Société mathématique du Canada

Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2020

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

CMS SMC

Expertise. Insight. Solutions.

Identité du participant

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et fournir tous les détails requis, à défaut de quoi votre examen pourrait être rejeté. Cet examen n'est pas considéré comme étant valide à moins d'être accompagné par le formulaire signé de votre superviseur d'examen/enseignant.

1. Prénom : (obligatoire)

2. Nom de famille : (obligatoire)

3. Êtes-vous actuellement inscrit(e) à temps plein à une école primaire, secondaire ou un Cégep ou suivez-vous un enseignement à la maison depuis le 15 septembre de cette année? (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ Non

4. Êtes-vous citoyen(ne) canadien(ne) ou résident(e) permanent(e) du Canada? (quelle que soit votre adresse actuelle) (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ Non

5. Date de naissance : (obligatoire)

A	A	A	A	M	M	J	J

6. Année de scolarité : (obligatoire)

☐ 8 ☐ 10 ☐ 12
☐ 9 ☐ 11 ☐ Cégep

autre: ______________

7. Sexe : (facultatif)

☐ Féminine

☐ Masculin

8. Adresse électronique : (facultatif)

NE PAS PHOTOCOPIER D'EXAMENS NON REMPLIS! Chaque page de chacun des exemplaires est pré-codée de manière unique pour faciliter l'attribution assistée par ordinateur des notes.

Question A1 (4 points)

Si chaque enfant présent à une fête prend exactement une pomme dans un panier de fruits, alors il restera 7 dans le panier après la fête. S'il y avait eu 16 pommes de plus dans le panier de fruits, il aurait été possible pour chaque enfant de prendre exactement deux pommes et puis le panier serait vide. Combien d'enfants ont pris part à la fête ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A2 (4 points)

Il est possible de créer 24 nombres à quatre chiffres distincts en utilisant chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4 exactement une fois. Parmi ces nombres à quatre chiffres, combien y en a-t-il qui sont divisibles par 4 ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A3 (4 points)

Une personne peut fabriquer n objets d'un certain type en une heure. Anne commence la fabrication à 10:00 tandis que Bob débute à 10:20. Cody et Deb, eux, commencent à 10:40. Si Anne, Bob, Cody et Deb travaillent tous au même rythme et que ce rythme demeure constant, ils auront, lorsque sonnera 11:00, fabriqué un total de 28 objets. Trouvez n.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A4 (4 points)

Si a et b désignent les racines du polynôme $x^2 + x - 2020 = 0$, trouvez $a^2 - b$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B1 (6 points)

Un ensemble S contient 6 entiers positifs distincts. La moyenne des deux plus petits entiers est de 5 alors que la moyenne des deux plus grands entiers est de 22. Quelle est la plus grande valeur possible pour la moyenne de tous les nombres dans l'ensemble S ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B2 (6 points)

Alice place une pièce de monnaie sur un table, face vers le haut. Puis elle éteint la lumière et quitte la salle. Bill entre dans la salle avec deux pièces de monnaie en main. Il lance ensuite les deux pièces sur la table et ressort. Carl entre à son tour dans la salle sombre et prend un pièce de monnaie au hasard. C'est alors qu'Alice revient et allume la lumière. Elle observe qu'il y a deux pièces de monnaie sur la table et toutes deux sont face vers le haut. Quelle est la probabilité que la pièce choisie par Carl ait elle aussi été disposée face vers le haut ?

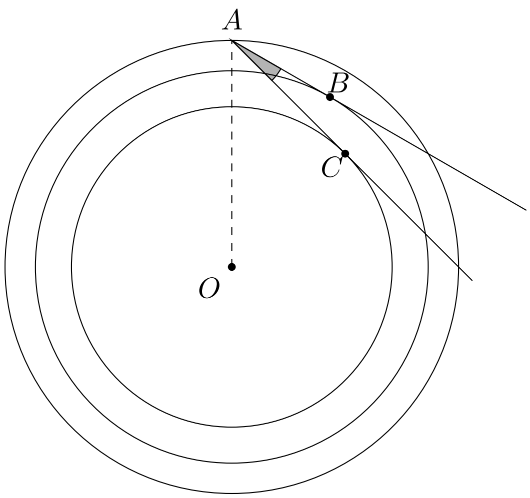
Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B3 (6 points)

On trace trois cercles centrés en O et d'aire 2π, 3π et 4π. Partant d'un point A situé sur le plus grand des trois cercles, on trace une droite tangente au cercle de taille intermédiaire et on note par B le point point de tangence. Partant à nouveau du point A, on trace également une droite tangente au plus petit cercle et on note par C le point de tangence. Si les points B et C sont situés du même côté de OA, trouvez la valeur de $\angle BAC$.



Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B4 (6 points)

Une fourmis se promène sur une grille carrée 10×10. Elle va du coin inférieur gauche de la grille vers le coin diagonalement opposé, marchant seulement sur les lignes de la grille et en empruntant toujours le chemin le plus court qui soit. Soit $N(k)$ le nombre de chemins différents pouvant être empruntés par la fourmis si celle-ci effectue exactement k virages. Trouvez $N(6) - N(5)$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question C1 (10 points)

Page à identification unique
– **aucune photocopie !**

Trouvez les aires des trois polygônes définis par les conditions (a), (b), et (c) suivantes, respectivement.

(a) le système d'inégalités $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

(b) l'inégalité $|x| + |y| \leq 10$

(c) l'inégalité $|x| + |y| + |x + y| \leq 2020$

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C2 (10 points)

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Une expression de la forme

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$$

est appelée *fraction continue*.

(a) Exprimez le x donné ci-dessus sous la forme d'une fraction réduite $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers positifs.

(b) Exprimez $\dfrac{355}{113}$ sous la forme d'une fraction continue $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}}$, où a, b, et c sont des entiers positifs.

(c) Soit

$$y = 8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8+\frac{1}{8+\cdots}}},$$

où le développement se poursuit à l'infini. Sachant que y peut également s'écrire sous la forme $p + \sqrt{q}$, trouvez les entiers p et q.

Votre solution :

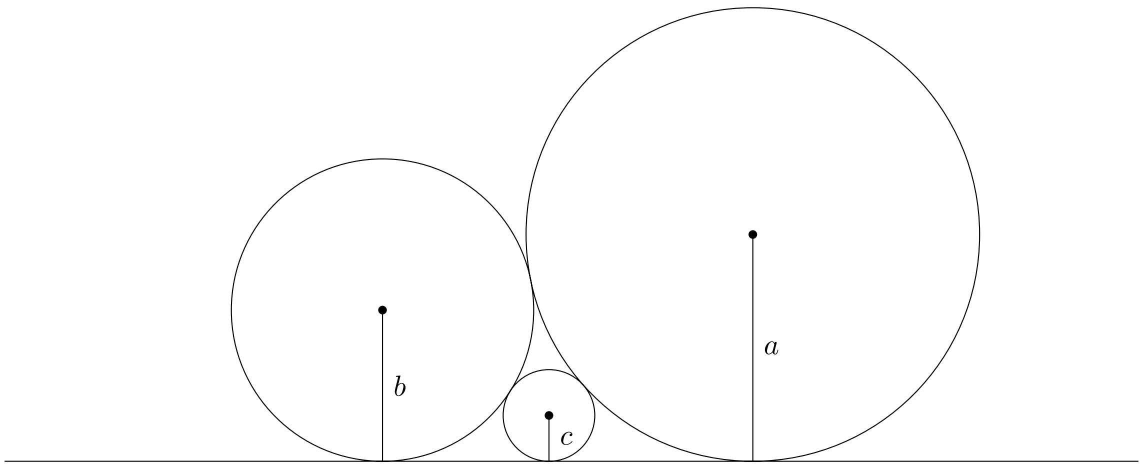
Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C2 (suite)

Question C2 (suite)

Question C3 (10 points)

Trois cercles de rayon $0 < c < b < a$ sont tangents entre eux et tangents à une droite, tel qu'illustré ci-dessous.



(a) Si $a = 16$ et $b = 4$, trouvez la distance d entre les points de tangence de ces deux cercles avec la droite.

(b) Si $a = 16$ et $b = 4$, trouvez le rayon c.

(c) La configuration est qualifiée de *bonne* si a, b, et c sont tous trois des entiers. Parmi toutes les bonnes configurations, trouvez quelle est la plus petite valeur possible pour c.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C4 (10 points)

Soit $S = \{4, 8, 9, 16, \ldots\}$ l'ensemble des entiers de la forme m^k, où m et k sont des entiers vérifiant $m, k \geq 2$. Étant donné un entier positif n, notons par $f(n)$ le nombre de façons d'exprimer n comme la somme d'un ou plusieurs éléments *distincts* de S. À titre d'exemple, $f(5) = 0$ puisqu'il n'existe aucune façon d'exprimer 5 de cette façon, tandis que $f(17) = 1$ puisque $17 = 8 + 9$ est la seule façon d'exprimer 17.

(a) Démontrez que $f(30) = 0$.

(b) Montrez que $f(n) \geq 1$ pour $n \geq 31$.

(c) Soit T l'ensemble des entiers pour lesquels $f(n) = 3$. Montrez que T est fini et non vide, puis trouvez le plus grand élément de T.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Principaux commanditaires

en collaboration avec crowdmark

Commanditaires :

Casualty Actuarial Society
Society of Actuaries
University of Waterloo
Fondation Actuerielle du Canada
Aqueduct Foundation
Banff International Research Station
Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Maplesoft
CRSNG
Fondation RBC
Samuel Beatty Fund
Gouvernement de l'Ontario

Partenaires :

ASDAN China
Dalhousie University
Dept. of Mathematics & Statistics, (University of Saskatchewan)
MacEwan University
Memorial University
Polytechnique Montréal
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
University of Toronto
University of Waterloo
York University