Rapport de la trente-quatrième

Olympiade mathématique du Canada

2002

UNB
UNIVERSITY OF NEW BRUNSWICK

Société mathématique du Canada

Sun Life Financial

Pour de plus amples reseignments sur

L'Olympiade mathématique du Canada

et le

Défi ouvert canadien de mathématiques

veuillez communiquer avec :

La société mathématique du Canada
577 King Edward, Suite 109
P.O.Box 450, succursale A
Ottawa, ON K1N 6N5

Téléphone : (613) 562-5702
Télécopieur: (613) 565-1539
courriel électronique: office@cms.math.ca

RAPPORT ET RÉSULTATS DE L'OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DU CANADA 2002

L'Olympiade mathématique du Canada (OMC) est un concours annuel de mathématiques parrainé par la Société mathématique du Canada (SMC) et administré par le Comité de l'Olympiade mathématique du Canada (Comité de l'OMC), un sous-comité du Comité des concours mathématiques. Créée en 1969, l'OMC a pour but d'offrir la possibilité aux élèves ayant obtenu de bons résultats à divers concours provinciaux de mathématiques de participer à une épreuve nationale. Elle sert aussi de préparation aux élèves de l'équipe canadienne qui prend part à l'Olympiade internationale de mathématiques (OIM).

Pour participer à l'OMC, les élèves doivent obtenir un résultat suffisamment élevé au Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) ou recevoir une invitation des coordonnateurs provinciaux.

Nous remercions la Financière Sun Life de son appui à titre de commanditaire principal de l'OMC 2002, ainsi que tous nos autres commanditaires : les ministères de l'Éducation de l'Ontario, du Québec, de l'Alberta, du Nouveau-Brunswick, de Terre-Neuve-et-Labrador, des Territoires du Nord-Ouest et de la Saskatchewan; le département de mathématiques et de statistique de l'Université du Nouveau-Brunswick à Fredericton, le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique de l'Université de Waterloo, le département de mathématiques et de statistique de l'Université d'Ottawa, le département de mathématiques de l'Université de Toronto, Nelson Thompson Learning et John Wiley and Sons Canada Ltd.

Les coordonnateurs provinciaux de l'OMC sont : John Denton (Collège Dawson, Québec), Diane Dowling (Université du Manitoba), Peter Crippin (Université de Waterloo, Ontario), Harvey Gerber (Université Simon Fraser, Colombie-Britannique), Gareth J. Griffith (Université de la Saskatchewan), Ted Lewis (Université de l'Alberta), Gordon MacDonald (Université de l'le-du-Prince-Édouard), Roman Mureika (Université du Nouveau-Brunswick), Michael Nutt (Université Acadia, Nouvelle-Écosse), Thérèse Ouellet (Université de Montréal, Québec) et Donald Rideout (Université Memorial, Terre-Neuve).

Les membres du sous-comité de l'OMC et les autres mathématiciens qui ont participé à l'élaboration ou à la correction de l'examen de l'OMC 2002 sont : Robert Dawson (Saint Mary's); Karl Dilcher (Dalhousie); J. P. Grossman (MIT); Richard Hoshino (Dalhousie); Richard Lockhart (Simon Fraser); Richard Nowakowski (Dalhousie); Michael Nutt (Acadia); Dorette Pronk (Dalhousie); Naoki Sato, Sun Life, Toronto; Tony Thompson (Dalhousie); Daryl Tingley (UNB); Maureen Tingley (UNB).

J'aimerais remercier le professeur Eric Marchand de l'Université du Nouveau-Brunswick, qui a traduit 'examen et les solutions de l'OMC 2002, ainsi que Caroline Baskerville, du bureau administratif de la SMC, et Linda Guthrie, du département de mathématiques et de statistique de l'Université du Nouveau-Brunswick, pour tout leur travail administratif. Je souhaite finalement remercier Graham Wright, directeur administratif de la SMC, car c'est grâce à son dévouement envers la SMC en général, et envers les activités éducatives de la Société en particulier, que les diverses activités du Comité des concours mathématiques se déroulent si bien.

Daryl Tingley, président
Comité des concours mathématiques

La 34e Olympiade mathématique du Canada (2002) a eu lieu le mercredi 27 mars 2002. Quatre-vingts élèves de 47 écoles de huit provinces canadiennes y ont pris part. Voici la répartition des candidats par province :

CB (12) AB (9) MB (2) ON (47) QC (5) NB (2) NÉ (2) TN (1)

L'OMC 2002 comprenait cinq questions de sept points chacune, pour un total de $m = 35$. Les résultats sont répartis dans les quatre divisions suivantes :

Division	**Résultats**	**Nbre d'élèves**
I	$28 \leq m \leq 35$	10
II	$20 \leq m < 28$	12
III	$15 \leq m < 20$	17
IV	$0 \leq m < 15$	41

GAGNANTS

Premier prix :

Tianyi Han, Woburn Collegiate Institute,ON
Coupe Sun Life, 2 000 $ et des livres

Deuxième prix :

Roger Mong, Don Mills Collegiate Institute,ON
1 500 $ et des livres

Troisième prix :

Paul Cheng, West Vancouver Secondary School, CB
1 000 $ et des livres

Mentions honorables :

Robert Barrington Leigh, Old Scona Academy, AB
Olena Bormashenko, Don Mills Collegiate Institute, ON
Xiaoxuan Jin, Vincent Massey Secondary School, ON
Timothy Kusalik, Queen Elizabeth High School, NÉ
Cornwall Lau, David Thompson Secondary School, CB
Feng Tian, Vincent Massey Secondary School, ON
Yang Yang, Don Mills Collegiate Institute, ON
500 $ et des livres

DEUXIÈME DIVISION

Résultats: $20 \le m < 28$

Brian Choi	Markville Secondary School, ON
Kevin Chung	Earl Haig Secondary School, ON
Shih En Lu	Marianopolis College, QC
Sumudu Fernando	Harry Ainlay Comp. High School, AB
Alex Fink	Queen Elizabeth High School, AB
Ralph Furmaniak	Tom Griffiths Home School, ON
Robin Li	St. Patrick Secondary School, ON
Henry Pan	East York Collegiate Institute, ON
Louis Francois Preville Ratel	College de l'Assomption,QC
Yin Ren	Vincent Massey Secondary School, ON
Jacob Tsimerman	Univ. of Toronto School, ON

TROISIÈME DIVISION

Résultats: $15 \le m < 20$

Maximilian Butler	Tom Griffiths Home School, ON
Aaron Chan	J.N. Burnett Secondary School, CB
Peter Du	Sir Winston Churchill High School, AB
Fan Feng	Vincent Massey Secondary School, ON
Ryan Holm	St. Ignatius High School, ON
Liang Hong	Univ. of Toronto Schools, ON
Oleg Ivrii	Don Mills Collegiate Institute, ON
Jenny Yue Jin	Earl Haig Secondary School, ON
Keigo Kawaji	Earl Haig Secondary School, ON
Songhao Li	L'Amoureaux Collegiate Institute, ON
Yichaun Liu	University Hill Secondary School, CB
Andrew Mao	Tom Griffiths Home School, ON
Mathieu Guay Paquet	Ecole secondaire Antoine-Brossard, QC
Alex Shyr	VSB/UBC Transition Program, CB
Sarah Sun	St. Mary's School, AB
Lin Ray Wung	Pinetree Secondary School, CB
David (Xin) Zhang	Woburn Collegiate Institute, ON

QUATRIÈME DIVISION

Résultats: $0 \le m < 15$

Robert Biswas	Vincent Massey Secondary School, ON
Tiffany Chao	Sir Winston Churchill Secondary, CB
Valerie Cheung	Vincent Massey Secondary School, ON
Leonid Chindelevitch	Marianopolis College, QC
Kevin Choi	Crescent School, ON
Keith Chung	Western Canada High School, AB
Mark Daniels	Comm. Hebrew Academy of Toronto, ON

Rowan Dorin	St. John's-Ravenscourt School, MB
Jerome Grand Maison	CEGEP de la Gaspesie,QC
Michael Hirsch	St. John's-Ravenscourt School, MB
Jason Hornosty	Fredericton High School, NB
Marina Hu	Burnaby South Secondary School, BC
Pawel Kosicki	Vincent Massey Secondary School, ON
Janos Kramar	Univ. of Toronto Schools, ON
Hyon Lee	Vincent Massey Secondary School, ON
Vincent Leung	Upper Canada College, ON
Charles Li	Western Canada High School, AB
Angela Lin	Sir Winston Churchill Secondary, CB
Mike Liu	Waterloo Collegiate Institute, ON
Micah McCurdy	Saint Patrick's High School, NS
Marcin Mika	Father Michael Goetz Secondary, ON
Alec Mills	Western Canada High School, AB
Amit Mukerji	Vincent Massey Secondary School, ON
Jiafei Niu	Waterloo Collegiate Institute, ON
Avery Owen	Don Mills Collegiate Institute, ON
Sharon Shao	Eric Hamber Secondary School, CB
Yihao Shen	Saint John High School, NB
Christopher Tam	Upper Canada College, ON
Alvin Tan	McNally Comp. High School, AB
Leonid Tchourakov	Grand River Collegiate, ON
Samuel Wong	University Hill Secondary School, CB
Nithum Thain	Prince of Wales Collegiate, TN
Wei Lung Tseng	Yale Secondary School, CB
Yves Wang	Northern Secondary School, ON
Chris Woo	Crescent School, ON
Kevin Yip	Don Mills Collegiate Institute, ON
Dongbo Yu	Don Mills Collegiate Institute, ON
Matei Zaharia	Jarvis Collegiate Institute, ON
Dapeng Zhao	Vincent Massey Secondary School, ON
Yin Zhao	Vincent Massey Secondary School, ON
Anjie Zhou	Westdale Secondary School, ON
Zhongying Zhou	Vincent Massey, ON

LE TRENTE-QUATRIÈME
OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DU CANADA
2002

1. Soit S un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires non-ordonnées d'éléments distincts de S soient tous différentes. Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5\}$ possède cette propriété, mais pas le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ puisque les paires $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$ ont la même somme, soit 5.

   Quel est le nombre maximal d'éléments que S peut contenir ?

2. Un entier positif n est dit **pratique** si tout entier plus petit ou égal à n peut s'écrire comme la somme de diviseurs distincts de n.

   Par exemple, les diviseurs de 6 sont **1**, **2**, **3** et **6** . Puisque

   $$1=\mathbf{1}, \quad 2=\mathbf{2}, \quad 3=\mathbf{3}, \quad 4=\mathbf{1}+\mathbf{3}, \quad 5=\mathbf{2}+\mathbf{3}, \quad 6=\mathbf{6},$$

   on voit que 6 est pratique.

   Démontrer que le produit de deux nombres pratiques est également pratique.

3. Démontrer que pour tous nombres réels positifs a, b et c,

   $$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

   et déterminer les conditions pour lesquelles on a égalité.

4. Soit Γ un cercle de rayon r. Soient A et B des points distincts sur Γ avec $AB < \sqrt{3}r$. Supposons que le cercle de centre B et de rayon AB rencontre de nouveau Γ en C. Supposons que P soit le point à l'intérieur de Γ pour lequel le triangle ABP est équilatéral. Enfin, supposons que la droite CP rencontre de nouveau Γ au point Q.

   Démontrer que $PQ = r$.

5. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

   $$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

   pour tout x et y dans N.

1. Soit S un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires non-ordonnées d'éléments distincts de S soient tous différentes. Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5\}$ possède cette propriété, mais pas le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ puisque les paires $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$ ont la même somme, soit 5.

   Quel est le nombre maximal d'éléments que S peut contenir ?

   Prmière solution

   Le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5. Pour démontrer ce résultat, on constate d'abord que les sommes de chacune des paires de l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ sont différentes. Maintenant, supposons qu'il existe un sous-ensemble S de $\{1, \dots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires d'éléments distincts de S soient tous différentes. Si tel est le cas, il doit y avoir $\binom{6}{2} = 15$ paires, formées à partir des éléments de S, variant de 1+2=3 à 8+9=17. Il en découle que chacune des sommes $3, \dots, 17$ sont représentées. Puisque les sommes 3 et 17 sont représentées, les éléments $1, 2, 8, 9$ appartiennent forcément à S. Mais on ne peut pas admettre ces 4 éléments comme éléments puisque $1 + 9 = 2 + 8$. Nous avons, donc, une contradiction ce qui démontre bel et bien que le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5.

   Seconde solution

   Le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5. Pour démontrer ce résultat, on constate d'abord que les sommes de chacune des paires de l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ sont différentes. Maintenant, supposons qu'il existe un sous-ensemble S de $\{1, \dots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires d'éléments distincts de S soient tous différentes. Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_6$, les éléments de S. Puisque $a_1 + a_6 \neq a_2 + a_5$, on peut déduire que $a_6 - a_5 \neq a_2 - a_1$. Pareillement, $a_6 - a_5 \neq a_4 - a_3$ et $a_4 - a_3 \neq a_2 - a_1$. Comme ces trois différences doivent être des entiers positifs différents, on doit avoir

   $$(a_6 - a_5) + (a_4 - a_3) + (a_2 - a_1) \geq 1 + 2 + 3 = 6\,.$$

   De façon semblable, $a_3 - a_2 \neq a_5 - a_4$ et

   $$(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) \geq 1 + 2 = 3\,.$$

   De la somme des deux inégalités ci-dessus, nous obtenons

   $$a_6 - a_5 + a_5 - a_4 + a_4 - a_3 + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 \geq 6 + 3 = 9\,,$$

   et donc $a_6 - a_1 \geq 9$. Mais ceci est impossible puisque les éléments de S sont des nombres compris entre 1 et 9. Nous avons, donc, une contradiction ce qui démontre bel et bien que le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5.

2. Un entier positif n est dit **pratique** si tout entier plus petit ou égal à n peut s'écrire comme la somme de diviseurs distincts de n.

   Par exemple, les diviseurs de 6 sont **1**, **2**, **3** et **6** . Puisque

   $$1=\mathbf{1}, \quad 2=\mathbf{2}, \quad 3=\mathbf{3}, \quad 4=\mathbf{1}+\mathbf{3}, \quad 5=\mathbf{2}+\mathbf{3}, \quad 6=\mathbf{6},$$

   on voit que 6 est pratique.

   Démontrer que le produit de deux nombres pratiques est également pratique.

   Solution
   Supposons que p et q soient des nombres pratiques. Pour un nombre entier positif $k \leq pq$, on peut écrire

   $$k = aq + b \text{ tel que } 0 \leq a \leq p,\ 0 \leq b < q.$$

   Puisque p et q sont des nombres pratiques, on peut également écrire

   $$a = c_1 + \ldots + c_m, \quad b = d_1 + \ldots + d_n$$

   où les c_i sont des diviseurs distincts de p et les d_j sont des diviseurs distincts de q. Ainsi, nous avons

   $$\begin{aligned} k &= (c_1 + \ldots + c_m)q + (d_1 + \ldots + d_n) \\ &= c_1q + \ldots + c_mq + d_1 + \ldots + d_n. \end{aligned}$$

   Chacun des nombres c_iq ; $i = 1, \ldots m$, et d_j ; $j = 1, \ldots n$ sont des diviseurs de pq. Puisque $d_j < q \leq c_iq$ pout tout i, j, les nombres c_iq and d_j sont distincts, et il en découle que pq est un nombre pratique.

3. Démontrer que pour tous nombres réels positifs a, b et c,

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

et déterminer les conditions pour lesquelles on a égalité.

Première solution.

Remarquer d'abord que $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{(a^4 + b^4)}{2} + \frac{(b^4 + c^4)}{2} + \frac{(c^4 + a^4)}{2}$. En utilisant l'inégalité $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ à trois reprises, nous obtenons

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Le côté droit de cette dernière inégalité peut s'écrire comme

$$\frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{b^2(c^2 + a^2)}{2} + \frac{c^2(a^2 + b^2)}{2}.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ à trois reprises, nous obtenons $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$. Enfin, le résultat est obtenu en divisant chacun des membres de cette dernière inégalité par le nombre positif abc.

Seconde solution.

Remarquer d'abord que l'inégalité est homogène, dans le sens que si $k > 0$ et qu'on remplace a, b, c par ka, kb, kc, on retrouve l'inégalité de départ. Donc, sans perte de généralité, nous pouvons poser $k = \frac{1}{abc} = 1$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} &= abc\left(\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}\right) \\ &= a^4 + b^4 + c^4;\end{aligned}$$

et l'inégalité équivalente $a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$, sous la contrainte $abc = 1$.

En vertu de l'inégalité

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^4,$$

on peut affirmer que $a^4 + b^4 + c^4 \geq (a + b + c) \cdot \dfrac{(a + b + c)^3}{27}$.

De plus, grâce à l'inégalité moyennes arithmétique-géométrique : $\dfrac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, il est vrai que $a + b + c \geq 3$.

Enfin, $a^4 + b^4 + c^4 \geq (a + b + c) \cdot \dfrac{(a + b + c)^3}{27} \geq (a + b + c)\dfrac{3^3}{27} = a + b + c$.

Troisième solution.

Cette démonstration est identique à la démonstration précédente, sauf que, plutôt que d'utiliser directement l'inégalité

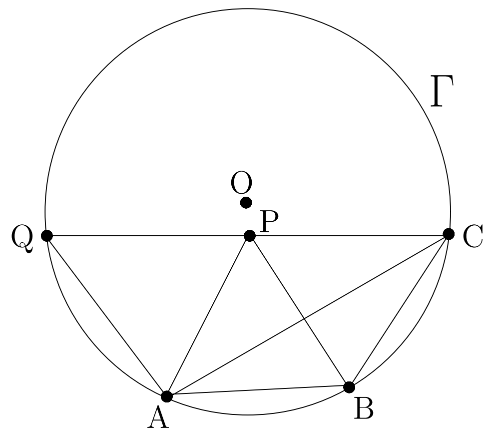
$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^4$$

dans la seconde démonstration, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz-Bunjakovsky à deux reprises de telle façon que

$$\begin{aligned}(a^4 + b^4 + c^4)(1^2 + 1^2 + 1^2) &\geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) &\geq (a + b + c)^2\end{aligned}$$

et $\dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{9} \geq \dfrac{(a + b + c)^4}{3^4}$.

4. Soit Γ un cercle de rayon r. Soient A et B des points distincts sur Γ avec $AB < \sqrt{3}r$. Supposons que le cercle de centre B et de rayon AB rencontre de nouveau Γ en C. Supposons que P soit le point à l'intérieur de Γ pour lequel le triangle ABP est équilatéral. Enfin, supposons que la droite CP rencontre de nouveau Γ au point Q. Démontrer que $PQ = r$.



Première solution.

Notons O le centre du cercle Γ, et r son rayon. Puisque $BP = BC$, on peut poser $\theta = \measuredangle BPC = \measuredangle BCP$. En vertu du fait que le quadrilatère $QABC$ est cyclique, nous avons $\measuredangle BAQ = 180° - \theta$ et, ainsi, $\measuredangle PAQ = 120° - \theta$.

De plus $\measuredangle APQ = 180° - \measuredangle APB - \measuredangle BPC = 120° - \theta$, ce qui implique $PQ = AQ$ et $\measuredangle AQP = 2\theta - 60°$.

De nouveau, en utilisant le fait que le quadrilatère $QABC$ est cyclique, $\measuredangle ABC = 180° - \measuredangle AQC = 240° - 2\theta$.

Remarquer maintenant que les triangles OAB and OCB sont congruents puisque $OA = OB = OC = r$ et $AB = BC$.

C'est alors qu'on obtient : $\measuredangle ABO = \measuredangle CBO = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = 120° - \theta$.

Pour recapituler, nous avons montré que, pour les triangles AQP and AOB, $\measuredangle PAQ = \measuredangle BAO = \measuredangle APQ = \measuredangle ABO$. De plus, $AP = AB$, ce qui implique (i) $\triangle AQP \cong \triangle AOB$, et (ii) $PQ = OB = r$, soit le résultat demandé.

Seconde solution.

Notons O le centre du cercle Γ, et r son rayon. Puisque A, P et C sont tous des points sur un cercle centré en B, nous avons $60° = \measuredangle ABP = 2\measuredangle ACP$, et $\measuredangle ACP = \measuredangle ACQ = 30°$.

Aussi, puisque Q, A et C sont des points sur Γ, nous avons $\measuredangle QOA = 2\measuredangle QCA = 60°$.

Nous pouvons en déduire que $QA = r$ étant donné qu'une corde qui sous-tend un angle de $60°$ au centre du cercle a nécessairement une longueur égale au rayon du cercle.

D'autre part, $BP = BC$, ce qui implique $\measuredangle BPC = \measuredangle BCP = \measuredangle ACB + 30°$.

Ainsi $\measuredangle APQ = 180° - \measuredangle APB - \measuredangle BPC = 90° - \measuredangle ACB$.

Puisque Q, A, B et C sont des points sur le cercle Γ, et que $AB = BC$, nous avons $\measuredangle AQP = \measuredangle AQC = \measuredangle AQB + \measuredangle BQC = 2\measuredangle ACB$.

Enfin, (i) $\measuredangle QAP = 180 - \measuredangle AQP - \measuredangle APQ = 90 - \measuredangle ACB$; (ii) $\measuredangle PAQ = \measuredangle APQ$, et alors (iii) $PQ = AQ = r$.

5. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

pour tout x et y dans $\mathbb{N}$.

Première solution.

Il est facile de vérifier que toutes les fonctions constantes: $f(x) = c$; c appartenant à $\mathbb{N}$ font partie de l'ensemble des solutions. Nous montrons, par contre, qu'il n'existe pas d'autres solutions et que f doit être une fonction constante. Afin d'établir une contradiction, supposons qu'il existe des valeurs de x et de y telles que $f(x) < f(y)$, et que nous choisissons x, y parmi ces valeurs de telle façon que $f(y) - f(x) > 0$ soit minimale. Remarquer que, pour ce choix, nous avons

$$f(x) = \frac{xf(x) + yf(x)}{x + y} < \frac{xf(y) + yf(x)}{x + y} < \frac{xf(y) + yf(y)}{x + y} = f(y)\,,$$

et, par conséquence, $f(x) < f(x^2 + y^2) < f(y)$ et $0 < f(x^2 + y^2) - f(x) < f(y) - f(x)$, ce qui contredit le choix de x et de y et achève la démonstration.

Seconde solution.

Il est facile de vérifier que toutes les fonctions constantes: $f(x) = c$; c appartenant à $\mathbb{N}$ font partie de l'ensemble des solutions. Nous montrons, par contre, qu'il n'existe pas d'autres solutions et que f doit être une fonction constante. Définissons $g(x) = f(x) - f(0)$. Nous avons alors $g(0) = 0$, $g(x) \geq -f(0)$, et

$$xg(y) + yg(x) = (x + y)g(x^2 + y^2)$$

pour tout x, y appartenant à $\mathbb{N}$. En posant $y = 0$, on obtient $g(x^2) = 0$ (en particulier, $g(1) = g(4) = 0$). En posant $x = y = 1$, on obtient $g(2) = 0$. De plus, si x, y et z sont des nombres appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$, alors

$$g(y) = -\frac{y}{x}g(x). \qquad (*)$$

Notamment, si $x = 4$ et $y = 3$, on déduit d'$(*)$ que $g(3) = g(4) = 0$. Pour un nombre pair quelconque $x = 2n > 4$, posons $y = n^2 - 1$. Remarquer que, pour un tel couple, $y > x$ et $x^2 + y^2 = (n^2 + 1)^2$. Pour un nombre impair quelconque $x = 2n + 1 > 3$, posons $y = 2(n + 1)n$. Remarquer que, pour un tel couple, $y > x$ et $x^2 + y^2 = ((n + 1)^2 + n^2)^2$. Nous en déduisons que, pour tout $x > 4$, il existe un $y > x$ tel qu'$(*)$ est vérifiée. Maintenant, afin d'établir une contradiction, supposons qu'il existe $x_0 > 4$ tel que $g(x_0) > 0$. Mais, s'il existe un tel x_0, nous pourrait forcément construire une suite $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ de telle sorte que $g(x_{i+1}) = -\dfrac{x_{i+1}}{x_i}\, g(x_i)$. Pour cette suite, on aurait $|g(x_{i+1})| > |g(x_i)|$ et les signes de $g(x_i)$ alterneraient. Puisque la fonction g prend des valeurs dans $\mathbb{N}$, on aurait aussi que $|g(x_{i+1}| \geq |g(x_i)| + 1$. Mais, on aurait également $g(x_i) < -f(0)$ pour i suffisamment grand, ce qui n'est pas possible et ce qui achève cette démonstration.

Troisième solution.
Posons W l'ensemble d'entiers positifs ou nul et supposons que la fonction $f : W \to W$ vérifie la condition:

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x^2+y^2). \qquad (*)$$

Nous montrons que f doit être une fonction constante.

Posons $f(0) = k$, et $S = \{x \mid f(x) = k\}$.

En substituant $y = 0$ dans l'expression $(*)$, on obtient $f(x^2) = k \quad \forall \ x > 0$, et il en découle que

$$x^2 \in S \quad \forall \ x > 0 \qquad (1)$$

Notamment, $1 \in S$.

Pour les choix de x et de y telles que
$x^2 + y^2 = z^2$, nous avons $yf(x) + xf(y) = (x+y)f(z^2) = (x+y)k$. Ainsi,

$$x \in S \quad \text{ssi} \quad y \in S. \qquad (2)$$

lorsque $x^2 + y^2$ est un carré parfait.

Montrons maintenant que $2^l \in S$ pour tout entier $l \geq 0$. Supposons, afin d'établir une contradiction, que n soit le plus petit entier positif ou nul tel que $f(2^n) \neq k$. De (1), n doit être impair et $\dfrac{n-1}{2}$ doit être entier. Mais $\dfrac{n-1}{2} < n$ et, donc, $f(2^{\frac{n-1}{2}}) = k$. En posant $x = y = 2^{\frac{n-1}{2}}$ dans l'expression $(*)$, on obtient $f(2^n) = k$, ce qui n'est pas possible. Ainsi, $2^l \in S$ pour tout entier $l \geq 0$.

Dans la suite, nous définissons, pour chaque entier $n \geq 2$, $p(n)$ comme le *plus grand nombre premier* tel que $p(n) \mid n$.

Proposition : Pour tout entier $n > 1$ qui n'est pas une puissance de 2, il existe une suite d'entiers $x_1, x_2, \ldots, x_r$ qui possède les propriétés suivantes:

a) $x_1 = n$.
b) $x_i^2 + x_{i+1}^2$ est un carré parfait pour chaque $i = 1, 2, 3, \ldots, r-1$.
c) $p(x_1) \geq p(x_2) \geq \ldots \geq p(x_r) = 2$.

Démonstration : Puisque n n'est pas une puissance de 2, $p(n) = p(x_1) \geq 3$. De plus, on peut poser $p(x_1) = 2m+1$, et écrire $n = x_1 = b(2m+1)^a$, où $a \geq 1$ et $p(b) < 2m+1$.

Premier cas : $a = 1$. Puisque $(2m+1, 2m^2+2m, 2m^2+2m+1)$ est un triplet de la forme (u, v, w) avec $u^2 + v^2 = w^2$, si $x_2 = b(2m^2+2m)$, alors $x_1^2 + x_2^2 = b^2(2m^2+2m+1)^2$ est un carré parfait. De plus, $x_2 = 2bm(m+1)$, et alors $p(x_2) < 2m+1 = p(x_1)$.

Second cas : $a > 1$. Si $n = x_1 = (2m+1)^a \cdot b$, posons $x_2 = (2m+1)^{a-1} \cdot b \cdot (2m^2+2m)$, $x_3 = (2m+1)^{a-2} \cdot b \cdot (2m^2+2m)^2$, …, $x_{a+1} = (2m+1)^0 \cdot b \cdot (2m^2+2m)^a = b \cdot 2^a m^a (m+1)^a$. Remarquer que, pour $1 \leq i \leq a$, $x_i^2 + x_{i+1}^2$ est un carré parfait, et $p(x_{a+1}) < 2m+1 = p(x_1)$.

Si x_{a+1} n'est pas une puissance de 2, on prolonge la suite x_i comme ci-dessous en continuant jusqu'à ce qu'on obtienne $p(x_r) = 2$ pour un entier r.

En vertu de l'expression (2), $x_i \in S$ ssi $x_{i+1} \in S$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, r-1$. Donc, $n = x_1 \in S$ ssi $x_r \in S$. Mais x_r est une puissance de 2 puisque $p(x_r) = 2$, et nous avons montré précédemment que les puissances de 2 sont éléments de S. On en conclut que $n \in S$, ce qui complète la démonstration de la proposition.

En résumé, nous avons démontré que chaque entier $n \geq 1$ est élément de S, et qu'ainsi $f(n) = k = f(0)$, pour tout $n \geq 1$; c'est-à-dire que la fonction f doit être constante. Q.E.D.

RAPPORT DES CORRECTEURS

Chaque question valait 7 points. Chaque solution d'un même examen a été corrigée par deux personnes différentes. Si les deux résultats différaient de plus d'un point, les deux correcteurs réévaluaient la réponse jusqu'à ce qu'ils arrivent à un accord. Si la différence était d'un point, on prenait la moyenne pour calculer le résultat final. Le Comité a ensuite revu attentivement les copies des gagnants pour s'assurer qu'ils avaient été classés correctement.

Le tableau ci-dessous donne, en pourcentage, le nombre de points accordés à chaque réponse.

POINTS	#1	#2	#3	#4	#5
0	1.2	28.1	31.9	51.9	37.5
1	2.5	10.6	11.9	13.8	24.4
2	10.6	12.5	10.0	3.1	13.8
3	6.9	12.5	1.9	3.1	11.9
4	12.5	6.2	0.0	0.6	5.0
5	8.1	3.1	1.9	0.6	0.0
6	6.9	3.1	9.4	0.6	1.9
7	51.2	23.8	33.1	26.2	5.6

PROBLÈME 1

Deux points ont été accordés pour un exemple d'un ensemble S de 5 éléments. La plupart des élèves se sont rendus compte qu'ils devaient supposer que S contenait 6 éléments et étrablir une contradiction.

Les participants qui ont fait la liste de toutes les paires de nombres mutuellement exclusives (ex. : S ne peut contenir à la fois les ensembles $\{1,3\}$ et $\{8,9\}$) ont perdu beaucoup de temps et ont progressé très peu ou pas du tout.)

Les élèves qui ont obtenu une bonne solution ont compris qu'ils devaient se concentrer sur les différences possibles entre les éléments de l'ensemble. Malheureusement, plusieurs ont fait des suppositions inutiles du genre Soit 1 dans l'ensemble S. Si S contient $a_1, \ldots, a_k$, alors ajoutons a_{k+1} de telle sorte que la différence $a_{k+1} - a_k$ soit la plus petite possible, en omettant de justifier qu'une telle approche permettait de trouver le plus grand ensemble S possible.

Omis ces erreurs, nous avons reçu plusieurs solutions bien rédigées. La Preuve 1 des Solutions officielles a été la plus commune. Les élèves qui ont utilisé une preuve semblable à la Preuve 2 ont rédigé de très bonnes solutions. Une autre bonne approche consistait à obtenir des restrictions sur les valeurs possibles des différences entre les nombres adjacents dans l'ensemble ordonné S. Plusieurs des élèves qui ont fait ces preuves ont toutefois perdu des points à cause d'une mauvaise explication.

PROBLÈME 2

La seule solution à ce problème obtenue par les participants ou le Comité est celle des Solutions officielles. Selon les Solutions officielles, donc, la clé du problème était $k = ap + b$ avec $0 \leq a \leq p$ et $0 \leq b < q$. Presque tous les élèves qui ont pensé à cette possibilité ont réussi à résoudre correctement le problème.

Bon nombre de participants ont supposé les cas suivants : $0 < k \leq p, p < k \leq 2p, 2p < k \leq 3p, \cdots$. Même si ces cas utilisent en effet $k = ap + b$, les élèves qui ont procédé ainsi n'ont généralement pas réussi à montrer que la somme était constituée de facteurs distincts; ils ont donc reçu 2 ou 3 points.

Un point a été accordé aux participants qui ont remarqué quelque chose d'intéressant à propos des nombres pratiques, par exemple que les nombres pratiques (autres que 1) doivent être des nombres pairs, ou que les puissances de 2 sont pratiques.

PROBLÈME 3

Il était possible de résoudre ce problème de plusieurs façons. En effet, nous avons reçu plus de dix solutions correctes différentes. La plupart des solutions correctes faisaient appel à une variation de l'inégalité AM-GM ou à l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Il était toutefois possible de résoudre le problème sans faire appel à ces onégalités, notamment à l'aide d'ingénieuses manipulations algébriques. Les élèves ont obtenu 1 ou 2 points pour des tentatives non négligeables faisant appel aux inégalités, et ont obtenu une partie des points si leurs efforts menaient à une solution.

PROBLÈME 4

Nous avons reçu de nombreuses solutions différentes, mais toutes les solutions correctes étaient fondées sur la géométrie ou la trigonométrie. Aucun participant n'a réussi à résoudre le problème en se servant des coordonnées, et personne n'a essayé de procéder à une transformation. Un point a été accordé à ceux qui ont trouvé une relation non négligeable entre les angles ou pour le cas particulier de $AD = r$. Deux points ont été accordés à ceux qui ont trouvé que $QA = QP$. Enfin, ceux qui ont trouvé que $\angle QOA = 60°$ ont obtenu trois points. Seuls les élèves qui se sont approchés sensiblement d'une solution ont obtenu plus de trois points.

PROBLÈME 5

Peu d'élèves ont vraiment réussi à ce problème extrêmement difficile. La bonne réponse était la suivante : $f(x)$ est égal à la constante c, pour tous les entiers naturels x. Les élèves ont reçu un point s'ils ont vérifié que $f(x) = c$ était une solution. Certains ont été capables de vérifier le résultat lorsque x est un carré parfait ou que x est une puissance de 2; ils ont alors reçu un point de plus. Six élèves seulement ont obtenu 6 ou 7 points à ce problème : quatre d'entre eux ont proposé des solutions très semblables à la Solution officielle, et les autres ont obtenu des solutions qui étaient un mélange de la deuxième Solution officielle et de la troisième.