Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2020

Solutions officielles

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

L'examen compte trois sections :

A. Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

B. Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

C. Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune.

Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante : https://docm.math.ca/2020/practice.html

 26 janvier 2021

Section A – 4 points pour chaque question

A1. Si chaque enfant présent à une fête prend exactement une pomme dans un panier de fruits, alors il restera 7 dans le panier après la fête. S'il y avait eu 16 pommes de plus dans le panier de fruits, il aurait été possible pour chaque enfant de prendre exactement deux pommes et puis le panier serait vide. Combien d'enfants ont pris part à la fête ?

Solution : Désignons respectivement par a et k le nombre de pommes et le nombre d'enfants. On a $a - k = 7$ et $a - 2k = -16$. Ainsi $a = 7 + k$ et $k = 7 + 16 = 23$.

Réponse : $\boxed{23}$

A2. Il est possible de créer 24 nombres à quatre chiffres distincts en utilisant chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4 exactement une fois. Parmi ces nombres à quatre chiffres, combien y en a-t-il qui sont divisibles par 4 ?

Solution : Un nombre est divisible par 4 si et seulement si ses deux derniers chiffres sont 12, 32 ou 24. Or, dans chacun de ces cas, il y a exactement deux nombres possibles. Ainsi, il y a exactement 6 nombres divisibles par 4 comportant chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4 exactement une fois.

Réponse : $\boxed{6}$

Solution alternative : On pourrait énumérer les nombres explicitement : 3412, 4312, 1432, 4132, 1324, 3124.

A3. Une personne peut fabriquer n objets d'un certain type en une heure. Anne commence la fabrication à 10:00 tandis que Bob débute à 10:20. Cody et Deb, eux, commencent à 10:40.
Si Anne, Bob, Cody et Deb travaillent tous au même rythme et que ce rythme demeure constant, ils auront, lorsque sonnera 11:00, fabriqué un total de 28 objets. Trouvez n.

Solution : À 11:00, Anne aura travaillé 1 heure tandis que Bob aura travaillé $\frac{2}{3}$ d'heure. Cody et Deb, eux, auront travaillé $\frac{1}{3}$ d'heure. Ensemble, ils auront travaillé $1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ heures. Ainsi $n = 28 \div \frac{7}{3} = 12$.

Réponse : $\boxed{12}$

A4. Si a et b désignent les racines du polynôme $x^2 + x - 2020 = 0$, trouvez $a^2 - b$.

Solution : Comme a et b satisfont l'équation polynômiale, on a $a^2 + a - 2020 = 0$. Ce polynôme est $x^2 - (a + b)x + ab = 0$, alors $a + b = -1$. Alors

$$a^2 - b = -a + 2020 - b = -(a + b) + 2020 = 1 + 2020 = 2021.$$

De façon alternative, on peut résoudre l'équation pour obtenir $a = \frac{-1+\sqrt{8081}}{2}$ et $b = \frac{-1-\sqrt{8081}}{2}$. Alors

$$a^2 - b = \frac{1 - 2\sqrt{8081} + 8081}{4} - \frac{-1 - \sqrt{8081}}{2} = \frac{8084}{4} = 2021.$$

L'autre solution, c'est-à-dire $a = \frac{-1-\sqrt{8081}}{2}$ et $b = \frac{-1+\sqrt{8081}}{2}$, nous donne la même réponse. En effet,

$$a^2 - b = \frac{1 + 2\sqrt{8081} + 8081}{4} - \frac{-1 + \sqrt{8081}}{2} = \frac{8084}{4} = 2021.$$

Réponse : $\boxed{2021}$

Section B – 6 points pour chaque question

B1. Un ensemble S contient 6 entiers positifs distincts. La moyenne des deux plus petits entiers est de 5 alors que la moyenne des deux plus grands entiers est de 22. Quelle est la plus grande valeur possible pour la moyenne de tous les nombres dans l'ensemble S ?

Solution : Soit $S = \{s_1, \ldots, s_6\}$, où $s_1 < s_2 < \cdots < s_6$. Alors $s_1 + s_2 = 10$ et $s_5 + s_6 = 44$. Comme s_5 et s_6 sont distincts, on a $s_5 \leq 21$. Il s'ensuit que $s_4 \leq s_5 - 1 \leq 20$ et $s_3 \leq s_4 - 1 \leq 19$. Ainsi

$$s_1 + \cdots + s_6 = 10 + s_3 + s_4 + 44 \leq 10 + 19 + 20 + 44 = 93$$

La plus grande valeur possible pour la moyenne est donc $\frac{93}{6} = \frac{31}{2} = \boxed{15.5}$. Notons que cette valeur est effectivement atteinte pour $S = \{4, 6, 19, 20, 21, 23\}$.

Réponse : $\boxed{15.5}$

B2. Alice place une pièce de monnaie sur un table, face vers le haut. Puis elle éteint la lumière et quitte la salle. Bill entre dans la salle avec deux pièces de monnaie en main. Il lance ensuite les deux pièces sur la table et ressort. Carl entre à son tour dans la salle sombre et prend un pièce de monnaie au hasard. C'est alors qu'Alice revient et allume la lumière. Elle observe qu'il y a deux pièces de monnaie sur la table et toutes deux sont face vers le haut. Quelle est la probabilité que la pièce choisie par Carl ait elle aussi été disposée face vers le haut ?

Solution :

Puisqu'on débute avec une pièce face vers le haut, il y a 4 configurations possibles lorsque Carl entre dans la pièce, à savoir FFF, FFP, FPF, FPP. Puisqu'il reste deux pièces face vers le haut lorsque Carl quitte la pièce, la configuration FPP est impossible. Considérons les configurations restantes :

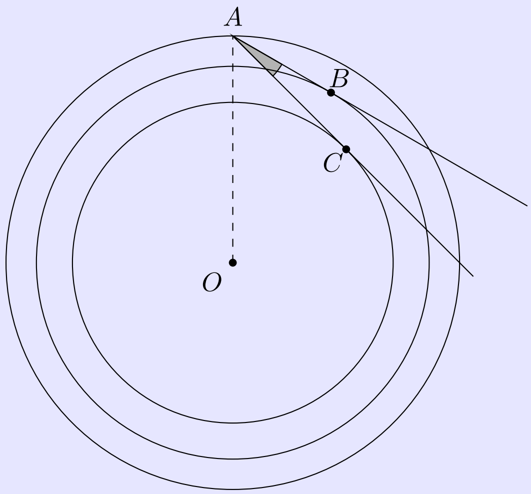
Cas 1 : PPP Il y a 3 façons dont Carl peut choisir un pièce tout en laissant deux pièces face vers le haut sur la table. Toutes ces façons impliquent que Carl choisisse une pièce disposée face vers le haut.

Cas 2 : PPF ou PFP Pour chacune de ces configurations, il n'y a qu'une seule façon pour Carl de laisser deux pièces face vers le haut sur la table. Il lui faut en effet piger la pièce présentant la face vers le bas.

En définitive, la probabilité que Carl pige une pièce face vers le haut est $\frac{3}{5}$.

Réponse : $\boxed{\frac{3}{5}}$

B3. On trace trois cercles centrés en O et d'aire 2π, 3π et 4π. Partant d'un point A situé sur le plus grand des trois cercles, on trace une droite tangente au cercle de taille intermédaire et on note par B le point point de tangence. Partant à nouveau du point A, on trace également une droite tangente au plus petit cercle et on note par C le point de tangence. Si les points B et C sont situés du même côté de OA, trouvez la valeur de $\angle BAC$.



Solution :

Tracer les segments OB et OC. Notez que ABO et ACO sont des angles droits. Le segment de droite OB étant le rayon d'un cercle d'aire 3π, il est donc de longueur $OB = \sqrt{3}$. De même, le segment de droite OC étant le rayon d'un cercle d'aire 2π, il est donc de longueur $OC = \sqrt{2}$. Toujours en procédant de la même façon, on obtient que OA est de longueur 2.

Considérons le triangle ABO. On a $\sin\angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que $\angle BAO = 60°$.

Considérons le triangle ACO. On a $\sin\angle CAO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de sorte que $\angle CAO = 45°$.

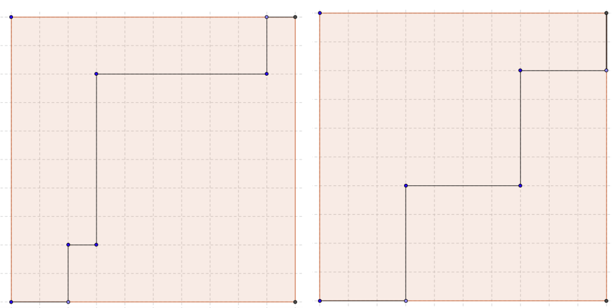
Ainsi $\angle BAC = \angle BAO - \angle CAO = 60° - 45° = 15°$.

Réponse : $\boxed{15°}$

B4. Une fourmis se promène sur une grille carrée 10×10. Elle va du coin inférieur gauche de la grille vers le coin diagonalement opposé, marchant seulement sur les lignes de la grille et en empruntant toujours le chemin le plus court qui soit. Soit $N(k)$ le nombre de chemins différents pouvant être empruntés par la fourmis si celle-ci effectue exactement k virages. Trouvez $N(6) - N(5)$.

Solution :

Ces chemins sont paramétrés par leur direction de départ (nord ou est) ainsi que par les longueurs de tous les segments vers le nord ou vers l'est $\{a_j, j = 1, .., k+1\}$, la somme des ces longueurs doit être de 10 pour chacune des deux directions. Il y a exactement un segment de plus que le nombre de virages. Ainsi pour $k = 5$ on a $a_1 + a_3 + a_5 = 10$ et $a_2 + a_4 + a_6 = 10$, tandis que pour $k = 6$ on a $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 10$ et $a_2 + a_4 + a_6 = 10$. Des exemples de trajets commençant à l'est avec respectivement 6 et 5 virages sont présentés ci-dessous :



Soit P_ℓ le nombre de solutions positives et entières à l'équation $b_1 + b_2 + \cdots + b_\ell = 10$.

On vérifie aisément que $P_\ell = \binom{9}{\ell-1}$ puisqu'il y a $10 - 1 = 9$ espaces dans une rangée de 10 objets et on choisit $\ell - 1$ d'entre eux pour y insérer un délimiteur ; les nombre d'objets entre deux délimiteurs adjacents sont respectivement b_i.

Il faut que $P_3 = \binom{9}{2} = 36$ et $P_4 = \binom{9}{3} = 84$.

Ainsi, le nombre de chemins est $N(5) = 2P_3P_3 = 2592$ et $N(6) = 2P_3P_4 = 6048$.

Le facteur 2 tient compte du fait qu'on peut commencer par se déplacer vers le nord ou vers l'est. Par conséquent $N(6) - N(5) = 2P_3(P_4 - P_3) = 2 \times 36 \times (84 - 36) = \boxed{3456}$.

Autre solution : Après avoir fixé la direction initiale, l'ensemble des colonnes et des rangées sur lesquelles on vire détermine de manière unique le chemin parcouru. Par exemple, si la première marche est horizontale, alors pour k pair la dernière marche doit être horizontale, ce qui signifie que nous sommes obligés de choisir la dernière ligne comme l'une des lignes sur laquelle nous nous virons. De même, lorsque k est impair, nous sommes obligés de nous virer à la dernière colonne. Ainsi, il y a $\binom{n-1}{\lfloor (k-1)/2 \rfloor}$ ensembles possibles de rangées et $\binom{n-1}{\lceil (k-1)/2 \rceil}$ ensembles possibles de colonnes. Il faut ensuite multiplier le résultat obtenu par deux pour tenir compte du choix initial de la direction. Dans le cas présent $n = 10$ et $k = 6$ ou $k = 5$, de sorte que $N(6) - N(5) = 2\binom{9}{2}\binom{9}{3} - 2\binom{9}{2}\binom{9}{2} = 2 \times 36 \times (84 - 36) = \boxed{3456}$.

Réponse : $\boxed{3456}$

Section C – 10 points pour chaque question

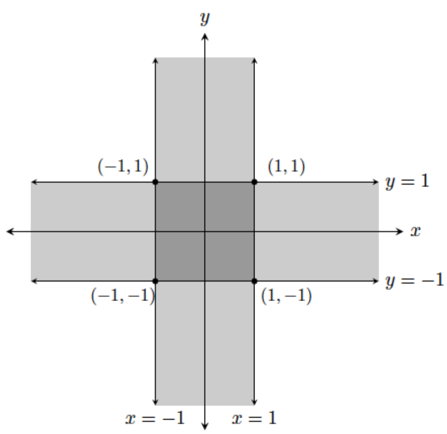
C1. Trouvez les aires des trois polygônes définis par les conditions (a), (b), et (c) suivantes, respectivement.

(a) le système d'inégalités $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

(b) l'inégalité $|x| + |y| \leq 10$

(c) l'inégalité $|x| + |y| + |x + y| \leq 2020$

Solution (a) : Les points vérifiants ces contraintes sont les (x, y) pour lesquels $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$. Il s'agit d'un carré de sommets $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$ et $(-1, -1)$. L'aire de ce carré est $\boxed{4}$.

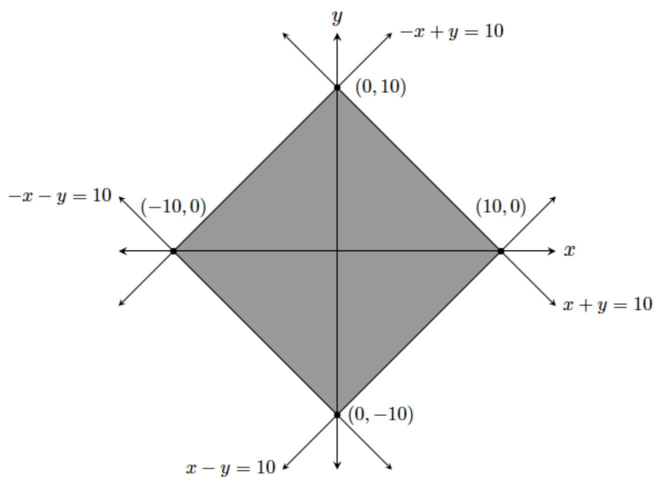


Solution (b) :
Considérons le premier quadrant $x \geq 0, y \geq 0$. Alors $|x| = x, |y| = y$ et on a $x + y \leq 10$. On a ainsi tous les points (x, y) situés à l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0), (10, 0)$ et $(0, 10)$.

Considérons le second quadrant $x \leq 0, y \geq 0$. Alors $|x| = -x, |y| = y$ et on a $-x + y \leq 10$. On a ainsi tous les points (x, y) situés à l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0), (-10, 0)$ et $(0, 10)$.

Considérons le troisième quadrant $x \leq 0, y \leq 0$. Alors $|x| = -x, |y| = -y$ et on a $-x - y \leq 10$, ou, de façon équivalente, $x + y \geq -10$. On a ainsi tous les points (x, y) situés à l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0), (-10, 0)$ et $(0, -10)$.

Considérons le quatrième quadrant $x \leq 0, y \leq 0$. Alors $|x| = x, |y| = -y$ et on a $x - y \leq 10$. On a ainsi tous les points (x, y) situés à l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0), (10, 0)$ et $(0, -10)$.



L'aire de chacun de ces quatre triangles est $(10\times 10)/2 = 50$. Ceux-ci sont positionnés de sorte à former un carré de sommets $(\pm 10, 0)$ et $(0, \pm 10)$. L'aire totale de ce carré est $\boxed{200}$.

C1(b) Solution alternative :
Considérons le premier quadrant $x \geq 0, y \geq 0$. Alors $|x| = x$ et $|y| = y$, et on a $x + y \leq 10$. Donc nous avons tous les points (x, y) à l'intérieur du triangle dont les sommets sont $(0, 0), (10, 0), (0, 10)$. Par symétrie, la figure entière est la rotation du carré, centré à l'origine. Chacun de ses côtés est de longueur $\|(10, 0) - (0, 10)\| = \sqrt{(10^2 + 10^2)} = \sqrt{200}$. Ainsi, l'aire du carré est de $\sqrt{200}^2 = \boxed{200}$.

C1. (c) l'inégalité $|x| + |y| + |x + y| \leq 2020$

Solution (c) :
Considérons d'abord la région circonscrite par l'équation $|x| + |x + y| + |y| = 2$.

On distingue les cas suivants :

1) Si $x \geq 0, y \geq 0$ alors $x + x + y + y \leq 2$, de sorte que $x + y \leq 1$. Cela nous donne un triangle de sommets $(0, 0), (0, 1)$ et $(1, 0)$ dont l'aire est 0.5.

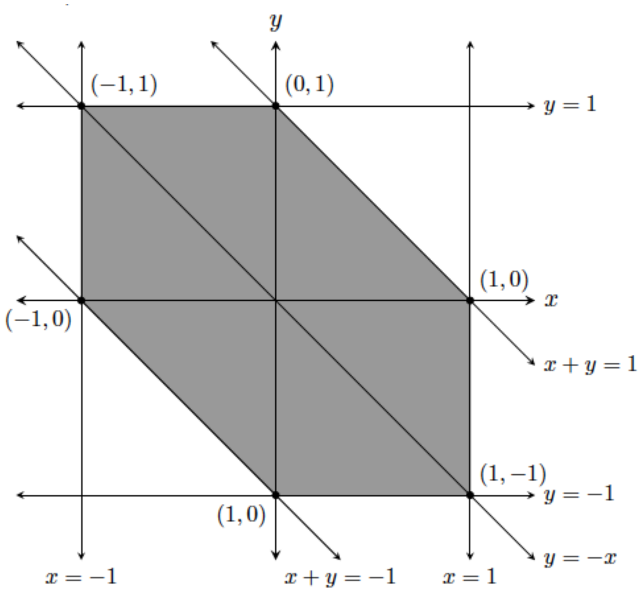
2) Si $x \leq 0, y \geq 0$ et $x \geq -y$ alors $-x + x + y + y \leq 2$, de sorte que $y \leq 1$. Cela nous donne un triangle de sommets $(0, 0), (0, 1)$ et $(-1, 1)$ dont l'aire est 0.5.

3) Si $x \leq 0, y \geq 0$ et $x \leq -y$ alors $-x - x - y + y \leq 2$, de sorte que $x \geq 1$. Cela nous donne un triangle de sommets $(0, 0), (-1, 0)$ et $(-1, 1)$ dont l'aire est 0.5.

4) Si $x \leq 0, y \leq 0$ alors $-x - x - y - y \leq 2$, de sorte que $x + y \geq -1$. Cela nous donne un triangle de sommets $(0, 0), (0, -1)$ et $(-1, 0)$ dont l'aire est 0.5.

5) Si $x \geq 0, y \leq 0$ et $x \geq -y$ alors $x + x + y - y \leq 2$, de sorte que $x \leq 1$. Cela nous donne un triangle de sommets $(0, 0), (1, 0)$ et $(1, -1)$ dont l'aire est 0.5.

6) Si $x \geq 0, y \leq 0$ et $x \leq -y$ alors $x - x - y - y \leq 2$, de sorte que $y \geq -1$. Cela nous donne un triangle de sommets $(0, 0), (0, -1)$ et $(1, -1)$ dont l'aire est 0.5.



Par conséquent, ces six triangles forment un hexagone de sommets $(\pm 1,0),(0,\pm 1)$ et $(-1,1),(1,-1)$, dont l'aire est de 3. Un changement d'échelle d'un facteur de 1010 nous donne une aire de $3(1010)^2 = 3060300$.

Si on procède directement (c'est-à-dire sans faire de changement d'échelle), on obtient que l'aire de chaque triangle est de $1010^2/2 = 505 \times 1010 = 510050$. L'aire des six triangles est donc de $510050 \times 6 = 3060300$.

Solution alternative C1(c) :

Cette région est entièrement contenue dans le carré $\begin{cases} |x| \leq 1010 \\ |y| \leq 1010 \end{cases}$.

Quelles parties du carré ($|x| \leq 1010$ & $|y| \leq 1010$) sont dans la région $|x|+|y|+|x+y| \leq 2020$?
Le complément est $|x| \leq 1010, |y| \leq 1010$ et $|x+y| > 1010$. Donc, on enlève 2 triangles d'aire $\frac{1}{2}(1010)^2$ (un total de 1010^2) d'un grand carré d'aire 2020^2, ce qui donne $1010^2(4-1) = 1020100 \times 3 = 3060300$.

C2. Une expression de la forme

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$$

est appelée *fraction continue*.

(a) Exprimez le x donné ci-dessus sous la forme d'une fraction réduite $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers positifs.

(b) Exprimez $\dfrac{355}{113}$ sous la forme d'une fraction continue $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}}$, où a, b, et c sont des entiers positifs.

(c) Soit

$$y = 8 + \cfrac{1}{8 + \frac{1}{8+\frac{1}{8+\cdots}}},$$

où le développement se poursuit à l'infini. Sachant que y peut également s'écrire sous la forme $p + \sqrt{q}$, trouvez les entiers p et q.

Solution (a) : En procédant à rebours, on obtient

$$\begin{aligned} 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}}} &= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{4}{13}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{\frac{30}{13}} \\ &= 1 + \frac{13}{30} \\ &= \frac{43}{30} \end{aligned}$$

Solution (b) : En procédant comme à la partie (a) mais à contresens, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{355}{113} &= 3 + \frac{16}{113} \\ &= 3 + \cfrac{1}{\frac{113}{16}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{16}} \end{aligned}$$

C2. (c) Soit

$$y = 8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cdots}}},$$

où le développement se poursuit à l'infini. Sachant que y peut également s'écrire sous la forme $p + \sqrt{q}$, trouvez les entiers p et q.

Solution (c) : Notons que

$$y = 8 + \frac{1}{y}.$$

En remaniant cette équation, on obtient l'équation quadratique

$$y^2 - 8y - 1 = 0$$

dont les solutions sont données par

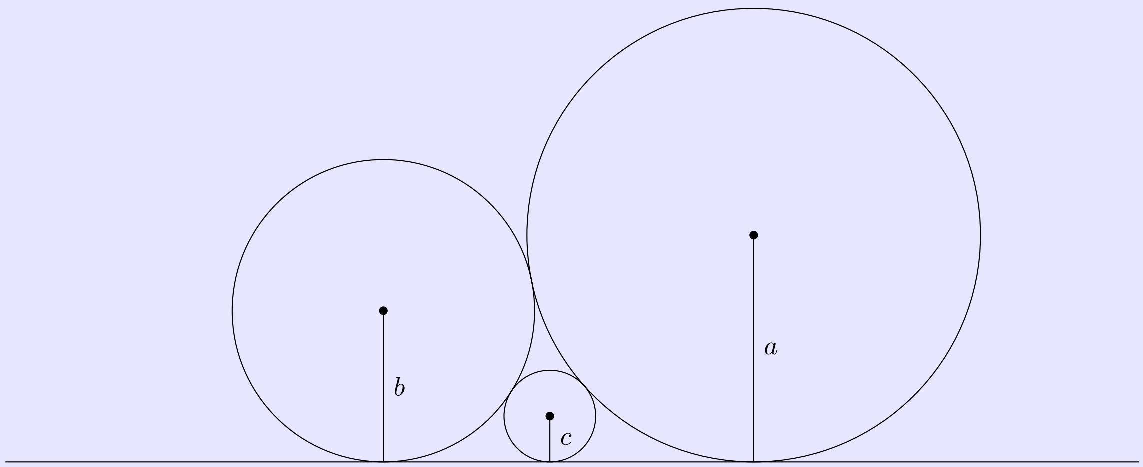
$$y = \frac{8 \pm \sqrt{68}}{2}.$$

Puisque $y \geq 0$, on a impérativement

$$y = 4 + \sqrt{17},$$

d'où l'on tire que $p = 4$ et $q = 17$.

C3. Trois cercles de rayon $0 < c < b < a$ sont tangents entre eux et tangents à une droite, tel qu'illustré ci-dessous.



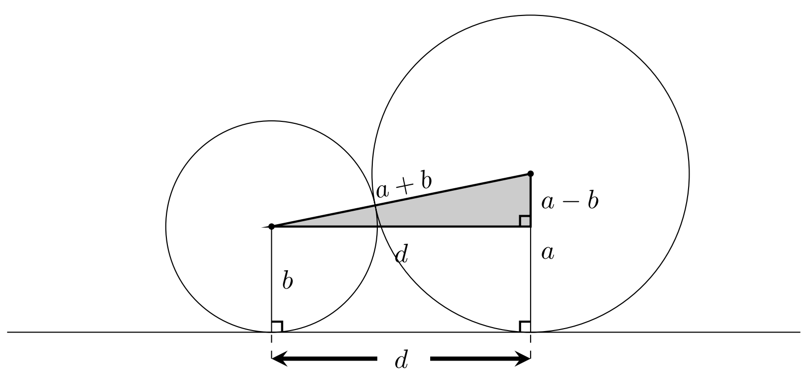
(a) Si $a = 16$ et $b = 4$, trouvez la distance d entre les points de tangence de ces deux cercles avec la droite.

(b) Si $a = 16$ et $b = 4$, trouvez le rayon c.

(c) La configuration est qualifiée de *bonne* si a, b, et c sont tous trois des entiers. Parmi toutes les bonnes configurations, trouvez quelle est la plus petite valeur possible pour c.

Solution (a) :

Considérez les cercles de rayon a et b respectivement et soit d la distance entre les points de tangence de ces deux cercles avec la droite.



Puisque toute droite tangente est perpendiculaire au rayon au point de tangence, on peut créer le triangle rectangle représenté ci-dessus, ce qui implique que

$$d^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2 \Rightarrow d = 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{16 \times 4} = 16.$$

C3. (b) Si $a = 16$ et $b = 4$, trouvez le rayon c.

Solution (b) : Nous venons de voir que $d = 2\sqrt{ab}$. En procédant de la même façon qu'au point (a), on peut montrer que les distances entre les points de tangence des cercles de rayons b et a d'une part et des cercles de rayon c et a d'autre part, sont respectivement $2\sqrt{bc}$ et $2\sqrt{ac}$. Par conséquent, on a que $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$, c'est-à-dire $16 = 2\sqrt{16c} + 2\sqrt{4c}$. Ainsi, $4/3 = \sqrt{c}$. La réponse est $c = 16/9$.

C3. (c) La configuration est qualifiée de *bonne* si a, b, et c sont tous trois des entiers. Parmi toutes les bonnes configurations, trouvez quelle est la plus petite valeur possible pour c.

Solution (c) : Nous avons remarqué au point (b) que

$$2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} = 2\sqrt{ab}.$$

Il faut maintenant isoler c. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{bc} + \sqrt{ac} &= \sqrt{ab}\\ (\sqrt{bc} + \sqrt{ac})^2 &= (\sqrt{ab})^2\\ bc + 2c\sqrt{ab} + ac &= ab\\ c &= \frac{ab}{a + b + 2\sqrt{ab}}.\end{aligned}$$

Puisque c est un nombre entier, il doit en être de même de $\sqrt{ab}$. Ainsi a et b doivent être de la forme $a = k\alpha^2$ et $b = k\beta^2$ pour certains entiers k, α et β. Posons $k = \mathrm{PGCD}(a, b)$. Alors

$$\begin{aligned}c &= \frac{k^2\alpha^2\beta^2}{k\alpha^2 + k\beta^2 + 2k\alpha\beta}\\ &= \frac{k\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\end{aligned}$$

où $\mathrm{PGCD}(\alpha, \beta) = 1$.

Comme c est un nombre entier, $(\alpha + \beta)^2 \mid k$. On veut faire en sorte que a, b et c soient aussi petits que possible. Par conséquent, on peut choisir $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, de sorte que $9 \mid k$. La solution minimale est donc obtenue lorsque $k = 9$, ce qui nous donne $a = 36$, $b = 9$ et $\boxed{c = 4}$.

Solution alternative :

Nous commençons par l'identité notée au point (b)

$$\sqrt{bc} + \sqrt{ac} = \sqrt{ab}, \tag{1}$$

et on le réécrit dans la forme

$$(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c}) = c.$$

Puisque $0 < c < b < a$, l'identité ci-dessus implique que

$$\sqrt{a} - \sqrt{c} > \sqrt{c}, \quad \sqrt{b} - \sqrt{c} < \sqrt{c},$$

de sorte que $\sqrt{a} > 2\sqrt{c}$ et $\sqrt{b} < 2\sqrt{c}$ et nous concluons que a, b et c doivent satisfaire les inégalités suivantes

$$0 < c < b < 4c < a. \tag{2}$$

On réécrit ensuite (1) sous la forme $\sqrt{bc} = \sqrt{ab} - \sqrt{ac}$ et en prenant le carré des deux côtés de cette identité on obtient

$$bc = ab + ac - 2a\sqrt{bc}.$$

Par conséquent, si a, b et c sont des entiers, alors $\sqrt{bc}$ doit être un nombre rationnel. Il suit que les plus petits entiers strictement positifs c et b qui satisfont aussi (2) sont $\boxed{c = 4}$ et $b = 9$. Dans ce cas, $a = 36$.

C4. Soit $S = \{4, 8, 9, 16, \ldots\}$ l'ensemble des entiers de la forme m^k, où m et k sont des entiers vérifiant $m, k \geq 2$. Étant donné un entier positif n, notons par $f(n)$ le nombre de façons d'exprimer n comme la somme d'un ou plusieurs éléments *distincts* de S. À titre d'exemple, $f(5) = 0$ puisqu'il n'existe aucune façon d'exprimer 5 de cette façon, tandis que $f(17) = 1$ puisque $17 = 8 + 9$ est la seule façon d'exprimer 17.

(a) Démontrez que $f(30) = 0$.

(b) Montrez que $f(n) \geq 1$ pour $n \geq 31$.

(c) Soit T l'ensemble des entiers pour lesquels $f(n) = 3$. Montrez que T est fini et non vide, puis trouvez le plus grand élément de T.

Notons que tous les éléments de S sont divisibles par 4.

Solution (a) :

Les éléments de S inférieurs à 30 sont $4, 8, 9, 16, 25$ et 27. Comme $30 \equiv 2 \pmod 4$, si 30 peut être exprimé comme une somme, alors cette somme doit utiliser au moins deux nombres impairs distincts (puisque tous les nombres pairs sont $0 \pmod 4$). Or, les deux plus petits nombres impairs dans cette liste sont 9 et 25 et leur somme est 34. Or, cette somme est déjà trop grande. Il n'est donc pas possible d'exprimer 30 de cette façon.

Plusieurs étudiants passeront plutôt en revue quelques cas simples, p.ex. $30 = 27 + 3$ mais 3 est trop petit, $30 = 25 + 5$ mais on ne peut pas faire 5, etc.

Solution (b) :

Si $n \equiv 0 \pmod 4$, alors écrivons n sous forme binaire. Comme il n'y a pas d'occurrence de $1, 2$ dans ce développement binaire, il s'agit d'une expression valide pour n comme somme d'éléments distincts de S. Il s'ensuit donc que $f(n) \geq 1$.

Si $n \equiv 1 \pmod 4$ et $n \geq 9$, alors $n - 9 \equiv 0 \pmod 4$ et $n - 9$ est un entier non négatif. Écrivons $n - 9$ sous forme binaire et ajoutons à nouveau 9. On obtient ainsi une expression valide puisqu'il n'y a pas d'occurrence de 9 dans ce développement binaire.

Si $n \equiv 2 \pmod 4$ et $n \geq 34$, alors écrivons, comme précédemment, $n - 34$ sous forme binaire et ajoutons à nouveau $34 = 9 + 25$.

Enfin, si $n \equiv 3 \pmod 4$ et $n \geq 27$, alors écrivons $n - 27$ sous forme binaire et ajoutons à nouveau 27.

En regroupant ce qui précède, on montre que tout $n \geq 31$ peut être exprimé comme une somme d'éléments distincts de S. Par conséquent $f(n) \geq 1$.

> **C4.** (c) Soit T l'ensemble des entiers pour lesquels $f(n) = 3$. Montrez que T est fini et non vide, puis trouvez le plus grand élément de T.

Solution (c) :

Nous soutenons que $f(111) = 3$ et $f(n) \geq 4$ pour $n \geq 112$. Par conséquent T est fini et non vide. De plus, son plus grand élément est 111.

Notez que nous avons montré à la partie ii) la véracité d'une affirmation encore plus forte, soit que tout entier $n \geq 31$ peut être exprimé comme une somme d'éléments distincts de l'ensemble S', où $S' = \{9, 25, 27\} \cup \{2^k : k \geq 2\}$. Si $n \geq 112$, alors $n, n - 36, n - 49, n - 81 \geq 31$. Ainsi, il découle de la partie ii) que ces entiers peuvent être exprimés comme des sommes d'éléments distincts de l'ensemble S'. L'ajout de $0, 36, 49$ ou 81 nous donnera donc des sommes valides pour n qui sont toutes distinctes, ainsi $f(n) \geq 4$.

Il nous reste à faire la preuve que $f(111) = 3$. Les élément impairs de S inférieurs ou égaux à 111 sont $\{9, 25, 27, 49, 81\}$. Ceux-ci sont tous congrus à $1 \pmod 4$ à l'exception de 27. Comme $111 \equiv 3 \pmod 4$, les seules possibilités pour les nombres impairs dans une somme valide de 111 sont :

— La totalité de ces cinq nombres ;
— Le nombre 27 ;
— Trois nombres parmi $9, 25, 49$ et 81.

Le premier cas doit être exclu puisque cette somme est trop grande. Considérons le second cas. Il nous faut exprimer $111 - 27 = 84$ comme une somme de nombres issus de l'ensemble $\{4, 8, 16, 32, 36, 64\}$. Si l'on n'utilise pas 36 alors tous les nombres sommés sont des puissances de deux et il s'ensuit qu'il n'y a qu'une seule façon de procéder : $111 = 64 + 27 + 16 + 4$. Si l'on utilise 36, alors il n'y a une fois de plus qu'une seule façon de procéder : $111 = 36 + 32 + 27 + 16$. Considérons maintenant le troisième et dernier cas. Si 81 est l'un des trois nombres utilisés, la somme totale sera d'au moins $81 + 9 + 25 = 115$, ce qui est trop grand. La seule autre possibilité est d'utiliser $9 + 25 + 49 = 83$, ce qui implique qu'il faille exprimer 28 comme une somme de nombres issus de l'ensemble $\{4, 8, 16\}$. Or la somme de tous ces nombres est 28, ce qui signifie qu'il n'y a, à nouveau, qu'une seule solution, à savoir $111 = 49 + 25 + 16 + 9 + 8 + 4$. En somme, nous avons montré l'existence de 3 façons d'exprimer 111 comme une somme d'éléments distincts de S, d'où l'on tire que $n = 111$ est le plus grand entier pour lequel $f(n) = 3$.

en collaboration avec

Commanditaires :

Casualty Actuarial Society
Society of Actuaries
University of Waterloo
Fondation Actuerielle du Canada
Aqueduct Foundation
Banff International Research Station
Centre d'éducation en mathématiques
et en informatique
Maplesoft
CRSNG
Fondation RBC
Samuel Beatty Fund
Gouvernement de l'Ontario

Partenaires :

ASDAN China
Dalhousie University
Dept. of Mathematics & Statistics,
(University of Saskatchewan)
MacEwan University
Memorial University
Polytechnique Montréal
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
University of Toronto
University of Waterloo
York University