Rapport de la 36$^{\text{ième}}$ Olympiade mathématique du Canada 2004

CMS
SMC

Financière Sun Life

The UNIVERSITY of WINNIPEG

L'Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l'OMC, un sous-comité du Comité des concours mathématiques. Créée en 1969, l'OMC a pour but d'offrir la possibilité aux élèves ayant obtenu de bons résultats à divers concours provinciaux de mathématiques de participer à une épreuve nationale. Elle sert aussi de préparation aux élèves de l'équipe canadienne qui prend part à l'Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Pour participer à l'OMC, les élèves doivent obtenir un résultat suffisamment élevé au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) ou recevoir une invitation des coordonnateurs provinciaux.

Nous remercions la Financière Sun Life de son appui à titre de commanditaire principal de l'OMC 2004, ainsi que tous nos autres commanditaires : les ministères de l'Éducation de l'Ontario, du Québec, de l'Alberta, du Nouveau-Brunswick, de Terre-Neuve-et-Labrador, des Territoires du Nord-Ouest et de la Saskatchewan; le département de mathématiques et de statistique de l'Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton, le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique de l'Université de Waterloo, le département de mathématiques et de statistique de l'Université d'Ottawa, le département de mathématiques de l'Université de Toronto, le département de mathématiques de l'Université Western Ontario; Nelson Thompson Learning, John Wiley and Sons Canada Ltd., A.K. Peters et Maplesoft.

Les coordonnateurs provinciaux de l'OMC sont Peter Crippin (Université de Waterloo, Ontario), John Denton (Collège Dawson, Québec), Diane Dowling (Université du Manitoba), Harvey Gerber (Université Simon-Fraser, C.-B.), Gareth J. Griffith (Université de la Saskatchewan), Jacques Labelle (Université du Québec à Montréal), Peter Minev (Université de l'Alberta), Gordon MacDonald (Université de l'Île-du-Prince-Édouard), Roman Mureika (Université du Nouveau-Brunswick), Thérèse Ouellet (Université de Montréal, Québec), Donald Rideout (Université Memorial, Terre-Neuve-et-Labrador).

Je tiens à remercier sincèrement les membres du sous-comité de l'OMC qui ont participé à l'élaboration ou à la correction de l'examen : Jeff Babb (Université de Winnipeg); Robert Craigen (Université du Manitoba); James Currie (Université de Winnipeg); Robert Dawson (Université St. Mary's); Chris Fisher (Université de Regina); Rolland Gaudet (Collège universitaire de Saint-Boniface); J. P. Grossman (Massachusetts Institute of Technology); Richard Hoshino (Université Dalhousie); Kirill Kopotun (Université du Manitoba); Ortrud Oellermann (Université de Winnipeg); Felix Recio (Université de Toronto); Naoki Sato (William M. Mercer); Anna Stokke (Université de Winnipeg); Daryl Tingley (Université du Nouveau-Brunswick).

Je remercie également Michelle Davidson (Manitoba) et Charlene Pawluk (Winnipeg) de leur aide à la correction, ainsi que Suat Namli (Louisiana State) et Bruce Shawyer (Memorial) d'avoir proposé des problèmes. J'aimerais remercier Rolland Gaudet pour la traduction de l'examen et des solutions vers le français de même que Matthieu Dufour (UQAM) pour la révision d'un bon nombre des documents français. Merci aussi au Comité des concours mathématiques de la SMC et à son président Peter Cass (Western Ontario) de leur appui. Un projet de cette envergure ne peut se réaliser sans aide du point de vue administratif, et je remercie à ce chapitre Nathalie Blanchard du bureau administratif de la SMC et Julie Beaver du département de mathématiques et de statistique de l'Université de Winnipeg de leur aide inestimable. Enfin, j'aimerais remercier tout particulièrement Graham Wright, directeur administratif de la SMC, qui a supervisé l'organisation du concours de cette année et qui a fourni une bonne dose de soutien et d'encouragement. Sans son appui, l'OMC ne connaîtrait certainement pas le succès qu'il remporte année après année.

Terry Visentin, président
Comité de l'Olympiade mathématique du Canada

La 36[e] Olympiade mathématique du Canada (2004) s'est tenue le mercredi 31 mars 2004. En tout, 79 élèves de 51 écoles de neuf provinces canadiennes ont été invités à subir l'épreuve; un élève a refusé l'invitation. La répartition des participants par province était la suivante :

C.-B. (12), Alb. (9), Sask. (1), Man. (3), Ont. (45), Qué. (4), N.-B. (1), N.-É. (2), T.-N. (1)

L'OMC 2004 comportait cinq questions de sept points chacune pour un maximum de 35 points. Les concurrents se répartissent en quatre divisions selon les résultats obtenus :

Division	Fourchette	Nb. d'élèves
I	$24 \leq m \leq 35$	11
II	$19 \leq m < 24$	10
III	$14 \leq m < 19$	23
IV	$0 \leq m < 14$	34

Premier prix — Coupe Financière Sun Life — 2000 $
Yufei Zhao
Don Mills Collegiate Institute, Don Mills, Ontario

Deuxième prix— 1500 $
Jacob Tsimerman
University of Toronto Schools, Toronto, Ontario

Troisième prix — 1000 $
Dong Uk (David) Rhee
McNally High School, Edmonton, Alberta

Mentions honorables — 500 $
Boris Braverman
Simon Fraser Junior High, Calgary, Alberta

Dennis Chuang
Strathcona-Tweedsmuir School, Okotoks, Alberta

Gabriel Gauthier-Shalom
Marianopolis College, Montréal, Québec

Oleg Ivrii
Don Mills Collegiate Institute, Don Mills, Ontario

János Kramár
University of Toronto Schools, Toronto, Ontario

Andrew Mao
A.B. Lucas Secondary School, London, Ontario

Richard Peng
Vaughan Road Academy, Toronto, Ontario

Peng Shi
Sir John A. MacDonald Collegiate Institute, Agincourt, Ontario

Division 2

$19 \leq m < 24$

Mehdi Abdeh-Kolahchi	Halifax West High School	N.-É.
Andrew James Critch	Clarenville Integrated High School	T.-N.
Elyot Grant	Cameron Heights Collegiate Inst.	Ont.
Sung Hwan Hong	Port Moody Secondary School	C.-B.
Taotao Liu	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Charles Qi	Jarvis Collegiate Institute	Ont.
Yehua Wei	York Mills Collegiate Institute	Ont.
Tom Yue	A.Y. Jackson Secondary School	Ont.
Peter Zhang	Sir Winston Churchill High School	Alb.
John Zhou	Centennial Secondary School	C.-B.

Division 3

$14 \leq m < 19$

Rongtao Dan	Point Grey Secondary School	C.-B.
Lin Fei	Sir Winston Churchill S.S.	C.-B.
Steve Kim	Port Moody Secondary School	C.-B.
Michael Lipnowski	St. John's-Ravenscourt School	Man.
Tiffany Liu	A.Y. Jackson Secondary School	Ont.
Yang Liu	Francis Libermann Collegiate H.S.	Ont.
Amirali Modir Shanechi	Don Mills Collegiate Institute	Ont.
Chunpo Pan	Jarvis Collegiate Institute	Ont.
Jennifer Park	Bluevale Collegiate Institute	Ont.
Karol Przybytkowski	Marianopolis College	Qué.
Roman Shapiro	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Chen Shen	A.Y. Jackson Secondary School	Ont.
Jimmy Shen	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Geoffrey Siu	London Central Secondary School	Ont.
John Sun	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Kuan Chieh Tseng	Yale Secondary School	C.-B.
Shaun White	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Lilla Yan	Erindale Secondary School	Ont.
Ti Yin	William Lyon Mackenzie C.I.	Ont.
Allen Zhang	Burnaby South Secondary School	C.-B.
Ken Zhang	Western Canada High School	Alb.
Yin Zhao	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Ivy Zou	Earl Haig Secondary School	Ont.

Division 4

$0 \leq m < 14$

Mu Cai	Salisbury Composite High School	Alb.
Qi Chen	Cornwall C. I. & V. S.	Ont.
Francis Chung	A.B. Lucas Secondary School	Ont.
Bo Hong Deng	Jarvis Collegiate Institute	Ont.
Robert Embree	Dr. John Hugh Gillis School	N.-É.
Matthew Folz	Port Moody Secondary School	C.-B.
Yin Ge	Marianopolis College	Qué.
Will Guest	St. John's-Ravenscourt School	Man.
Weibo Hao	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Luke Yen Chun Hsieh	Kitsilano Secondary School	C.-B.
Chen Huang	Sir Winston Churchill S.S.	C.-B.
Kent Huynh	University of Toronto Schools	Ont.
Charley Jiang	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Jaehun Kim	Bayview Secondary School	Ont.
Jaeseung Kim	Bayview Secondary School	Ont.
Koji Kobayashi	David Thompson Secondary School	C.-B.
Sue Jean Lee	Bishop Strachan School	Ont.
Qing Li	St. John's Kilmarnock School	Ont.
Jerry Lo	Vernon Barford School	Alb.
Sukwon Oh	Martingrove Collegiate Institute	Ont.
Neeraj Sood	Westdale Secondary School	Ont.
Evan Stratford	University of Toronto Schools	Ont.
Sarah Sun	Holy Trinity Academy	Alb.
Frank Wang	Vincent Massey Secondary School	Ont.
Joyce Xie	Burnaby South Secondary School	C.-B.
Brian Yu	Old Scona Academic High School	Alb.
Bo Yang Yu	Saint John High School	N.-B.
Jiantao Yu	Columbia International College	Ont.
Tianyao Yu	Columbia International College	Ont.
Guan Zhang	Grant Park High School	Man.
Si Zhang	Aden Bowman Collegiate Institute	Sask.
Tianxing Zhang	Vanier College	Qué.
Ryan Zhou	Adam Scott C. & V. I.	Ont.
Siqi Zhu	Earl Haig Secondary School	Ont.

36[ième] Olympiade mathématique du Canada
Le 31 mars 2004

1. Considerons une horloge ordinaire (12 heures) comportant une aiguille des heures et une aiguille des minutes qui se déplacent de façon continue. Soit m un entier tel que $1 \leq m \leq 720$. A précisément m minutes après 12h00, l'angle entre les deux aiguilles est exactement $1°$. Déterminer toutes les valeurs possibles de m.

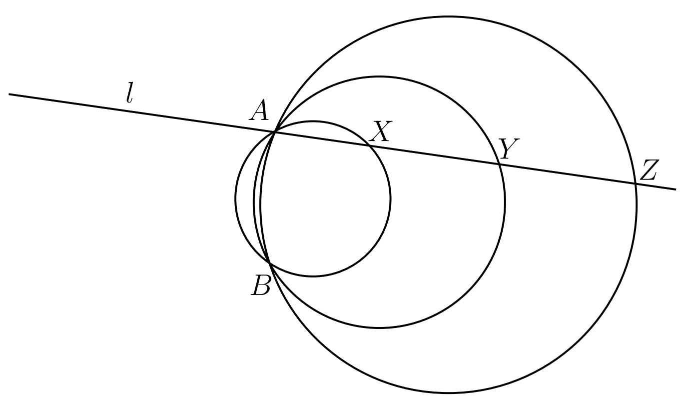
2. Trouver les trois derniers chiffres de $2003^{2002^{2001}}$.

3. Trouver toutes les solutions réelles positive (s'il y en a) à

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \text{ et}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

4. Démontrer que, lorsque trois cercles partagent une même corde AB, toute droite passant par A mais différente de AB détermine le même ratio $XY : YZ$, où X est un point arbitraire, distinct de B, situé sur le premier cercle, et où Y et Z sont les points où AX coupe les deux autres cercles, ces points étant étiquetés de façon à ce que Y soit entre X et Z.



5. Soit S un ensemble de n points dans le plan, tel que la distance entre tout couple de points de S soit d'au moins une unité. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble T de S comportant au moins $n/7$ points et tel que la distance entre tout couple de points de T soit d'au moins $\sqrt{3}$ unités.

Solution de l'Olympiade Mathématique du Canada 2004

1. Déterminer tous les triplets ordonnés de nombres réels (x, y, z), satisfaisant le système d'équations qui suit:
$$\begin{cases} xy &= z - x - y \\ xz &= y - x - z \\ yz &= x - y - z \end{cases}$$

Solution 1

Par soustraction de la deuxième équation de la première nous avons $xy - xz = 2z - 2y$. Mettant $y - z$ en évidence et réarrangeant les termes, nous obtenons
$$(x + 2)(y - z) = 0,$$
d'où il découle que soit $x = -2$, soit $z = y$.

Si $x = -2$, la première équation devient $-2y = z + 2 - y$, *i.e.* $y + z = -2$. Substituant $x = -2$ et $y + z = -2$ dans la troisième équation, il en suit que $yz = -2 - (-2) = 0$. Ainsi $y = 0$ ou $z = 0$, donnant les seules solutions $(-2, 0, -2)$ et $(-2, -2, 0)$.

Si $z = y$, la première équation devient $xy = -x$, *i.e.* $x(y + 1) = 0$. Si $x = 0$ (et $z = y$), la troisième équation devient $y^2 = -2y$ donnant $y = 0$ ou $y = -2$, et donc les deux solutions $(0, 0, 0)$ et $(0, -2, -2)$. Si on a plutôt $y = -1$ (et $z = y$), la troisième équation devient $x = -1$, donnant la solution $(-1, -1, -1)$.

En résumé, il y a 5 solutions: $(-2, 0, -2)$, $(-2, -2, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$ and $(-1, -1, -1)$

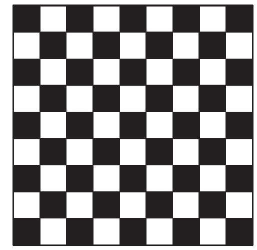
Solution 2

Additionnant x aux deux côtés de la première équation, nous avons
$$x(y + 1) = z - y = (z + 1) - (y + 1) \;\Rightarrow\; (x + 1)(y + 1) = z + 1.$$

Par manipulations similaires des deux autres équations et en posant $a = x+1$, $b = y+1$ et $c = z + 1$, nous pouvons réécrire le système comme suit:
$$\begin{cases} ab &= c \\ ac &= b \\ bc &= a \end{cases}$$

Si une de a, b, c est 0, il est clair qu'elles sont toutes 0. Ainsi, $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ est une solution. Supposons maintenant que a, b et c sont non nulles. Substituant $c = ab$ dans les deuxième et troisième équations, nous obtenons $a^2b = b$ et $b^2a = a$, respectivement. Ainsi, $a^2 = 1$ et $b^2 = 1$, car a et b sont non nulles. D'où 4 autres solutions $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ et $(-1, -1, 1)$. Par réécriture en x, y, z nous avons les mêmes 5 solutions qu'indiquées en Solution 1 ci-haut.

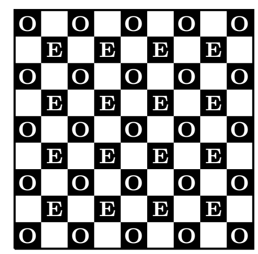
2. De combien de manières peut-on placer 8 tours non attaquantes sur un damier 9×9 (tel qu'illustré), de manière à ce que toutes ces 8 tours se retrouvent sur des carrés de la même couleur? [Deux tours sont dites attaquantes si elles se trouvent dans la même rangée ou dans le ême colonne du damier.]



Solution 1

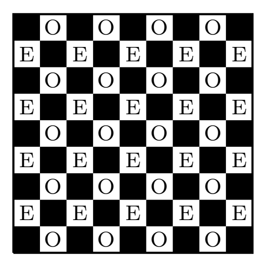
Comptons premièrement le nombre de manières de placer 8 tours non attaquantes sur des carrés noirs; ensuite nous compterons le nombre de manières de placer ces tours sur des carrés blancs. Supposer que les rangées du damier ont été numérotées de 1 à 9, du haut vers le bas.

Remarquer premièrement qu'une tour placée sur un carré noir dans une rangée numérotée impaire ne peut pas attaquer une tour placée dans une rangée numérotée paire. Ceci partitionne effectivement les carrés noirs en un damier 5 par 5 et un autre 4 par 4, (voir les cases étiquetées O et E au schéma à droite); les tours peuvent être placées indépendamment sur ces deux damiers. Or il y a 5! manières de placer 5 tours non attaquantes sur les carrés O et 4! manières de placer 4 tours non attaquantes sur les carrés E.



Ceci donne 5!4! manières de placer 9 tours non attaquantes sur des carrés noirs. Le fait d'enlever une seule de ces tours donne une configuration du genre voulu. D'où il y a $9 \cdot 5!4!$ manières de placer 8 tours non attaquantes sur les carrés noirs du damier.

Par un raisonnement similaire, on peut partitionner les carrés blancs du damier comme illustré par le schéma à droite. Les carrés blancs sont ainsi partitionnés dans deux damiers 5 par 4, E et O, où aucune tour O peut attaquer une quelconque tour E. Or, au plus 4 tours non attaquantes peuvent être placées sur un damier 5 par 4, d'où l'obligation d'en placer 8 au total force d'en placer 4 sur chacun des damiers 5 par 4. Puisqu'on peut placer 4 tours non attaquantes sur un damier 5 par 4 de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$ manières, il y a $(5!)^2$ manières de placer 8 tours non attaquantes sur des carrés blancs.



En résumé, il y a $9 \cdot 5!4! + (5!)^2 = (9+5)5!4! = 14 \cdot 5!4! = 40320$ manières de placer 8 tours non attaquantes sur des carrés de même couleur.

Solution 2

Considérons premièrement le cas des carrés noirs. Nous avons 8 tours et 9 rangées, d'où précisément une rangée sera sans tour.

Il y a deux cas possibles, que la rangée sans tour ait 5 carrés noirs ou 4 carrés noirs. Par permutation de rangées, cette rangée sans tour est soit dernière soit avant dernière. Dans chacun des cas, nous allons compter le nombre de manières de placer les tours, procédant par rangée.

Dans le premier cas, il y a 5 choix pour la rangée sans tour, que nous considérons maintenant être la dernière. On peut alors placer la tour en première rangée de 5 manières et la tour en deuxième rangée de 4 manières. Lorsqu'on va pour placer une tour en troisième rangée il suffit d'éviter la colonne contenant la tour de première rangée, d'où il y a 4 telles possibilités. Par un raisonnement similaire, on peut placer la tour en quatrième rangée de 3 manières, pour éviter la tour de deuxième rangée. Le nombre de possibilités dans le premier cas est ainsi 5 fois $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = (5!)^2$.

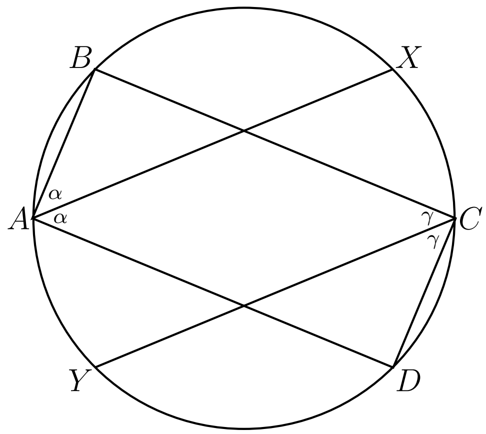
Dans le deuxième cas, il y a 4 choix pour la rangée sans tour, qu'on considère être l'avant dernière. Par une logique similaire à celle ci-haut, le nombre de manières de placer les tours est 4 fois $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4(5!4!)$.

Faisons de même pour les carrés blancs. Si la rangée sans tour a 4 cases blanches, il y a 5 fois $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2$, donc $(5!)^2$ manières de placer les tours ainsi. Noter l'impossibilité qu'une rangée à 5 carrés blancs soit sans tour.

Enfin, le nombre total est

$$(5!)^2 + 4(5!4!) + (5!)^2 = (5 + 4 + 5)5!4! = 14(5!4!).$$

3. Soient A, B, C et D quatre points sur un cercle (s'y retrouvant en sens horaire), tels que $AB < AD$ et $BC > CD$. La bissectrice de l'angle BAD rencontre le cercle en X; la bissectrice de l'angle BCD rencontre le cercle en Y. Considérer l'hexagone formé par ces six points sur le cercle. Montrer que si quatre des six côtés de cet hexagone ont longueurs égales, alors BD est un diamètre du cercle.



Solution 1

On nous donne $AB < AD$. Puisque CY bissecte $\measuredangle BCD$ et que $BY = YD$, il en découle que Y se retrouve entre D et A sur le cercle, tel qu'indiqué au diagramme ci-haut; aussi, $DY > YA$ et $DY > AB$. Par un raisonnement similaire, X se retrouve entre B et C; aussi, $BX > XC$ et $BX > CD$. Donc si $ABXCDY$ a 4 côtés égaux, la seule possibilité est $YA = AB = XC = CD$.

Soient $\measuredangle BAX = \measuredangle DAX = \alpha$ et $\measuredangle BCY = \measuredangle DCY = \gamma$. Puisque $ABCD$ est cyclique, $\measuredangle A + \measuredangle C = 180°$, ce qui implique que $\alpha + \gamma = 90°$. Or, le fait que $YA = AB = XC = CD$ implique que l'arc de Y à B (qui est soustendu par $\measuredangle YCB$) est égal à l'arc de X à D (qui est soustendu par $\measuredangle XAD$). Ainsi $\measuredangle YCB = \measuredangle XAD$, d'où $\alpha = \gamma = 45°$. Enfin, BD est soustendu par $\measuredangle BAD = 2\alpha = 90°$. D'où BD est un diamètre du cercle.

Solution 2

On nous donne $AB < AD$. Puisque CY bissecte $\measuredangle BCD$ et que $BY = YD$, il en découle que Y se retrouve entre D et A sur le cercle, tel qu'indiqué au diagramme ci-haut; aussi, $DY > YA$ et $DY > AB$. Par un raisonnement similaire, X se retrouve entre B et C; aussi, $BX > XC$ et $BX > CD$. Donc si $ABXCDY$ a 4 côtés égaux, la seule possibilité est $YA = AB = XC = CD$. Ceci implique que l'arc de Y à B est égal à l'arc de X à D, d'où $YB = XD$. Puisque $\measuredangle BAX = \measuredangle XAD$, que $BX = XD$ et que $\measuredangle DCY = \measuredangle YCB$, il en découle que $DY = YB$. Ainsi, $BXDY$ est un carré, d'où sa diagonale BD doit être un diamètre du cercle.

4. Soit p un entier premier impair. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

[Noter que $a \equiv b \pmod{m}$ signifie que $a - b$ est divisible par m.]

Solution

Puisque $p-1$ est pair, nous pouvons prendre les termes 2 par 2 comme suit (le premier terme avec le dernier, le deuxième avec le deuxième dernier ...):

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1}\right).$$

Par application du binôme de Newton à $(p-k)^{2p-1}$, nous avons

$$(p-k)^{2p-1} = p^{2p-1} - \cdots - \binom{2p-1}{2} p^2 k^{2p-3} + \binom{2p-1}{1} p k^{2p-2} - k^{2p-1},$$

où chaque terme au côté à droite est divisible par p^2 sauf les deux derniers. Ainsi

$$k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} \equiv k^{2p-1} + \binom{2p-1}{1} p k^{2p-2} - k^{2p-1} \equiv (2p-1) p k^{2p-2} \pmod{p^2}.$$

Or, pour $1 \le k < p$, k n'est pas divisible par p, d'où $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, par le petit théorème de Fermat. Ainsi, $(2p-1)k^{2p-2} \equiv (2p-1)(1^2) \equiv -1 \pmod{p}$, qu'on peut écrire comme $(2p-1)k^{2p-2} = mp - 1$ pour un certain entier m. Alors

$$(2p-1) p k^{2p-2} = mp^2 - p \equiv -p \pmod{p^2}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} &\equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (-p) \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)(-p) \pmod{p^2} \\ &\equiv \frac{p-p^2}{2} + p^2 \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

5. Soit T l'ensemble des diviseurs entiers positifs de 2004^{100}. Quel est la plus grande valeur possible pour le nombre d'éléments d'un sous-ensemble S de T, tel qu'aucun élément de S est un multiple entier d'un autre élément de S?

Solution

Dans ce qui suit, a, b et c dénoteront des entiers non négatifs.

La factorisation de 2004 en nombres premiers est $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, d'où

$$T = \left\{ 2^a 3^b 167^c \,\middle|\, 0 \le a \le 200,\ 0 \le b, c \le 100 \right\}.$$

Posons

$$S = \left\{ 2^{200-b-c} 3^b 167^c \,\middle|\, 0 \le b, c \le 100 \right\}.$$

Pour tout $0 \le b, c \le 100$, nous avons $0 \le 200-b-c \le 200$, d'où S est sous-ensemble de T. Puisqu'il y a 101 valeurs possibles pour b et 101 valeurs possibles pour c, S contient 101^2 éléments distincts. Nous allons montrer qu'aucun élément de S est multiple d'un autre élément de S et qu'aucun sous-ensemble de T ayant cette propriéténe peut contenir plus d'éléments.

Supposons que $2^{200-b-c}3^b 167^c$ est un multiple entier de $2^{200-j-k}3^j 167^k$. Alors

$$200 - b - c \ge 200 - j - k, \quad b \ge j, \quad c \ge k.$$

Or la première inégalité donne $b + c \le j + k$, qui force $b = j$ et $c = k$ à cause de $b \ge j$ et $c \ge k$. Ainsi, aucun élément de S est un multiple entier d'un autre élément de S.

Soit maintenant U un sous-ensemble de T, comportant plus de 101^2 éléments. Puisqu'il n'y a que 101^2 paires (b, c) telles que $0 \le b, c \le 100$, il en découle par le principe du pigeonnier que U doit contenir deux éléments $u_1 = 2^{a_1}3^{b_1}167^{c_1}$ et $u_2 = 2^{a_2}3^{b_2}167^{c_2}$, tels que $b_1 = b_2$ et $c_1 = c_2$. Ainsi, si $a_1 < a_2$, alors u_1 divise u_2; autrement, u_2 divise u_1. D'où l'ensemble U ne vérifie pas la condition énoncée.

Ainsi, le nombre maximal d'éléments dans un sous-ensemble T du genre indiqué est de $101^2 = 10201$.

RAPPORT DU CORRECTEUR

Chaque question valait un maximum de 7 points. Chaque solution de chaque examen a été corrigée par deux correcteurs. Si la différence était supérieure à un point, la solution était réexaminée jusqu'à obtention d'un consensus entre les correcteurs. Si les deux notes différaient par un point, la moyenne a été retenue pour cette question dans le calcul du score final. Les copies ayant obtenu les plus haut scores ont été réexaminées jusqu'à ce que le comité soit confiant d'avoir classé les concurrents correctement.

Les pointages attribués par chacune des solutions sont indiqués ci-dessous en pourcentage. Comme il est mentionné plus haut, les résultats fractionnaires sont possibles, mais aux fins de cette table, les résultats sont arrondis. Par exemple, 59.0% des étudiants ont obtenu un score de 6.5 ou 7 pour le premier problème. Cela signifie que pour 59% des copies, au moins un des correcteurs a attribué la note 7 pour la question 1.

Note	**#1**	**#2**	**#3**	**#4**	**#5**
0	2.6	12.8	15.4	56.4	33.3
1	10.3	15.4	21.8	10.3	34.6
2	11.5	11.5	9.0	10.3	15.4
3	5.1	10.3	10.3	1.3	2.6
4	2.6	6.4	5.1	1.3	5.1
5	0.0	1.3	6.4	2.6	2.6
6	9.0	10.3	19.2	2.6	1.3
7	59.0	32.1	12.8	15.4	5.1

Au début, notre philosophie de correction était la suivante: un score de 7 était attribué pour une solution complète et correcte. Un score de 6 indique une solution essentiellement correcte avec une omission ou une erreur très mineure. Un progrès très significatif devait être accompli pour mériter un score de 3. Même des scores de 1 ou 2 n'étaient pas attribués sans un travail significatif. Des scores de 4 ou 5 étaient réservés pour des situations spéciales. Cette approche semble avoir très bien fonctionné avec la plupart des problème sur ce questionnaire.

PROBLÈME 1

Ce problème a été très réussi. Il y a plusieurs façons de manipuler les équations du système, mais personne n'a présenté de solution significativement différente des deux solutions officielles. Les étudiants qui ont trouvé quelques uns des triplets sans les trouver tous ont habituellement reçu 1 ou 2 points, dépendant de la qualité du raisonnement fourni. Une erreur courante a été de simplifier par un facteur des deux côtés de l'équation sans considérer que ce facteur pourrait être nul. Les étudiants qui ont trouvé tous les triplets, plus quelques autres triplets supplémentaires ont typiquement reçu 3 points. Cette situation pouvait advenir quand les étudiants ont mis au carré des équations ou en ont multiplié entre elles.

PROBLÈME 2

Ce problème a été passablement bien réussi par les étudiants qui ont utilisé une approche semblable à celle illustrée à la solution 2 du solutionnaire officiel. Chaque solution correcte consistait à considérer deux cas: les tours sur les cases blanches et les tours sur les cases blanches. Les étudiants qui n'ont fait qu'un seul de ces deux cas (habituellement les cases noires) ont reçu trois points. Certains étudiants n'ont pas bien réalisé comment ces deux cas différaient. Une autre erreur courante a été de ne pas prendre en compte le nombre de choix pour une colonne ou une ligne vide.

PROBLÈME 3

Ce problème de géométrie a été résolu par peu d'étudiants. Toutes les solutions correctes ont utilisé la géométrie classique, les deux solutions officielles étant les approches les plus courantes. La difficulté majeure a été d'expliquer clairement que les quatre côtés égaux de l'hexagone devaient être YA, AB, XC et CD. Beaucoup d'arguments longs et confus ont été présentés et quelques autres étudiants ont considéré plusieurs cas différents, dont quelques cas inutiles. Cependant, une fois ce fait établi, personne n'a eu de difficulté à montrer que BD est un diamètre. Les étudiants qui ont montré que XY est un diamètre (ce qui dépend seulement de la définition de X et Y, et non d'une quelconque autre propriété des hexagones) ont reçu 3 points.

PROBLÈME 4

Douze étudiants ont reçu le maximum pour cette question et toutes les solutions étaient très semblables à la solution officielle. La plupart des concurrents savaient exactement comment résoudre ce problème ou alors n'ont fait à peu près aucun progrès. L'idée maîtresse était d'associer le $k$ème terme de la série avec le $(p - k)$ème terme. Si cette observation était faite, les étudiants savaient habituellement comment compléter la démonstration.

PROBLÈME 5

Peu d'étudiants ont fait des progrès significatifs dans ce problème difficile. Les cinq étudiants qui ont obtenu un résultat de 6 ou 7 ont utilisé une approche semblable à celle utilisée dans les solutions officielles. Les étudiants qui ont factorisé 2004^{100} et donné une description concise de l'ensemble T ont reçu 1 point. Les étudiants qui ont trouvé l'ensemble maximal S, mais sans pouvoir en démontrer la maximalité se sont vus attribuer 3 points.