de l'Ontario, du Québec, de l'Alberta, du Nouveau-Brunswick, de Terre-Neuve-et-Labrador, des Territoires du Nord-Ouest et de la Saskatchewan; le Département de mathématiques et de statistique, Université de Winnipeg; le Département de mathématiques et de statistique, Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton; le Centre d'éducation en mathématiques et en statistique, Université de Waterloo; le Département de mathématiques et de statistique, Université d'Ottawa; le Département de mathématiques, Université de Toronto; le Département de mathématiques, Université de la Colombie-Britannique; Nelson Thompson Learning; John Wiley and Sons Canada Ltd; A.K. Peters et Maplesoft.

Les coordinateurs provinciaux de l'OMC sont Peter Crippin (Université de Waterloo, ON); John Denton (Collège Dawson, QC); Diane Dowling (Université du Manitoba); Harvey Gerber (Université Simon Fraser, BC); Gareth J. Griffith (Université de la Saskatchewan); Jacques Labelle (Université du Québec à Montréal); Peter Minev (Université de l'Alberta); Gordon MacDonald (Université de l'Île-du-Prince-Édouard); Roman Mureika (Université du Nouveau-Brunswick); Thérèse Ouellet (Université de Montréal, QC) et Donald Rideout (Université Memorial, TNL).

Je tiens à remercier sincèrement les membres du sous-comité de l'OMC qui ont participé à l'élaboration ou à la correction de l'examen : Jeff Babb (Université de Winnipeg); Robert Craigen (Université du Manitoba); James Currie (Université de Winnipeg); Robert Dawson (Université St. Mary's); Chris Fisher (Université de Regina); Rolland Gaudet (Collège universitaire de Saint-Boniface); J. P. Grossman; D. E. Shaw Research and Development; Richard Hoshino (Université Dalhousie); Kirill Kopotun (Université du Manitoba); Ortrud Oellermann (Université de Winnipeg); Felix Recio (Université de Toronto); Naoki Sato (William M. Mercer); Anna Stokke (Université de Winnipeg); Ross Stokke (Université de Winnipeg); Daryl Tingley (Université du Nouveau-Brunswick).

Merci aussi à Václav Linek, Charlene Pawluk et Mark Stinner de l'Université de Winnipeg, ainsi que Michelle Davidson de l'Université du Manitoba, pour leur aide à la correction. Merci également à Rolland Gaudet pour la traduction française de l'examen et du corrigé, et à Matthieu Dufour (Université du Québec à Montréal) pour la révision de nombreux documents en français. Merci aussi au Comité des concours mathématiques de la SMC et à son président George Bluman (Université de la Colombie-Britannique) de leur appui. Un projet de cette envergure ne peut se réaliser sans aide du point de vue administratif, et je remercie à ce chapitre Nathalie Blanchard du bureau administratif de la SMC et Julie Beaver du département de mathématiques et de statistique de l'Université de Winnipeg de leur aide inestimable. Enfin, j'aimerais remercier tout particulièrement Graham Wright, directeur administratif de la SMC, qui a supervisé l'organisation du concours de cette année et qui a fourni une bonne dose de soutien et d'encouragement. Son appui indéfectible à l'OMC compte pour beaucoup dans le succès que remporte ce concours.

Terry Visentin, président

Comité de l'Olympiade mathématique du Canada

La 37e Olympiade mathématique du Canada (2005) s'est tenue le mercredi 30 mars 2005. Un total de 75 élèves de 48 écoles de huit provinces canadiennes ont participé au concours. L'un des élèves canadiens a passé l'épreuve à partir de Singapour. Voici la répartition provinciale des concurrents :

CB(8) AB(10) SK(1) MB(3) ON(47) QC(3) NB(1) IPÉ(1)

L'OMC 2005 comportait cinq questions valant 7 points chacune, pour un total maximal de m=35. Les concurrents se répartissent en quatre divisions selon les résultats obtenus.

Division	Fourchette	Nb. d'étudiant
I	$24 \leq m < 35$	10
II	$18 \leq m < 24$	15
III	$14 \leq m < 18$	19
IV	$0 \leq m < 14$	31

PREMIER PRIX — Coupe La Financière Sun Life — 2,000 $
Peng Shi
Sir John A. MacDonald Collegiate Institute, Agincourt (Ontario)

DEUXIÈME PRIX — 1,500 $
Richard Peng
Vaughan Road Academy, Toronto (Ontario)

TROISIÈME PRIX — 1,000 $
Yufei Zhao
Don Mills Collegiate Institute, Don Mills (Ontario)

MENTIONS HONORABLES — 500 $

Boris Braverman
Sir Winston Churchill High School, Calgary (Alberta)

Elyot Grant
Cameron Heights Collegiate Institute, Kitchener (Ontario)

Zheng Guo
Western Canada High School, Calgary (Alberta)

Oleg Ivrii
Don Mills Collegiate Institute, Don Mills (Ontario)

Lin Fei
Don Mills Collegiate Institute, Don Mills (Ontario)

Dong Uk (David) Rhee
McNally School, Edmonton (Alberta)

Shaun White
Vincent Massey Secondary School, Windsor (Ontario)

Division 2

$18 \leq m < 24$

Farzin Barekat	Sutherland Secondary School	BC
Rongtao Dan	Point Grey Secondary School	BC
Bo Hong Deng	Jarvis Collegiate Institute	ON
William Fu	A.Y. Jackson Secondary School	ON
Kent Huynh	University of Toronto Schools	ON
Aidin Kashigar	Sir Frederick Banting Secondary School	ON
Viktoriya Krakovna	Vaughan Road Academy	ON
William Ma	Waterloo Collegiate Institute	ON
Jennifer Park	Bluevale Collegiate Institute	ON
Karol Przybytkowski	Marianopolis College	QC
Luke Schaeffer	Centennial C. & V.I.	ON
Geoffrey Siu	London Central Secondary School	ON
Alex Wice	Leaside High School	ON
Brian Yu	Old Scona Academic High School	AB
Allen Zhang	St. George's School	BC

Division 3

$14 \leq m < 18$

Eunse Chang	Don Mills Collegiate Institute	ON
Yiru Chen	Semiahmoo Secondary School	BC
Francis Chung	A.B. Lucas Secondary School	ON
Shawn C. Eastwood	Canadian International School (Singapoor)	CA
Weixi Fan	Dover Bay Secondary School	BC
Mostafa Fatehi	Colonel Gray Senior High School	PEI
Yingfen Huang	The Woodlands School	ON
Kevin Lam	St. John's-Ravenscourt School	MB
Taotao Liu	Vincent Massey Secondary School	ON
Nick Murdoch	London Central Secondary School	ON
Chuanming Qi	Jarvis Collegiate Institute	ON
Roman Shapiro	Vincent Massey Secondary School	ON
Jimmy Shen	Vincent Massey Secondary School	ON
Sarah Sun	Holy Trinity Academy	AB
Ruiqing Wang	Vanier College	QC
Malka Wrigley	Old Scona Academic High School	AB
Wenxin Xu	Don Mills Collegiate Institute	ON
Qi Yao	Glenforest Secondary School	ON
Vivian Zhang	Bayview Secondary School	ON

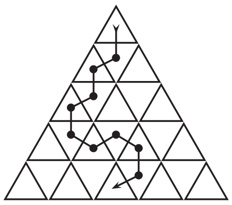
Division 4

$0 \leq m < 14$

Larry Chang	Seaquam Secondary School	BC
Harry Chang	A.B. Lucas Secondary School	ON
Chan Ching Chen	St. George's School	BC
Dmitri Dziabenko	Don Mills Collegiate Institute	ON
Dong (Polly) Han	Western Canada High School	AB
Ari Jeon	North Toronto Collegiate Institute	ON
Sha Jin	York Mills Collegiate Institute	ON
Ying Li	Lisgar Collegiate Institute	ON
Chen Li	Fredericton High School	NB
Ye Qing Lin	Earl Of March Secondary School	ON
Elliot Lipnowski	St. John's-Ravenscourt School	MB
Shengyan Liu	Martingrove Collegiate Institute	ON
Yuchen Mu	St. John's-Ravenscourt School	MB
Yongho Park	Richmond Hill High School	ON
Alex Qi	Waterloo Collegiate Institute	ON
Difu Shi	Glebe Collegiate Institute	ON
Hunter Song	A.Y. Jackson Secondary School	ON
Chen Sun	Tom Griffiths Home School	ON
Jia Xi Sun	Walter Murray Collegiate Institute	SK
Eric Tran	Western Canada High School	AB
Kuan Chieh Tseng	Yale Secondary School	BC
Jenny Wang	Don Mills Collegiate Institute	ON
David Wang	London Central Secondary School	ON
Frederic Weigand Warr	College Jean-De-Brebeuf	QC
Steven Wu	A.Y. Jackson Secondary School	ON
Xiaodi Wu	University of Toronto Schools	ON
Rui Xue	Martingrove Collegiate Institute	ON
Yiyi Yang	Western Canada High School	AB
Johnny Zhang	William Lyon Mackenzie C.I.	ON
Ken Zhang	Western Canada High School	AB
Ryan Zhou	Adam Scott Collegiate Vocational Institute	ON

37ième Olympiade mathématique du Canada
30 mars 2005

1. Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n, divisé en triangles unitaires tel qu'illustré. Soit $f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune et que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure). Un tel chemin est illustré ci-après avec $n = 5$. Déterminer la valeur de $f(2005)$.



2. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien, *i.e.* un triplet d'entiers positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

   a) Démontrer que $(c/a + c/b)^2 > 8$.

   b) Démontrer qu'il n'existe aucun entier n pour lequel il existe un triplet pythagoricien (a, b, c) satisfaisant $(c/a + c/b)^2 = n$.

3. Soit S un ensemble de $n \geq 3$ points l'intérieur d'un cercle.

   a) Démontrer qu'il existe trois points distincts $a, b, c \in S$ et trois points distincts A, B, C sur le cercle, tels que a est (strictement) plus près de A que tout autre point dans S, que b est (strictement) plus près de B que tout autre point dans S et que c est (strictement) plus près de C que tout autre point dans S.

   b) Montrer que pour aucune valeur de n on ne peut garantir l'existence de quatre tels points (et les points correspondants sur le cercle).

4. Soit ABC un triangle de rayon circonscrit R, de périmètre P et de surface K. Déterminer la valeur maximale de KP/R^3.

5. Un triplet ordonné d'entiers positifs (a, b, c) est dit *n-puissant* si $a \leq b \leq c$, $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, et $a^n + b^n + c^n$ est divisible par $a + b + c$. Par exemple, $(1, 2, 2)$ est 5-puissant.

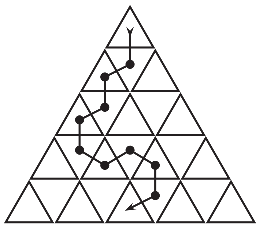
   a) Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont n-puissants pour tout $n \geq 1$.

   b) Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont 2004-puissants et 2005-puissants mais pas 2007-puissants.

   [Noter que $\text{pgcd}(a, b, c)$ est le plus grand commun diviseur de a, b et c.]

Solution de l'Olympiade Mathématique du Canada 2005

1. Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n, divisé en triangles unitaires tel qu'illustré. Soit $f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune et que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure). Un tel chemin est illustré ci-après avec $n = 5$. Déterminer la valeur de $f(2005)$.



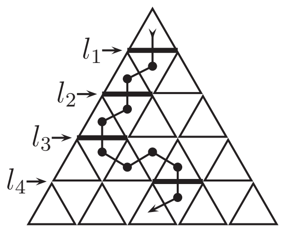
Solution

Nous allons montrer que $f(n) = (n-1)!$.

Étiqueter selon l_1, l_2, ... les segments horizontaux du triangle, tel quillustré ci-bas.

Puisque le chemin allant du triangle de la rangée du haut jusqu'à la rangée du bas ne se déplace jamais vers le haut, ce chemin doit traverser chacune de $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ exactement une seule fois. Les lignes diagonales du triangle divisent l_k en k segments unitaires, et le chemin doit traverser exactement un de ces k segments, ceci pour chaque k. (Au schéma qui suit, on a indiqué en gras ces segments sélectionnés.) Le chemin est entièrement défini par cet ensemble de $n-1$ segments où le chemin va du haut vers le bas. Allant de la rangée k à la rangée $k+1$, il y a k segments possibles où le chemin va traverser l_k. Ainsi, il y a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$ façons de traverser les $n-1$ lignes horizontales, chacune d'entre elles correspondant à un chemin unique, d'où $f(n) = (n-1)!$.

Ainsi $f(2005) = (2004)!$.



2. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien, *i.e.* un triplet d'entiers positifs tels que $a^2+b^2 = c^2$.

   a) Démontrer que $(c/a + c/b)^2 > 8$.

   b) Démontrer qu'il n'existe aucun entier n pour lequel il existe un triplet pythagoricien (a, b, c) satisfaisant $(c/a + c/b)^2 = n$.

a) **Solution 1**

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien. Envisager a et b comme longueurs d'un triangle rectangle dont l'hypotenuse est c; soit θ l'angle déterminé par les cotés de longueurs a et c. Alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}\\ &= 4\left(\frac{1+\sin 2\theta}{\sin^2 2\theta}\right) = \frac{4}{\sin^2 2\theta}+\frac{4}{\sin 2\theta}\end{aligned}$$

Puisque $0 < \theta < 90°$, on a $0 < \sin 2\theta \leq 1$, avec égalité si et seulement si $\theta = 45°$. Mais alors $a = b$, puis $\sqrt{2} = c/a$, contredisant le fait que a et c sont tous deux entiers. Ainsi, $0 < \sin 2\theta < 1$, d'où $(c/a + c/b)^2 > 8$.

Solution 2

Définissant θ comme dans la solution 1, nous avons $c/a + c/b = \sec\theta + \csc\theta$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, nous avons alors $(\sec\theta+\csc\theta)/2 \geq \sqrt{\sec\theta\csc\theta}$. Ainsi

$$c/a + c/b \geq \frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Puisque a, b et c sont entiers, nous avons $c/a+c/b > 2\sqrt{2}$, donnant $(c/a+c/b)^2 > 8$.

Solution 3

Par simplification et l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2 = c^2\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{a^2b^2} \geq \frac{2\sqrt{a^2b^2}\,(2\sqrt{ab})^2}{a^2b^2} = 8,$$

avec égalité si et seulement si $a = b$. Par le même argument que dans la Solution 1, a ne peut pas égaler b, d'où l'inégalité est stricte.

Solution 4

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2 &= \frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{2c^2}{ab} = 1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+1+\frac{2(a^2+b^2)}{ab}\\ &= 2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+2+\frac{2}{ab}\Big((a-b)^2+2ab\Big)\\ &= 4+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{2(a-b)^2}{ab}+4 \geq 8,\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a = b$, qui ne peut pas avoir lieu, comme vu ci-haut.

b) **Solution 1**

Puisque $c/a + c/b$ est rationnel, $(c/a + c/b)^2$ ne peut être entier que si $c/a + c/b$ est entier. Supposons que $c/a + c/b = m$ entier. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. (Autrement, on peut enlever le facteur commun de (a, b, c), laissant m inchangé.)

Puisque $c(a + b) = mab$ et que $\text{pgcd}(a, a + b) = 1$, a doit diviser c, donnant $c = ak$. Ainsi $a^2 + b^2 = a^2k^2$, d'où $b^2 = (k^2 - 1)a^2$. D'où a divise b contredisant le fait que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Il en découle que $(c/a + c/b)^2$ ne peut pas être entier.

Solution 2

On commence comme dans la Solution 1, supposant que $c/a + c/b = m$ entier, où $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Ainsi a et b ne peuvent pas être tous deux pairs. Aussi, a et b ne peuvent pas tous deux être impairs, car alors on aurait $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$, impossible puisque les carrés parfaits sont congrus à 0 ou 1 modulo 4. Ainsi, l'un de a et b est pair, l'autre est impair, et c est impair.

Or $c/a + c/b = m$ implique $c(a + b) = mab$, qui ne peut pas être vrai car $c(a + b)$ est impair et mab est pair.

3. Soit S un ensemble de $n \geq 3$ points l'intérieur d'un cercle.

   a) Démontrer qu'il existe trois points distincts $a, b, c \in S$ et trois points distincts A, B, C sur le cercle, tels que a est (strictement) plus près de A que tout autre point dans S, que b est (strictement) plus près de B que tout autre point dans S et que c est (strictement) plus près de C que tout autre point dans S.

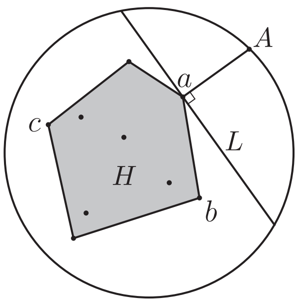
   b) Montrer que pour aucune valeur de n on ne peut garantir l'existence de quatre tels points (et les points correspondants sur le cercle).

Solution 1

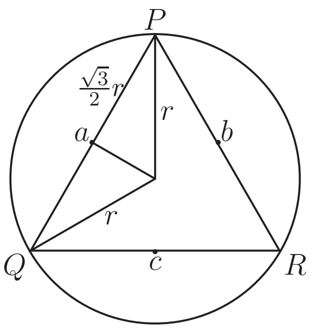
a) Soit H le plus petit ensemble convexe de points dans le plan, contenant S.[†] Prenons 3 points $a, b, c \in S$ sur la frontière de S. (Il doit toujours y avoir au moins 3, mais pas nécessairement 4, tels points.)

Puisque a est sur la frontière de l'ensemble convexe H, on peut construire une corde L telle qu'aucun couple de points de H se trouve sur des côtés opposés de L. Des deux points où la perpendiculaire à L au point a rencontre le cercle, choisir celui sur le côté de L n'incluant aucun point de H et nommer ce point A. Il est évident que A est plus près de a que de tout autre point de L ou de l'autre côté de L. Ainsi, A est plus près de a que de tout autre point de S. Les points B et C sont obtenus de façon analogue, d'où la preuve est complétée.

[Noter que cet argument tient toujours si les points de S se trouvent sur une ligne.]



(a)



(b)

b) Soit PQR un triangle équilatéral inscrit dans le cercle et soient a, b et c les mi-points des trois côtés de $\triangle PQR$. Si r est le rayon du cercle, tout point sur le cercle se trouve à une distance au plus $(\sqrt{3}/2)r$ de l'un de a, b, c. (Voir la figure (b) ci-haut.)

Or, $\sqrt{3}/2 < 9/10$. Si S consistait de a, b et c, puis un nuage de points à distance inférieure à $r/10$ du centre du cercle, il serait impossible de choisir 4 points de S et les points correspondants sur le cercle, donnant la propriété désirée.

[†]En passant, H est dit enveloppe convexe de S. Si les points de S se situent sur une droite, alors H est segment le plus court contenant les points de S. Autrement, H est un polygone dont les sommets sont ments de S, tous les autres points de S étant à l'intérieur ou sur la frontière de ce polygone.

Solution 2

a) Si tous les points de S se trouvent sur une ligne L, choisir n'importe quels 3 d'entre eux et les nommer a, b et c. Soit A un point sur le cercle, rencontrant la perpendiculaire vers L au point a. Visiblement, A est plus près de a que de tout autre point sur L, donc A est plus près de a que de tout autre point de S. On définit B et C similairement.

Autrement, choisir a, b et c dans S de façon à ce que le triangle formé par ces points ait une surface maximale. Construire l'altitude du côté bc vers le sommet a et prolonger cette ligne pour qu'elle intersecte le cercle en A. Nous affirmons que A est plus près de a que de tout autre point de S.

Supposons que non. Soit alors x un point de S dont la distance à A est inférieure à la distance de A à a. Alors la distance perpendiculaire de x à la ligne bc est supérieure à la distance perpendiculaire de a à la ligne bc. Mais alors le triangle formé par les points x, b et c a une surface supérieure à celle du triangle formé par les points a, b et c, contredisant le choix original de ces 3 points. Ainsi A est plus près de a que de tout autre point de S.

Les points B et C sont construits à l'aide des altitudes passant par b et c, respectivement.

b) Voir la Solution 1.

4. Soit ABC un triangle de rayon circonscrit R, de périmètre P et de surface K. Déterminer la valeur maximale de KP/R^3.

Solution 1

Puisque KP/R^3 est le même pour deux triangles similaires, on peut fixer $R = 1$, puis maximiser KP par rapport aux triangles inscrits dans le cercle unitaire. Fixons A et B sur le cercle unitaire. Le lieu des points C donnant un triangle de périmètre P est une ellipse qui rencontre le cercle en au plus 4 points. La surface K est maximisée, pour P fixe, lorsque C est choisi sur la bissectrice perpendiculaire de AB, d'où la valeur maximale de KP est atteinte en prenant C le point où cette bissectrice perpendiculaire rencontre le cercle. D'où la valeur maximale de KP est atteinte, pour AB fixe, lorsque le triangle ABC est isocèle. Répétant le raisonnement avec BC fixe, on obtient que le maximum est atteint lorsque ABC est un triangle équilatéral.

Considérons donc un triangle équilatéral de côté a. Il vérifie $P = 3a$. La hauteur est $a\sqrt{3}/2$, donnant $K = a^2\sqrt{3}/4$. De la loi du sinus, prolongée, on obtient $2R = a/\sin(60)$ d'où $R = a/\sqrt{3}$. Ainsi, la valeur maximale recherchée est

$$KP/R^3 = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)(3a)\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^3 = \frac{27}{4}.$$

Solution 2

De la loi du sinus, prolongée, les côtés du triangle sont $2R\sin A$, $2R\sin B$ et $2R\sin C$. Ainsi

$$P = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \text{ et } K = \frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)(\sin C),$$

d'où

$$\frac{KP}{R^3} = 4\sin A\sin B\sin C(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Nous voulons déterminer la valeur maximale de cette expression pour $A+B+C = 180°$. Or, à l'aide d'identités bien connues pour les sommes et produits de fonctions sinus, nous pouvons maintenant écrire

$$\frac{KP}{R^3} = 4\sin A\left(\frac{\cos(B-C)}{2} - \frac{\cos(B+C)}{2}\right)\left(\sin A + 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right).$$

Si on considère les termes en A comme fixes, alors $B+C$ est fixe aussi et cette expression prend sa valeur maximale lorsque $\cos(B-C)$ et $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ sont égaux, c'est-à-dire lorsque $B = C$. De façon similaire, on peut montrer que pour une valeur fixe de B, KP/R^3 est maximisée lorsque $A = C$. Ainsi, le maximum de KP/R^3 a lieu lorsque $A = B = C = 60°$. Il est maintenant aisé de substituer dans l'expression ci-haut et obtenir la valeur maximale de $27/4$.

Solution 3

Comme dans la Solution 2, nous obtenons

$$\frac{KP}{R^3} = 4 \sin A \sin B \sin C (\sin A + \sin B + \sin C).$$

Or, de l'inégalité arithmético-géométrique, nous avons

$$\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^3 ,$$

donnant

$$\frac{KP}{R^3} \leq \frac{4}{27} (\sin A + \sin B + \sin C)^4,$$

avec éqalité lorsque $\sin A = \sin B = \sin C$. Puisque la fonction sinus est concave sur l'intervalle de 0 to π, l'inégalité de Jensen donne

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \left(\frac{A + B + C}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puisque l'égalité n'a lieu que lorsque $\sin A = \sin B = \sin C$, nous concluons que la valeur maximale de KP/R^3 est $\frac{4}{27} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^4 = 27/4$.

5. Un triplet ordonné d'entiers positifs (a, b, c) est dit *n-puissant* si $a \leq b \leq c$, $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, et $a^n + b^n + c^n$ est divisible par $a + b + c$. Par exemple, $(1, 2, 2)$ est 5-puissant.

   a) Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont n-puissants pour tout $n \geq 1$.

   b) Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont 2004-puissants et 2005-puissants mais pas 2007-puissants.

   [Noter que $\text{pgcd}(a, b, c)$ est le plus grand commun diviseur de a, b et c.]

Solution 1

Soit $T_n = a^n + b^n + c^n$ et considérons le polynôme

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc.$$

Puisque $P(a) = 0$, on obtient $a^3 = (a + b + c)a^2 - (ab + ac + bc)a + abc$, d'où, par multiplication par a^{n-3}, on obtient $a^n = (a+b+c)a^{n-1} - (ab+ac+bc)a^{n-2} + (abc)a^{n-3}$. Par le même raisonnement, on obtient des expressions similaires pour b^n et c^n. Additionnant les trois égalités, il en suit que T_n satisfait la récurrence:

$$T_n = (a + b + c)T_{n-1} - (ab + ac + bc)T_{n-2} + (abc)T_{n-3}, \text{ pour } n \geq 3.$$

De ceci, il découle que si T_{n-2} et T_{n-3} sont divisibles par $a + b + c$, il en sera de même pour T_n. Ceci répond immédiatement à la partie (b), dans le sens qu'il n'existe aucun triplet ordonné qui soit 2004-puissant et 2005-puissant mais pas 2007-puissant. De plus, cette propriété réduit le nombre de cas à considérer en partie (a), car, tout triplet étant 1-puissant, tout triplet 2-puissant et 3-puissant sera n-puissant pour tout $n \geq 1$.

Posant $n = 3$ dans la récurrence ci-haut,

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)(a + b + c) + 3abc,$$

qui implique que (a, b, c) est 3-puissant si et seulement si $3abc$ est divisible par $a + b + c$. Aussi

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc),$$

d'où (a, b, c) est 2-puissant si et seulement si $2(ab + ac + bc)$ est divisible par $a + b + c$.

Supposons donc qu'un nombre premier $p \geq 5$ divise $a + b + c$. Alors p divise $3abc$ donc abc. Puisque $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, il suit que p divise exactement un de a, b, c. Mais alors p ne divise pas $2(ab + ac + bc)$.

Supposons que 3^2 divise $a + b + c$. Alors 3 divise abc, d'où 3 divise exactement un de a, b, c. Mais alors 3 ne divise pas $2(ab + ac + bc)$.

Supposons que 2^2 divides $a + b + c$. Alors 4 divise abc. Puisque $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, il suit qu'au plus un de a, b, c est pair, impliquant qu'un seul de a, b, c est divisible par 4 et que les deux autres sont impairs. Mais alors $ab + ac + bc$ est impair, ce qui empêche 4 de diviser $2(ab + ac + bc)$.

Ainsi, si (a, b, c) est 2- et 3-puissant, alors $a + b + c$ est divisible ni par 4 ni par 9 ni par un nombre premier supérieur à 3. Puisque $a + b + c$ est au moins égal à 3, il en résulte que $a + b + c$ est soit 3 soit 6. C'est maintenant simple de faire une étude de cas, pour conclure que les seuls triplets n-puissants pour tout $n \geq 1$ sont $(1, 1, 1)$ et $(1, 1, 4)$.

Solution 2

Soit p un nombre premier. Par le petit théorème de Fermat,

$$a^{p-1} \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p}, & \text{si } p \text{ ne divise pas } a; \\ 0 \pmod{p}, & \text{si } p \text{ divise } a. \end{cases}$$

Puisque $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, nous avons donc $a^{p-1} + b^{p-1} + c^{p-1} \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod{p}$. Ainsi, puisque p est un diviseur premier de $a^{p-1} + b^{p-1} + c^{p-1}$, p doit être égal à 2 ou 3. D'où, si (a, b, c) est n-puissant pour tout $n \geq 1$, les seuls diviseurs premiers possibles de $a + b + c$ sont 2 et 3.

De façon similaire, $a + b + c$ est divisible par ni 4 ni 9.

Puisque

$$a^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{4}, & \text{si } p \text{ est pair;} \\ 1 \pmod{4}, & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

et que a, b, c ne sont pas tous pairs, nous avons $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod{4}$.

Par expansion de $(3k)^3$, $(3k + 1)^3$ et $(3k + 2)^3$, nous obtenons que a^3 est congrue à 0, 1 ou -1 modulo 9. Ainsi

$$a^6 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{9}, & \text{si 3 divise } a; \\ 1 \pmod{9}, & \text{si 3 ne divise pas } a. \end{cases}$$

Puisque a, b, c ne sont pas tous divisibles par 3, nous avons donc que $a^6 + b^6 + c^6 \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod{9}$.

Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas divisible par 4 et $a^6 + b^6 + c^6$ n'est pas divisible par 9.

D'où, si (a, b, c) est n-puissant pour tout $n \geq 1$, alors $a + b + c$ est divisible par ni 4 ni 9. D'où $a + b + c$ est soit 3 soit 6.

RAPPORT DES CORRECTEURS

Chaque question valait 7 points, et chaque solution a été corrigée par deux correcteurs. Si la différence entre les deux pointages accordés était de plus d'un point, les correcteurs réévaluaient la solution jusqu'à ce qu'ils s'entendent. Si la différence était d'un seul point, ils faisaient la moyenne des deux. Le comité a ensuite repassé les meilleures épreuves pour s'assurer que le classement des gagnants était approprié.
Le tableau ci-dessous montre les points accordés à chacune des solutions, en pourcentage. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les résultats à deux décimales sont possibles, mais nous les avons arrondis aux fins du tableau. Par exemple, selon le tableau ci-dessous, 54,7 % des élèves ont obtenu 6,5 ou 7 au premier problème. C'est dire que sur 54,7 % des examens, au moins un correcteur a accordé un 7 à la question 1.

Points	**#1**	**#2**	**#3**	**#4**	**#5**
0	9.3	4.0	53.3	20.0	48.0
1	6.7	2.7	12.0	16.0	41.3
2	2.7	10.7	12.0	1.3	2.7
3	1.3	22.7	4.0	1.3	2.7
4	4.0	18.7	10.7	6.7	0.0
5	5.3	10.7	2.7	17.3	1.3
6	16.0	10.7	5.3	8.0	1.3
7	54.7	20.0	0.0	29.3	2.7

Le mode de correction adopté dès le départ est le suivant : 7 points étaient accordés à une solution entièrement correcte et 6 points à une solution essentiellement correcte, mais contenant une erreur ou une omission minime. Il fallait avoir fait de gros progrès pour mériter 3 points, et les correcteurs n'ont seulement accordé 1 ou 2 points que si l'élève avait fait une bonne part du travail. Les notes de 4 et 5 étaient réservées aux situations exceptionnelles. Il a fallu revoir légèrement cette méthode pour corriger les questions en plusieurs parties.

PROBLÈME 1
Les concurrents ont très bien réussi ce problème. Même s'il y avait quelques façons légèrement différentes de le résoudre (quelques élèves ont procédé par induction, par exemple), chaque solution consistait essentiellement à énumérer le nombre de façons possibles de faire passer le chemin d'une rangée à l'autre.

PROBLÈME 2
La plupart des élèves ont assez bien réussi ce problème et ont fait des progrès dans au moins l'une des deux parties, le plus souvent la partie a). Trois points ont été accordés pour une bonne réponse à la partie a). Il y avait de nombreuses façons de résoudre ce problème, et les quatre solutions officielles en sont un exemple représentatif. La démarche la plus courante consistait à utiliser AM-GM d'une manière semblable à la solution 3. Les correcteurs ont enlevé un point aux concurrents qui n'ont pas montré que l'inégalité était stricte. Ils ont accordé quatre points pour une bonne solution à la partie b). Là encore, il y avait plusieurs façons de procéder, mais les élèves ont éprouvé plus de difficulté à rédiger des solutions claires à cette partie du problème.

PROBLÈME 3
Ce problème s'est révélé assez difficile, et aucun élève n'a obtenu une note parfaite. Quatre points ont été accordés pour la résolution de la partie a), et trois pour la partie b). Douze élèves ont résolu b), mais quatre seulement ont proposé une preuve complète pour a). De nombreux élèves ont réalisé des progrès

partiels à la partie a) pour se rendre compte en bout de ligne que leur argument ne couvrait pas toutes les situations possibles. Cette question a été la plus difficile à corriger.

PROBLÈME 4

Les concurrents ont bien réussi ce problème de géométrie. À peu près la moitié des concurrents ont constaté que la valeur maximale était atteinte lorsque le triangle était équilatéral, mais il fallait le prouver pour obtenir tous les points. Deux élèves ont proposé des preuves géométriques semblables à celles de la solution 1. La plupart des élèves ont exprimé KP/R^3 sous forme de fonctions trigonométriques (comme dans les solutions 2, mais avec de nombreuses variations) et ont tenté de maximiser l'expression sur tous les angles possibles. Il y a plusieurs façons d'y arriver, mais il fallait prendre certaines précautions. Les solutions 2 et 3 montrent deux des meilleures méthodes.

PROBLÈME 5

Peu d'élèves ont réussi à avancer sensiblement dans la résolution de ce difficile problème. Cinq points ont été accordés pour la partie a), et deux pour la partie b). Les quatre concurrents qui ont obtenu une note élevée à cette question ont tous employé une démarche semblable à celle de la solution 1. Les correcteurs ont accordé un point aux élèves qui ont trouvé une solution par inspection.