Rapport et résultat
de l'Olympiade mathématique du Canada
2003

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

Sun Life Financial

The UNIVERSITY of WINNIPEG

L’Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l’Olympiade mathématique du Canada (Comité de l’OMC), qui relève du Comité des concours mathématiques. Instituée en 1969, l’OMC offre aux élèves qui se sont illustrés dans les concours provinciaux de mathématiques une occasion de concourir sur la scène nationale. Elle sert en outre d’épreuve préparatoire aux élèves canadiens qui participent à l’Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Les élèves qui obtiennent une note suffisamment élevée au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) ou qui sont désignés par un coordonnateur provincial se qualifient pour l’OMC.

La Société remercie la Sun Life du Canada, compagnie d’assurance-vie, commanditaire principal de l’Olympiade mathématique du Canada 2003 et les autres commanditaires, dont : les ministères de l’Éducation de l’Ontario, du Québec, de l’Alberta, du Nouveau-Brunswick, de Terre-Neuve-et-Labrador, des Territoires du Nord-Ouest et de la Saskatchewan; le Département de mathématiques et de statistique, Université de Winnipeg; le Département de mathématiques et de statistique, Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton; le Centre d’éducation en mathématiques et en statistique, Université de Waterloo; le Département de mathématiques et de statistique, Université d’Ottawa; le Département de mathématiques, Université de Toronto; Nelson Thompson Learning et John Wiley and Sons Canada Ltd.

Les coordonnateurs provinciaux de l’OMC sont Peter Crippin (Université de Waterloo, Ont.); John Denton (Collège Dawson, Qc); Diane Dowling (Université du Manitoba); Harvey Gerber (Université Simon Fraser, C.-B.); Gareth J. Griffith (Université de la Saskatchewan); Jacques Labelle (Université du Québec à Montréal); Ted Lewis (Université de l’Alberta); Gordon MacDonald (Université de l’Île-du-Prince-Édouard); Roman Mureika (Université du Nouveau-Brunswick); Michael Nutt (Université Acadia, N.-É.); Thérèse Ouellet (Université de Montréal, Qc); Donald Rideout (Université Memorial de Terre-Neuve).

J’adresse mes sincères remerciements aux membres du Comité de l’OMC qui ont participé à la préparation et à la correction de l’examen : Jeff Babb (Université de Winnipeg); Robert Craigen (Université du Manitoba); James Currie (Université de Winnipeg); Robert Dawson (Université St. Mary’s); Chris Fisher (Université de Regina); Rolland Gaudet (Collège universitaire de Saint-Boniface); Luis Goddyn (Université Simon Fraser); J. P. Grossman (Massachusetts Institute of Technology); Kirill Kopotun (Université du Manitoba); Ortrud Oellermann (Université de Winnipeg); Felix Recio (Université de Toronto); Naoki Sato, William M. Mercer; Daryl Tingley (Université du Nouveau-Brunswick).

Je remercie également Michelle Davidson (Université du Manitoba), Václav Linek (Université de Winnipeg) et Charlene Pawluk, qui ont participé à la correction, ainsi que Suat Namli (Université d’État de la Louisiane) et Bruce Shawyer (Université Memorial), qui ont soumis des problèmes. Merci à Rolland Gaudet pour la traduction française de l’examen et du corrigé, et à Matthieu Dufour (Université du Québec à Montréal) pour la révision de nombreux documents en français. J’apprécie également l’aide du Comité des concours mathématiques de la SMC, présidé par Peter Cass (Western Ontario). La bonne marche d’une entreprise aussi considérable requiert un soutien administratif conséquent; je remercie de leur précieux concours Nathalie Blanchard du bureau administratif de la SMC et à Julie Beaver du Département de mathématiques et de statistique de l’Université de Winnipeg. Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement deux personnes. Daryl Tingley, président sortant du Comité de l’OMC, a habilement ménagé la transition à la présidence du comité et prêté son concours chaque fois que le besoin s’en faisait sentir. Graham Wright, directeur administratif de la SMC, a supervisé toute l’organisation de l’édition 2003 et apporté un soutien et un encouragement considérables. Sans son concours, l’OMC ne serait pas la réussite qu’elle reste encore et toujours à mes yeux.

Terry Visentin, président
Comité de l’Olympiade mathématique du Canada

La 35e Olympiade mathématique du Canada (édition 2003) a réuni, le mercredi 26 mars 2003, 85 concurrents en provenance de 55 écoles des neuf provinces participantes. Un concurrent canadien a participé depuis les États-Unis. Voici la répartition provinciale des concurrents :

C.-B. (11), Alb. (6), Sask. (1), Man (3), Ont. (55), Qc (5), N.-B. (1), N.-S. (1), T.-N. (1)

L'OMC 2003 comportait cinq questions de sept points chacune pour un maximum de 35 points. Les concurrents se répartissent en quatre divisions selon les résultats obtenus :

Division	**Fourchette**	**Nb. d'élèves**
I	**$25 \leq m \leq 35$**	**9**
II	**$20 \leq m < 25$**	**12**
III	**14 +≤ m < 20**	**26**
IV	**$0 \leq m < 14$**	**38**

FIRST PRIZE— Sun Life Financial Cup — $2000
János Kramár
University of Toronto Schools, Toronto, Ontario

SECOND PRIZE — $1500
Tianyi (David) Han
Woburn Collegiate Institute, Toronto, Ontario

THIRD PRIZE — $1000
Robert Barrington Leigh
Old Scona Academic High School, Edmonton, Alberta.

HONOURABLE MENTIONS — $500

Olena Bormashenko
Don Mills Collegiate Institute, Toronto, Ontario

Ali Feizmohammadi
Northview Heights Secondary School, North York, Ontario

Ralph Furmaniak
A.B. Lucas Secondary School, London, Ontario

Oleg Ivrii
Don Mills Collegiate Institute, Don Mills, Ontario

Andrew Mao
A.B. Lucas Secondary School, London, Ontario

Jacob Tsimerman
University of Toronto Schools, Toronto, Ontario

C.-B. (11), Alb. (6), Sask. (1), Man (3), Ont. (55), Qc (5), N.-B. (1), N.-S. (1), T.-N. (1)

Division 2

$20 \leq m < 25$

Aaron Chan	J.N. Burnett S.S.	C.-B.
Justin Chan	Mount Douglas S.S.	C.-B.
Leonid Chindelevitch	Marianopolis College	Qc.
Joe Hung	David Thompson S.S.	C.-B.
Ruohan Li	Forest Hill C.I.	Ont.
Razvan Romanescu	East York C.I.	Ont.
Samuel Wong	University Hill S.S.	C.-B.
Nan Yang	Birchmount Park C.I.	Ont.
Dongbo Yu	Don Mills C.I.	Ont.
Matei Zaharia	Jarvis C.I.	Ont.
Lingkai Zeng	Edison H.S.	NJ
Yin Zhao	Vincent Massey S.S.	Ont.

Division 3

$14 \leq m < 20$

Billy Ballik	Bowmanville H.S.	Ont.
David Belanger	Nicholson Catholic College	Ont.
Robert Biswa S	Vincent Massey S.S.	Ont.
Maximilian Butler	Tom Griffiths Home School	Ont.
Francis Chung	A.B. Lucas S.S.	Ont.
Andrew Critch	Clarenville Integrated H.S.	T.-N.
Rong Tao Dan	Point Grey S.S.	C.-B.
Gabriel Gauthier	Marianopolis College	Qc.
Chen Huang	Sir Winston Churchill S.S.	C.-B.
Liji Huang	Portage Collegiate Institute	Man.
Jenny Yue Jin	Earl Haig S.S.	Ont.
Hyon Lee	Vincent Massey S.S.	Ont.
Charles Zhi Li	Western Canada H.S.	Alb.
Robin Li	Ontario Science Centre	Ont.
David Rhee	Vernon Barford Junior High	Alb.
Chen Shen	A.Y. Jackson S.S.	Ont.
Jimmy Shen	Vincent Massey S.S.	Ont.
Evan Stratford	University Of Toronto Schools	Ont.
John Sun	Vincent Massey S.S.	Ont.
Yang Yang	Don Mills C.I.	Ont.
Ti Yin	William Lyon Mackenzie C.I.	Ont.
Tom Yue	A.Y. Jackson S.S.	Ont.
Hang Zhang	Albert Campbell C.I.	Ont.
Nancy Zhang	Sir Winston Churchill S.S.	C.-B.
Peter Zhang	Sir Winston Churchill H.S.	Alb.
Zhongying Zhou	Vincent Massey S.S.	Ont.

Division 4

$0 \leq m < 14$

Allan Cai	Bayview Secondary School	Ont.
Alex Chou	Semiahmoo S.S.	C.-B.
Johnston Chu	Earl Haig S.S.	Ont.
Eric Dallal	Marianopolis College	Qc.
Fan Feng	Vincent Massey S.S.	Ont.
Nir Friedman	Thornhill S.S.	Ont.
Jeremy Green	Richview C.I.	Ont.
Mathieu Guay Paquet	College De Maisonneuve	Qc.
Ian Hung	University Of Toronto Schools	Ont.
Alexander Jiang	The Halifax Grammar School	N.-S.
Heejune Jun	St. Robert C.H.S.	Ont.
Keigo Kawaji	Earl Haig S.S.	Ont.
Jaeseung Kim	Bayview Secondary School	Ont.
Kanguk Lee	Newtonbrook S.S.	Ont.
Tae Hun Lee	Carson Graham S.S.	C.-B.
Angela Lin	Sir Winston Churchill S.S.	C.-B.
Nanqian Lin	Albert Campbell C.I.	Ont.
David Liu	St. John's-Ravenscourt School	Man.
Taotao Liu	Vincent Massey S.S.	Ont.
Rui Ma	Vincent Massey S.S.	Ont.
Radoslav Marinov	Harry Ainlay H.S.	Alb.
Andre Mutchnik	Marianopolis College	Qc.
Quoc Nguyen	Vincent Massey Collegiate	Man.
Jennifer Park	Bluevale C.I.	Ont.
Mark Salzman	Upper Canada College	Ont.
Antonio Sanchez	St. Matthew H.S.	Ont.
Ner Mu Nar Saw	Jarvis C.I.	Ont.
Yi Hao Shen	Saint John H.S.	N.-B.
Sarah Sun	Holy Trinity Academy	Alb.
Yuanbin Tang	Lisgar C.I.	Ont.
William Truong	Campbell C.I.	Sask.
Xingfang Wang	Kitchener-Waterloo C.I. & V.I.	Ont.
Yifei Wang	Vincent Massey S.S.	Ont.
Yehua Wei	York Mills C.I.	Ont.
Shaun White	Vincent Massey S.S.	Ont.
Yang Xia	Vincent Massey S.S.	Ont.
Zhengzheng Yang	The Woodlands S.	Ont.
Jeff Zhao	Eric Hamber S.S.	C.-B.

L'Olympiade mathématique du Canada - 2003

Mercredi, le 26 mars

1. Considerons une horloge ordinaire (12 heures) comportant une aiguille des heures et une aiguille des minutes qui se déplacent de façon continue. Soit m un entier tel que $1 \leq m \leq 720$. A précisément m minutes après 12h00, l'angle entre les deux aiguilles est exactement $1°$. Déterminer toutes les valeurs possibles de m.

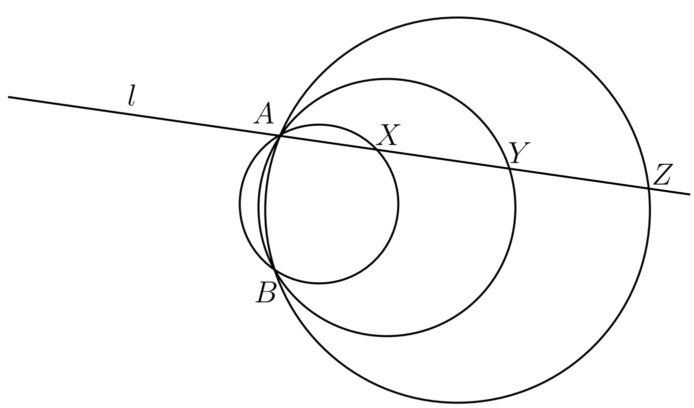
2. Trouver les trois derniers chiffres de $2003^{2002^{2001}}$.

3. Trouver toutes les solutions réelles positive (s'il y en a) à

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \text{ et}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

4. Démontrer que, lorsque trois cercles partagent une même corde AB, toute droite passant par A mais différente de AB détermine le même ratio $XY : YZ$, où X est un point arbitraire, distinct de B, situé sur le premier cercle, et où Y et Z sont les points où AX coupe les deux autres cercles, ces points étant étiquetés de façon à ce que Y soit entre X et Z.



5. Soit S un ensemble de n points dans le plan, tel que la distance entre tout couple de points de S soit d'au moins une unité. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble T de S comportant au moins $n/7$ points et tel que la distance entre tout couple de points de T soit d'au moins $\sqrt{3}$ unités.

Solution Olympiade 2003

1. Considerons une horloge ordinaire (12 heures) comportant une aiguille des heures et une aiguille des minutes qui se déplacent de façon continue. Soit m un entier tel que $1 \leq m \leq 720$. A précisément m minutes après 12h00, l'angle entre les deux aiguilles est exactement $1°$. Déterminer toutes les valeurs possibles de m.

   Solution

   L'aiguille des minutes fait une révolution de $360°$ à toutes les 60 minutes, donc après m minutes elle aura balayé $\frac{360}{60}m = 6m$ degrés. L'aiguille des heures fait une révolution entière à toutes les 12 heures (720 minutes), donc après m minutes elle aura balayé $\frac{360}{720}m = m/2$ degrés. Puisque les deux aiguilles ont commencé à la même position à 12h00, l'angle entre les deux aiguilles sera de $1°$ lorsque $6m - m/2 = \pm 1 + 360k$ pour un certain entier k. Résolvant cette équation, on obtient

   $$m = \frac{720k \pm 2}{11} = 65k + \frac{5k \pm 2}{11}.$$

   Puisque $1 \leq m \leq 720$, nous avons $1 \leq k \leq 11$. Or m et k sont entiers, d'où $5k \pm 2$ est divisible par 11, donnant $5k \pm 2 = 11q$. Alors

   $$5k = 11q \pm 2 \quad \Rightarrow \quad k = 2q + \frac{q \pm 2}{5}.$$

   Il est clair que seulement $q = 2$ et $q = 3$ satisfont ces conditions, d'où $k = 4$ ou $k = 7$. Substituant ces valeurs dans l'expression pour m, on détermine que les seules valeurs possibles pour m sont 262 et 458.

2. Trouver les trois derniers chiffres de $2003^{2002^{2001}}$.

Solution

Il faut déterminer le reste lorsque $2003^{2002^{2001}}$ est divisé par 1000, qui est le même que le reste lorsque $3^{2002^{2001}}$ est divisé par 1000, puisque $2003 \equiv 3 \pmod{1000}$. Pour ce faire, nous allons premièrement déterminer un entier positif n tel que $3^n \equiv 1 \pmod{1000}$ et ensuite nous allons exprimer 2002^{2001} sous la forme $nk + r$, de manière à ce que

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{nk+r} \equiv (3^n)^k \cdot 3^r \equiv 1^k \cdot 3^r \equiv 3^r \pmod{1000}.$$

Puisque $3^2 = 10 - 1$, nous pouvons évaluer 3^{2m} à l'aide du binôme de Newton:

$$3^{2m} = (10-1)^m = (-1)^m + 10m(-1)^{m-1} + 100\frac{m(m-1)}{2}(-1)^{m-2} + \cdots + 10^m.$$

Après les 3 premiers termes de cette somme, tous les termes sont divisibles par 1000. Posant $m = 2q$, nous avons

$$3^{4q} \equiv 1 - 20q + 100q(2q-1) \pmod{1000}. \qquad (1)$$

Utilisant ceci, on voit que $3^{100} \equiv 1 \pmod{1000}$.

Nous voulons maintenant déterminer le reste lorsque 2002^{2001} est divisé par 100.

Or $2002^{2001} \equiv 2^{2001} \pmod{100} \equiv 4 \cdot 2^{1999} \pmod{4 \cdot 25}$, donc on va étudier les puissances de 2 modulo 25. Notant que $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$, nous avons

$$2^{1999} = (2^{10})^{199} \cdot 2^9 \equiv (-1)^{199} \cdot 512 \equiv -12 \equiv 13 \pmod{25}.$$

D'où $2^{2001} \equiv 4 \cdot 13 = 52 \pmod{100}$. Ainsi 2002^{2001} s'écrit sous la forme $100k + 52$ pour un certain entier k, donnant

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{52} \pmod{1000} \equiv 1 - 20 \cdot 13 + 1300 \cdot 25 \equiv 241 \pmod{1000}$$

à l'aide de (1). Ainsi, les 3 derniers chiffres de $2003^{2002^{2001}}$ sont 241.

3. Trouver toutes les solutions réelles positive (s'il y en a) à

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \text{ et}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

Solution 1

Soit $f(x, y, z) = (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z)$. La première équation ci-haut est équivalente à $f(x, y, z) = 0$. Si $x, y, z \geq 1$ alors $f(x, y, z) \geq 0 = 0$ avec égalité seulement si $x = y = z = 1$. Or, si $x = y = z = 1$, la deuxième équation n'est pas satisfaite. D'où dans toute solution au système d'équations, au moins une des variables est inférieure à 1. Sans perte de généralité, supposons que $x < 1$. Alors

$$x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 \geq 2yz > yz > xyz.$$

D'où le système n'a aucune solution réelle positive.

Solution 2

On va montrer que le système n'a aucune solution réelle positive. Supposons autrement. La deuxième équation peut être réécrite comme $x^2 - (yz)x + (y^2 + z^2)$. Puisque cette quadratique possède une solution réelle par hypothèse, son discriminant est non négatif. D'où

$$y^2z^2 - 4y^2 - 4z^2 \geq 0.$$

Une division par $4y^2z^2$ donne

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{y^2}.$$

Ainsi $y^2 \geq 4$ et donc $y = 2$, y étant positive. Un raisonnement similaire donne $x, y, z \geq 2$. Mais la première équation peut être écrite comme

$$x(x^2 - 1) + y(y^2 - 1) + z(z^2 - 1) = 0,$$

contredisant $x, y, z \geq 2$. Ainsi, aucune solution réelle positive existe.

Solution 3

Appliquant les inégalités arithmético-géométrique et de puissances moyennes à x, y, z, nous avons

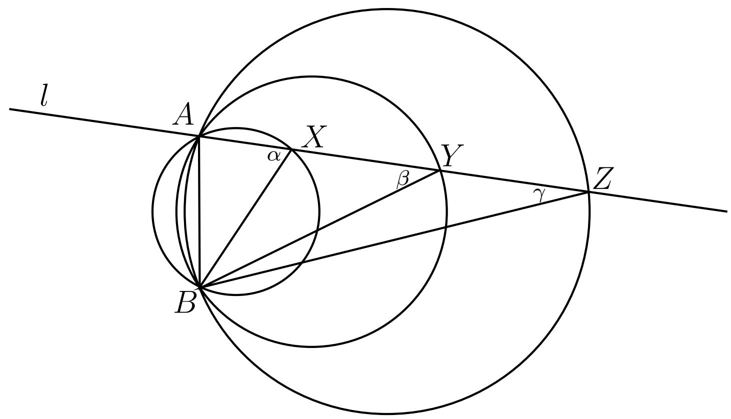
$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}.$$

Posant $S = x+y+z = x^3+y^3+z^3$ et $P = xyz = x^2+y^2+z^2$, ces inégalités peuvent être écrites comme

$$\sqrt[3]{P} \leq \frac{S}{3} \leq \sqrt{\frac{P}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{S}{3}}.$$

Or $\sqrt[3]{P} \leq \sqrt{\frac{P}{3}}$ implique que $P^2 \leq P^3/27$, et donc que $P \geq 27$. Aussi $\frac{S}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{S}{3}}$ implique que $S^3/27 \leq S/3$, d'où $S \leq 3$. Mais $\sqrt[3]{P} \geq 3$ et $\sqrt[3]{\frac{S}{3}} \leq 1$ sont incompatibles avec $\sqrt[3]{P} \leq \sqrt[3]{\frac{S}{3}}$. Ainsi, le système ne peut pas avoir de solution réelle positive.

4. Démontrer que, lorsque trois cercles partagent une même corde AB, toute droite passant par A mais différente de AB détermine le même ratio $XY : YZ$, où X est un point arbitraire, distinct de B, situé sur le premier cercle, et où Y et Z sont les points où AX coupe les deux autres cercles, ces points étant étiquetés de façon à ce que Y soit entre X et Z.



Solution 1

Soit l une ligne passant par A, mais différente de AB, et relions B à A, X, Y et Z comme dans le diagramme ci-haut. Quelle que soit la ligne l choisie, les angles AXB, AYB et AZB soustendent la corde AB. Pour cette raison, les angles des triangles BXY et BXZ sont les mêmes, quelle que soit l. Ainsi, le ratio $XY : YZ$ demeure constant, par triangles similaires.

Noter que ceci est le cas, quelles que soient les positions de X, Y et Z en relation avec A. Supposons que X, Y et Z se trouvent tous du même côté de A (comme dans le diagramme) et soit $\measuredangle AXB = \alpha$, $\measuredangle AYB = \beta$ et $\measuredangle AZB = \gamma$. Alors $\measuredangle BXY = 180° - \alpha$, $\measuredangle BYX = \beta$, $\measuredangle BYZ = 180° - \beta$ et $\measuredangle BZY = \gamma$. Supposons maintenant que l est choisie de manière à ce que X soit du côté opposé de A, par rapport à Y et Z. Puisque X est de l'autre côté de la corde AB, nous avons $\measuredangle AXB = 180° - \alpha$, mais nous

Solution 2

Soit m la bissectrice perpendiculaire de AB et soient O_1, O_2 et O_3 les centres des troi cercles. Puisque AB est une corde commune aux trois cercles, les trois centres O_1 O_2 et O_3 se trouvent tous sur m. Soit l la ligne passant par A, mais différente d AB, et supposons que X, Y et Z se trouvent tous du même côté de AB, comme au diagramme ci-haut. Soient les perpendiculaires à l, partant des points O_1, O_2 et O puis rencontrant m à P, Q et R respectivement. Puisqu'une ligne passant par le centr d'un cercle bissecte tout corde du cercle,

$$AX = 2AP, \quad AY = 2AQ \quad \text{et} \quad AZ = 2AR.$$

Or

$$XY = AY - AX = 2(AQ - AP) = 2PQ \quad \text{et similairement} \quad YZ = 2QR.$$

Ainsi $XY : YZ = PQ : QR$. Mais $O_1P \,||\, O_2Q \,||\, O_3R$, donc $PQ : QR = O_1O_2 : O_2O_3$ Puisque les centres des cercles sont fixes, le ratio $XY : YZ = O_1O_2 : O_2O_3$ ne dépen pas du choix de l.

Si X, Y et Z ne se trouvent pas tous du même côté de AB, on obtient le même résulta par une preuve similaire. Par exemple, si X et Y sont de côtés opposés de AB, alor on aura $XY = AY + AX$, mais puisque dans ce cas $PQ = AQ + AP$, on aura encor $XY = 2PQ$ et le résultat en découle toujours etc.

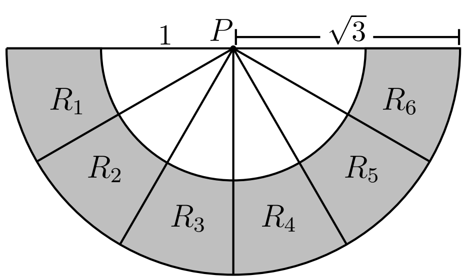
5. Soit S un ensemble de n points dans le plan, tel que la distance entre tout couple de points de S soit d'au moins une unité. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble T de S comportant au moins $n/7$ points et tel que la distance entre tout couple de points de T soit d'au moins $\sqrt{3}$ unités.

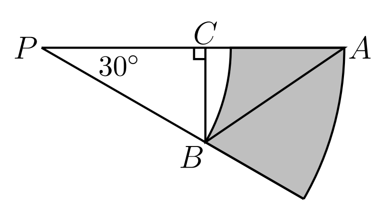
Solution

On va construire l'ensemble T de la façon suivante. Supposons que les points de S sont dans le plan xy et soit P un point dans S avec coordonnée y maximale. Ce point P fera partie de T. Maintenant, enlever de S le point P et tout autre point de S à distance inférieure à $\sqrt{3}$ de P. Parmi les points restants de S, on en choisit un avec coordonnée y maximale, on le déclare membre de T, puis on l'enlève de S en même temps que tous les points à distance inférieure à $\sqrt{3}$ du point qu'on vient d'ajouter à T. On continue ainsi, jusqu'à épuisement de tous les points de S. Il est clair que tout couple de points de S est à distance au moins $\sqrt{3}$. Pour montrer que T possède au moins $n/7$ points, on va démontrer qu'à chaque étape du processus de construction de T, au plus 6 points sont enlevés de S en même temps que P.

À une étape typique dans le processus, on a sélectionné un point P avec coordonnée y maximale, d'où tous les points à distance inférieure à $\sqrt{3}$ de P se trouvent dans le demi cercle de rayon $\sqrt{3}$ centré à P, indiqué au premier diagramme ci-bas. Puisque les points de S sont à distance au moins 1 les uns des autres (donc de P), ces points se trouvent en dehors du demi cercle de rayon 1 (ou sur sa frontière). (Ainsi, ils se trouvent dans la partie ombrée au premier diagramme.) Divisons maintenant cette région ombrée en 6 régions congrues $R_1, R_2, \ldots, R_6$ comme indiqué au diagramme.

Nous allons maintenant montrer que chacune de ces régions contient au plus un point de S. Puisque les 6 régions sont congrues, on en considère qu'une seule, comme indiqué au deuxième diagramme ci-bas. La distance entre deux points de cette région est au plus égale à la longueur du segment AB. Or les longueurs de PA et PB sont de $\sqrt{3}$ et 1 respectivement et l'angle APB est 30°. Si on construit la perpendiculaire de B vers PA à C, on voit que la longueur de PC est $\cos 30° = \sqrt{3}/2$. Ainsi, BC est la bissectrice perpendiculaire de PA, d'où $AB = PB = 1$. Donc la distance entre deux points de la région est moins que 1. En conséquence chacune des régions $R_1, \ldots, R_6$ contient au plus 1 point de S, ce qui complète la preuve.





RAPPORT DES CORRECTEURS

Chaque question valait 7 points, et chaque solution a été corrigée par deux correcteurs. Si la différence entre les deux pointages accordés était de plus d'un point, les correcteurs réévaluaient la solution jusqu'à ce qu'ils s'entendent. Si la différence était d'un seul point, ils faisaient la moyenne des deux. Le comité a ensuite repassé les meilleures épreuves pour s'assurer que le classement des gagnants était approprié.

Le tableau ci-dessous montre les points accordés à chacune des solutions, en pourcentage. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les résultats à deux décimales sont possibles, mais nous les avons arrondis pour les fins du tableau. Par exemple, selon le tableau ci-dessous, 56,5 % des élèves ont obtenu 6,5 ou 7 au premier problème. C'est dire que sur 56,5 % des examens, au moins un correcteur a accordé un 7 à la question 1.

Points	**#1**	**#2**	**#3**	**#4**	**#5**
0	1.2	9.4	34.1	40.0	52.9
1	7.1	29.4	14.1	12.9	30.6
2	3.5	20.0	7.1	8.2	9.4
3	10.6	4.7	0.0	0.0	1.2
4	4.7	4.7	0.0	0.0	0.0
5	7.1	7.1	2.4	3.5	0.0
6	9.4	5.9	10.6	14.1	3.5
7	56.5	18.8	31.8	21.2	2.4

Le mode de correction adopté dès le départ est le suivant : 7 points étaient accordés à une solution entièrement correcte et 6 points à une solution essentiellement correcte, mais contenant une erreur ou une omission minime. Il fallait avoir fait de gros progrès pour mériter 3 points, et les correcteurs n'ont seulement accordé 1 ou 2 points que si l'élève avait fait une bonne part du travail. Les notes de 4 et 5 étaient réservées aux situations exceptionnelles. Ce mode de correction a bien fonctionné pour les trois derniers problèmes, car les élèves qui avaient adopté la bonne démarche arrivaient généralement à résoudre le problème. Pour les problèmes 1 et 2, toutefois, les élèves ont progressé à des degrés beaucoup plus variables; il a donc fallu ajuster un peu les barèmes de correction, qui sont décrits ci-dessous.

PROBLÈME 1

Les concurrents ont très bien réussi ce problème. Ils ont presque tous posé les bonnes équations pour décrire la situation et pour ce faire, ils ont obtenu 3 points. Les 4 autres points ont été accordés à ceux qui ont solutionné le problème. Aucune démarche ne se démarquait dramatiquement de la solution officielle. Certains élèves ont toutefois résolu l'équation très efficacement par l'arithmétique modulaire, tandis que d'autres ont exploré toutes sortes de possibilités. Certains ont divisé m en heures et en minutes, mais cela n'a pas modifié beaucoup la solution.

PROBLÈME 2

Ce problème a été le plus difficile à noter. Un point a été accordé aux élèves qui ont trouvé un exposant n pour que 2003n º 1 mod 1000, et un autre point à ceux qui ont compris qu'il fallait ensuite réduire 20022001 mod n. Aucune des bonnes solutions ne différait grandement des solutions officielles, mais un grand nombre de concurrents ont calculé diverses puissances [did a lot of computation of various powers] au lieu d’invoquer le théorème binomial, ce qui a entraîné un nombre considérable d’erreurs. Les élèves qui connaissaient le théorème d’Euler ont immédiatement écrit 2003400 º 1 mod 1000, puisque f(1000)=400, mais ils devaient alors réduire 20022001 modulo 400 au lieu de 100.

PROBLÈME 3

Les concurrents ont utilisé une vaste gamme de méthodes pour résoudre ce problème. Quelques élèves y sont parvenus en employant des méthodes très élémentaires semblables aux deux premières solutions officielles. La plupart des élèves ont invoqué l’inégalité AM-GM [AM-GM inequality]ou l’inégalité de Cauchy-Schwarz, et plusieurs ont eu recours au calcul différentiel et intégral. Un élève s’est servi de l’inégalité de Chebyshev. La plupart des élèves qui ont supposé que le système n’avait pas de solution et qui ont adopté dès le départ une démarche raisonnable sont parvenus à prouver leur affirmation.

PROBLÈME 4

Ce problème a aussi fait l’objet de nombreuses méthodes différentes. La plupart des élèves se classaient dans l’une des deux catégories suivantes : ceux qui savaient exactement comment résoudre le problème et ceux qui n’en n’avaient qu’une très vague idée. Les concurrents qui ont seulement envisagé l’option où X,Y,Z étaient tous du même côté de A (comme sur le diagramme) ont obtenu un maximum de 6 points. Pour mériter le 7e point, il fallait au moins mentionner que les autres configurations étaient possibles et décrire comment il faudrait modifier leur méthode pour en tenir compte. Les élèves doivent comprendre que les diagrammes servent à faciliter la lecture de la question et à encourager [a consistent use of notation], mais qu’ils ne peuvent représenter toutes les possibilités. C’est l’énoncé du problème qu’il faut suivre.

À part les deux solutions officielles, une autre démarche commune consistait à supposer qu’une ligne fixe passait par B en coupant les cercles aux points P,Q,R, par exemple, et ensuite à montrer que XY:YZ=PQ:QR. C’est là une démarche correcte, et la plupart des élèves qui l’ont adoptée ont reçu 6 points. Nous n’en avons toutefois pas fait une solution officielle parce qu’il est plus encombrant de tenir compte de toutes les configurations possibles.

Plusieurs élèves ont résolu le problème en se servant de la géométrie analytique. Une démarche type consistait à fixer A et B sur un axe, de façon symétrique par rapport à l’origine [symmetrically placed about the origin], et de mettre le centre des cercles sur l’autre axe qui coupe les points a,b,c. Les calculs deviennent alors assez confus, mais les quelques concurrents qui ont utilisé cette méthode ont réussi à montrer que XY:YZ=b-a:c-b et n’ont pas eu à se préoccuper des autres cas.

PROBLÈME 5

Peu d’élèves ont réussi à avancer sensiblement dans la résolution de ce difficile problème. Les cinq élèves qui ont obtenu 6 ou 7 points ont tous adopté la démarche retenue dans les solutions officielles. Il semble que la clé consistait à construire le sous-ensemble T à l’aide d’algorithmes [construct T algorithmically] en partant d’un point de l’enveloppe convexe de S. Ceux qui ont essayé de diviser le plan en régions d’une manière ou d’une autre et qui ont invoqué le principe des tiroirs n’ont pas réussi à solutionner le problème, mais ont obtenu 1 point ou 2 pour leur démarche.