CONSIGNES AUX ÉLÈVES

Consignes générales :

1) N’ouvre pas le livret d’examen jusqu’à ce que ton superviseur d’examen (enseignant superviseur) ne te l'indique.

2) **Avant le début de l’examen, le superviseur t’accordera quelques minutes pour remplir la section sur l’identité des participants à la première page de l'examen.** Tu n’as pas à te presser. Assure-toi de remplir tous les champs d’information requis et d’écrire lisiblement.

3) **La lisibilité est importante :** Assure-toi que le crayon que tu comptes utiliser est suffisamment foncé pour que tes solutions soient faciles à lire.

4) Une fois que tu auras terminé l'examen et que tu l'auras remis au superviseur/enseignant, tu pourras quitter la salle.

5) Il <u>ne faut pas</u> discuter des questions et des solutions de l’examen du DOCM publiquement ou les partager (y compris en ligne) pendant au moins 24 heures.

Format de l’examen :

Le DOCM compte trois parties à faire en 2 heures et 30 minutes :

PARTIE A: Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. <u>Tu n’as pas à montrer ton travail.</u> Une bonne réponse finale donne les points complets. Si toutefois ta réponse finale n’est pas la bonne et que tu as montré ton travail dans l’espace réservé à cet effet, tu pourrais obtenir des points partiels.

PARTIE B: Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. L’attribution des notes et des notes partielles se fera comme pour la partie A.

PARTIE C: Quatre problèmes de preuve détaillés valant 10 points chacun. <u>Il faut montrer tout son travail.</u> On pourrait accorder des notes partielles.

Les diagrammes fournis *ne sont pas* à l’échelle; ce ne sont que des aides.

Brouillons/feuilles supplémentaires : Tu *peux* utiliser du papier brouillon, mais tu dois jeter les brouillons une fois ton travail terminé et que tu remets ton livret d’examen. <u>Seul le travail qui figure dans les pages fournies dans le livret sera évalué et noté.</u> Il est interdit d'insérer des pages supplémentaires dans votre livret d’examen.

Solutions exactes : On s’attend à ce que tous les calculs et les réponses soient exprimés en des chiffres exacts tels que 4π, 2 + , $\sqrt{7}$, etc., plutôt que 12,566, 4,646, etc.

Prix : Les noms des lauréats seront publiés sur le site Web de la Société mathématique du Canada.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2021

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

Identité du participant

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et fournir tous les détails requis, à défaut de quoi votre examen pourrait être rejeté. Cet examen n'est pas considéré comme étant valide à moins d'être accompagné par le formulaire signé de votre superviseur d'examen/enseignant.

1. Prénom : (obligatoire)

2. Nom de famille : (obligatoire)

3. Êtes-vous actuellement inscrit(e) à temps plein à une école primaire, secondaire ou un Cégep ou suivez-vous un enseignement à la maison depuis le 15 septembre de cette année? (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ Non

4. Êtes-vous citoyen(ne) canadien(ne) ou résident(e) permanent(e) du Canada? (quelle que soit votre adresse actuelle) (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ Non

5. Date de naissance : (obligatoire)

A A A A M M J J

6. Année de scolarité : (obligatoire)

☐ 8 ☐ 10 ☐ 12
☐ 9 ☐ 11 ☐ Cégep

autre: ______________

7. Sexe : (facultatif)

☐ Féminine
☐ Masculin
☐ Autre

8. Adresse électronique : (facultatif)

NE PAS PHOTOCOPIER D'EXAMENS NON REMPLIS! Chaque page de chacun des exemplaires est pré-codée de manière unique pour faciliter l'attribution assistée par ordinateur des notes.

Question A1 (4 points)

Étant donné un nombre réel x vérifiant $(x-2)(x+2) = 2021$, déterminez la valeur de $(x-1)(x+1)$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A2 (4 points)

Julie a mangé la totalité des friandises contenues dans une boîte en quatre jours. Au cours du premier jour, elle a mangé $\frac{1}{5}$ du nombre total de friandises. Le deuxième jour, elle a mangé la moitié des friandises qui restaient à la fin du premier jour. Le troisième jour, elle a mangé la moitié des friandises qui restaient au terme du deuxième jour. Quelle portion des friandises initialement contenues dans la boîte a-t-elle mangée au cours du quatrième jour ? Exprimez votre réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

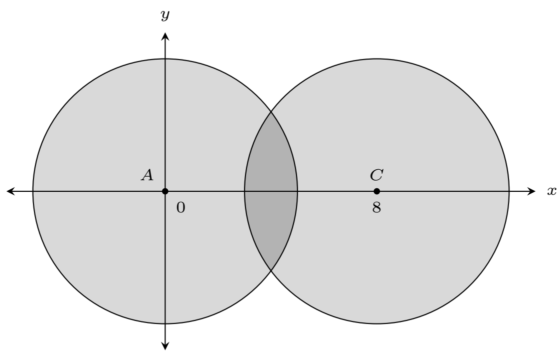
Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A3 (4 points)

Deux cercles dont les rayons mesurent 5 unités sont tracés dans le plan cartésien. Les coordonnées de leurs centres respectifs, désignés par A et C, sont $(0,0)$ et $(8,0)$. Combien de points du plan dont les deux coordonnées sont des nombres entiers y-a-t-il dans l'intersection (incluant la frontière) de ces deux cercles ?



Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A4 (4 points)

Mariya se rend à l'école en combinant la marche et la planche à roulettes. Elle peut s'y rendre en 38 minutes si elle marche pendant 25 minutes et qu'elle se déplace en planche à roulettes pendant 13 minutes, ou encore elle peut s'y rendre en 31 minutes si elle marche pendant 11 minutes et qu'elle se déplace en planche à roulettes pendant 20 minutes. Combien de temps (en minutes) lui faudrait-il pour se rendre à l'école uniquement en marchant ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B1 (6 points)

Un sac contient deux dés de forme régulière (c'est-à-dire de forme cubique) de taille identique. L'un des dés a le chiffre 2 inscrit sur chacune de ses faces. L'autre dé a le chiffre 2 inscrit sur trois de ses faces et le chiffre 4 inscrit sur chacune des faces opposées à celles sur lesquelles est inscrit le chiffre 2. On pige un dé et on regarde l'une de ses faces ; il y est inscrit le chiffre 2. Quelle est la probabilité que la face opposée à celle que l'on observe porte également le chiffre 2 ? Exprimez votre réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B2 (6 points)

Quel est le coéfficient du terme x^{2021} dans l'expression obtenue en développant le produit

$$(2021x^{2021} + 2020x^{2020} + \cdots + 3x^3 + 2x^2 + x)(x^{2021} - x^{2020} + \cdots + x^3 - x^2 + x - 1)$$

et en simplifiant l'expression obtenue ? À supposer que le motif indiqué se répète.

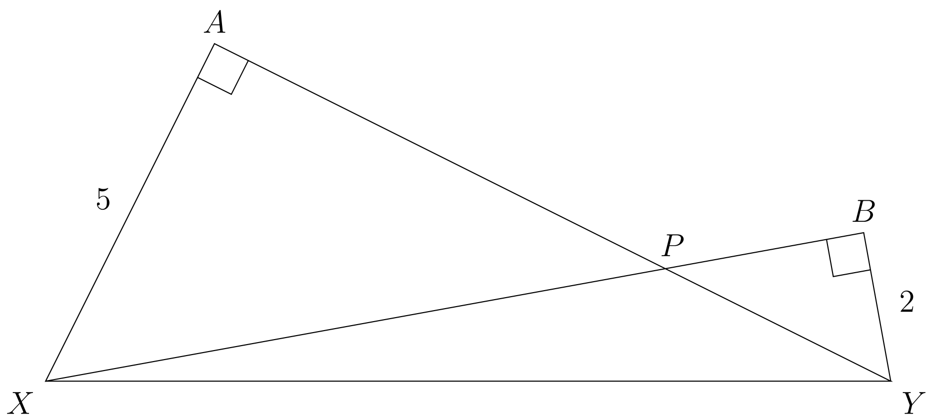
Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B3 (6 points)

Deux triangles rectangles ΔAXY et ΔBXY partagent une hypoténuse commune XY. Les côtés AY et BX se rencontrent en P. On connaît la mesure (en unité) de certains des côtés de ces triangles : $AX = 5$, $AY = 10$ et $BY = 2$. Déterminez l'aire (en unités carrés) de ΔPXY.



Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B4 (6 points)

L'équation $\sin x = \dfrac{x}{2021\pi}$ possède exactement n solutions. Nous mesurons x en radians. Trouvez n.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question C1 (10 points)

(a) Déterminez tous les points $P(x, y)$ pour lesquels $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ et P sont les sommets d'un parallélogramme.

(b) Deux droites parallèles croisent la parabole (horizontale) $x = y^2$ en quatre points distincts : $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(9, 3)$ et Q. Déterminez les coordonnées de tous les points possibles $Q(x, y)$.

(c) Deux droites parallèles croisent la parabole $x = y^2$ en quatre points distincts : $(0, 0)$, $(1, 1)$, (a^2, a) et V. Notez que $a \neq 0, \pm 1$ désigne ici un nombre réel. Déterminez les coordonnées de tous les points possibles $V(x, y)$. La réponse doit être exprimée en fonction de a.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C1 (suite)

Question C2 (10 points)

Soient $m, n \geq 2$ des entiers positifs. Chaque composante d'une grille $m \times n$ contient un nombre réel dans l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire entre -1 et 1 inclusivement. La grille possède également la propriété suivante : la somme des quatre composantes dans chaque *sous-grille* 2×2 est égale à 0. (Une sous-grille 2×2 est l'intersection de deux rangées adjacentes et de deux colonnes adjacentes de la grille d'origine.)
Soit S la somme de toutes les composantes de la grille.

(a) Supposons que $m = 6$ et $n = 6$. Expliquez pourquoi $S = 0$.

(b) Supposons que $m = 3$ et $n = 3$. Si les éléments de la grille sont

a	b	c
d	e	f
g	h	i

,

montrez que $S + e = a + i = c + g$.

(c) Supposons que $m = 7$ et $n = 7$. Déterminez la valeur maximale que peut prendre S.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C2 (suite)

Question C3 (10 points)

Xintong joue à un jeu qui consiste à transformer un nombre à six chiffres en un autre nombre du même type. Les nombres peuvent débuter par un ou plusieurs zéros, mais ils ne peuvent ni aller au-delà de 6 chiffres ni descendre sous 0. Chaque coup consiste d'exactement une des transformations suivantes :
• P : effectuer une permutation de sorte à envoyer le dernier chiffre au début (par exemple 092347 → 709234) ;
• A : ajouter 1001 au nombre (par exemple 709234 → 710235) ;
• S : soustraire 1001 au nombre (par exemple 709234 → 708233).
Il peut toutefois réaliser ces transformations autant de fois qu'il le désire et dans l'ordre qui lui plaît.

(a) Montrez qu'il est possible de transformer 202122 en 313233.

(b) Montrez que transformer 999999 en 000000 peut être accompli en huit coups.

(c) Montrez que tout multiple de 11 demeure un multiple de 11 au terme de n'importe quelle enchaînement de coups.

(d) Montrez qu'il est impossible de transformer 112233 en 000000.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C3 (suite)

Question C4 (10 points)

On dit d'une paire (F, c) qu'elle est *bonne* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

(1) $F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_m x^m$, $(m \geq 1)$ est un polynôme nonconstant à coéfficients entiers.

(2) c est un nombre réel qui n'est pas un entier.

(3) $F(c)$ est un entier.

Par exemple, les paires $(6x, \frac{1}{3})$ et $(1 + x^3, 5^{1/3})$ sont toutes deux bonnes mais aucune des paires $(6x, \frac{1}{4})$, $(6x, 2)$, $(\frac{x}{6}, \frac{1}{3})$ et $(\frac{x^2}{6}, 6)$ n'est bonne.

(a) Soit $c = \frac{1}{2}$. Donnez un exemple d'un polynôme F pour lequel la paire (F, c) est bonne mais $(F, c + 1)$ ne l'est pas.

(b) Soit $c = \sqrt{2}$. Donnez un exemple d'un polynôme F pour lequel les paires (F, c) et $(F, c + 1)$ sont bonnes.

(c) Montrez que pour toute bonne paire (F, c), si c est un nombre rationnel alors il existe une infinité d'entiers non nuls n pour lesquels la paire $(F, c + n)$ est bonne.

(d) Montrez que si la paire $(F, c + n)$ est bonne pour tout entier n, alors c est un nombre rationnel.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C4 (suite)

Principaux commanditaires

Partenaires

Dalhousie University
École Polytechnique
Memorial University
MacEwan University
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
University of Regina
University of Saskatchewan
University of Toronto
University of Waterloo
York University

ASDAN China
Banff International Research Station
Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Gouvernement de l'Alberta
Gouvernement de l'Île-du-Prince-Édouard
Gouvernement du Manitoba
Gouvernement du Nouveau-Brunswick
Gouvernement de la Nouvelle Écosse
Gouvernement du Nunavut
Gouvernement de l'Ontario
CRSNG
University of Toronto Schools