Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2019

Solutions officielles

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

L'examen compte trois sections :

A. Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

B. Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

C. Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune.

Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante : https://cms.math.ca/Concours/DOCM/2019/practice.html

 16 janvier 2020

Section A – 4 points pour chaque question

A1. Le mot de passe du cellulaire de Mathis est composé de quatre chiffres. Deux d'entre eux sont des 5 et les deux autres sont des 3. Combien y a-t-il de possibilités pour le mot de passe de Mathis ?

Solution : Il s'agit du nombre de façons de choisir deux emplacements parmi quatre. Il y a donc 6 possibilités.

Il est aussi accepté d'énumérer les possibilités : 3355, 3535, 3553, 5335, 5353, 5533.

La réponse est $\boxed{6}$**.**

A2. Le triangle ABC a des côtés de longueur entière et un périmètre de 7. Déterminer toutes les valeurs possibles pour la longueur du côté AB.

Solution : Par l'inégalité du triangle, la plus grande valeur possible pour la longueur d'un côté est 3. De plus, si tous les côtés ont une longueur inférieure à 3, le périmètre serait inférieur à 7. Ainsi, nous avons au moins un des côtés dont la mesure est 3. Ce qui laisse comme valeurs possibles pour les autres côtés (2,2) ou (1,3). Nous pouvons donc conclure que la longueur de AB peut être 1, 2, ou 3.

La réponse est $\boxed{1, 2, 3}$**.**

A3. Si a et b sont des entiers positifs tels que $a = 0.6\,b$ et $\text{pgcd}(a, b) = 7$, trouver $a + b$.

Solution : $\frac{a}{b} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{3\times7}{5\times7} = \frac{21}{35}$. Ainsi, $a = 21$ et $b = 35$, donc $a + b = 21 + 35 = 56$.

La réponse est $\boxed{56}$**.**

A4. Les équations $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ et $x^4 - ax^2 + 4 = 0$ ont les mêmes racines. Déterminer la valeur de a.

Solution : Pour $x \geq 0$, l'équation $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ devient $x^2 - 3x + 2 = 0$, dont les racines sont $x = 1$ et $x = 2$. Pour $x < 0$, l'équation $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ devient $x^2 + 3x + 2 = 0$, dont les racines sont $x = -1$ et $x = -2$. Ainsi, $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ a comme racines $x = \pm1, \pm2$.

L'équation d'un polynôme avec ces racines est donnée par : $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$. En développant nous obtenons $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4$ en comparant avec l'équation de départ : $x^4 - ax^2 + 4 = 0$, nous obtenons que $a = 5$.

Alternativement on pose $x = \pm1, \pm2$ dans $x^4 - ax^2 + 4 = 0$ pour obtenir soit $1 - a + 4 = 0$ or $16 - 4a + 4 = 0$. $>$ Dans les deux cas on a $a = 5$.

La réponse est $\boxed{5}$**.**

Section B – 6 points pour chaque question

B1. Jacques se rend de sa maison à l'école en marchant à une vitesse constante. Sa soeur Johanne fait le même trajet en vélo, à deux fois la vitesse de Jacques. La distance entre leur maison et l'école est de 3 km. Si Johanne quitte la maison 15 minutes après Jacques, ils arrivent à l'école en même temps. Quelle est la vitesse de marche de Jacques (en km/h) ?

Solution 1 : Soit x la vitesse de Jacques en km/h. Nous avons donc que la vitesse de Johanne est $2x$. Le temps nécessaire pour que Jacques se rende à l'école est de $3/x$ heures. Le temps nécessaire pour que Johanne se rende à l'école en bicyclette est de $3/(2x)$ heures. Comme elle part de la maison 0.25 heure après Jacques et qu'elle arrive à l'école en même temps que lui, nous avons l'équation suivante :
$3/x = 0.25 + 3/(2x)$. En résolvant, nous obtenons $x = 6$ km/h.

Solution 2 : Johanne couvre deux fois la distance parcourue par Jacques pour un temps donné. On remarque donc que Johanne doit partir de la maison au moment où Jacques se trouve à la moitié du chemin le menant à l'école. C'est à dire au moment où Jacques a parcouru 1.5 km. Ainsi, Jacques a parcouru 1.5 km en 15 minutes, ou 1/4 d'heure. La vitesse de Jacques est donc de $4 \times 1.5 = 6$ km/h.

La réponse est $\boxed{6}$.

B2. Quel est le plus grand entier n tel que la quantité

$$\frac{50!}{(5!)^n}$$

est un entier ?

NOTE : Ici, $n! = 1\times2\times3\times\cdots\times n$ est le produit des entiers de 1 à n. Par exemple $4! = 1\times2\times3\times4 = 24$.

Solution :

Nous calculons que $5! = 2^3 \times 3 \times 5$, ainsi $(5!)^n \mid 50!$ si les trois condition suivantes sont respectées :

$$\begin{aligned} 2^{3n} &\mid 50!, \\ 3^n &\mid 50! \text{ et} \\ 5^n &\mid 50! \end{aligned}$$

(La notation $b \mid a$ signifie que l'entier a est divisible par l'entier b.)

Parmi les entiers de 1 à 50, chaque cinquième entier est multiple de 5, et de plus, 25 et 50 sont multiples de 5^2. Donc l'exposant de la puissance maximale de 5 qui divise 50! est

$$\left\lfloor \frac{50}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{5^2} \right\rfloor = 10 + 2 = 12$$

donc $n \leq 12$.

Une analyse similaire pour la puissance maximale de 2 qui divise 50! donne

$$\left\lfloor \frac{50}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2^5} \right\rfloor = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47,$$

donc $2^{47} \mid 50!$ et $3n \leq 47$, donc $n \leq 15$. La même idée pour la puissance maximale de 3 qui divise 50! donne

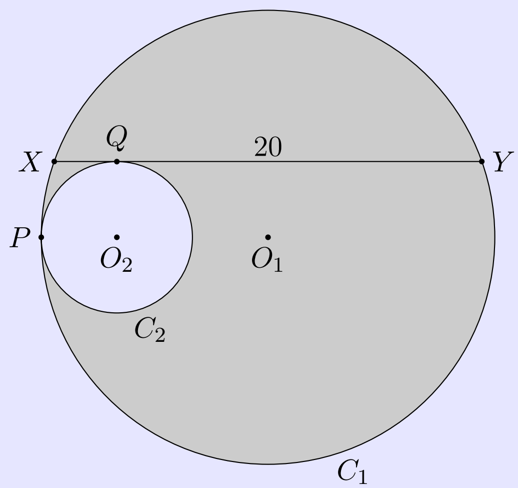
$$\left\lfloor \frac{50}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{3^3} \right\rfloor = 16 + 5 + 1 = 22,$$

donc $3^{22} \mid 50!$ et $n \leq 22$.

On a $n \leq 12$, $n \leq 15$, $n \leq 22$. On conclut que la plus grande valeur possible de n est 12.

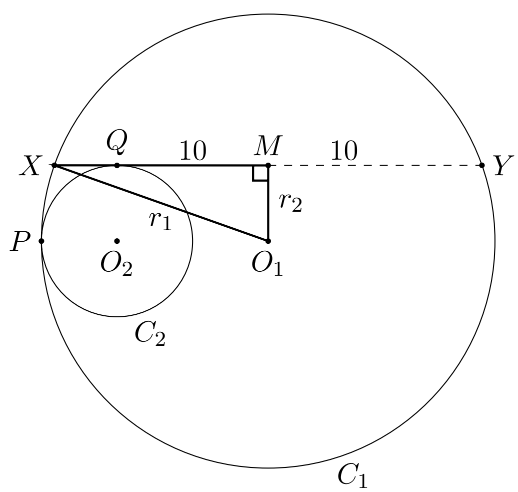
La réponse est $\boxed{12}$.

B3. Sur la figure ci-dessous, les cercles C_1 et C_2 ont comme centre O_1 et O_2. Les rayons des cercles sont respectivement r_1 et r_2, avec $r_1 = 3r_2$. C_2 est tangent à l'intérieur de C_1 au point P. La corde XY du cercle C_1 a une longueur de 20, est tangente à C_2 en Q et est parallèle à la droite O_2O_1. Déterminer l'aire de la région ombragée, c'est-à-dire de C_1 sans C_2.



Solution :

Soit M le point milieu de XY, alors $OM \perp XY$.



Il suit que XMO est un triangle rectangle et donc

$$r_1^2 = r_2^2 + 10^2 \tag{1}$$

Clairement, l'aire de la région ombragée est donnée par $A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$ ce qui, par l'équation (1), nous donne que

$$A = 100\pi.$$

P.S. De façon alternative, on peut utiliser $r_1 = 3r_2$ et trouver la forme explicite des rayons à partir de (1) : $9r_2^2 = r_2^2 + 100$, donc $r_2 = 10/\sqrt{8}$ et $r_1 = 3r_2 = 30\sqrt{8}$. La différence d'aire est donc $(900/8 - 100/8)\pi = 100\pi$.

La réponse est $\boxed{100\pi}$.

B4. Robert et Jeanne possèdent tous les deux un paquet de douze cartes. Les paquets sont identiques et comportent trois cartes de chacune des couleurs suivantes : rouge, vert, jaune et bleu. Robert et Jeanne mélangent chacun leur propre paquet et, tour à tour, retournent la première carte et la déposent sur la table. Sachant que Jeanne commence, trouver la probabilité que Jeanne ait fini de distribuer *toutes* les cartes rouges de son paquet avant que Robert n'ait distribué *aucune* de ses cartes rouges.

Donner votre solution sous la forme d'une fraction réduite.

Solution 1 :

Nous pouvons considérer le paquet comme une pile de 3 cartes rouges et neuf cartes noires. Nous pouvons donc voir le paquet mélangé comme une chaîne binaire de longueur 12 avec les 1 indiquant les cartes rouges et les zéros indiquant les cartes noires. Nous souhaitons calculer la probabilité qu'aucun des 1 de la chaîne binaire de Bob n'arrive avant le dernier de la chaîne binaire de Jeanne. Une séquence valide peut être représentée par une chaîne binaire combinée comportant cinq ou six 1, où les trois premiers 1 de la chaîne sont ceux de Jeanne et les trois dernier ceux de Bob. (Les deux cas sont valides. Le cas à cinq 1 correspond à une situation où Jeanne tourne sa dernière carte rouge juste avant que Bob ait retourné sa première carte rouge.)

Il y a $\binom{12}{5} + \binom{12}{6} = \binom{13}{6}$ paires de séquences valides sur un total de $\binom{12}{3}^2$ paires au total. Ce qui nous donne la probabilité désirée de $\binom{13}{6}/\binom{12}{3}^2 = \frac{39}{1100}$.

Solution 2 :

Considérons des séquences de longueur 24 dont les positions sont numérotées par des nombres impairs (1,3,5,.., 23) pour les tours de Jeanne et par des nombres pairs (2,4,6,..., 24) pour ceux de Bob. Nous considérons le 1 le plus à droite de ceux de Jeanne comme un séparateur. Nous calculons le nombre de combinaisons possibles pour les deux 1 restants de Jeanne parmi les positions restantes à gauche du séparateur. Ce nombre sera multiplié par le nombre de combinaisons possibles pour les trois 1 de Bob à droite du séparateur. Ensuite, on additionne toutes les quantités pour les valeurs possibles d'emplacements du séparateur :

$\binom{2}{2}\binom{10}{3} + \binom{3}{2}\binom{9}{3} + \binom{4}{2}\binom{8}{3} + \binom{5}{2}\binom{7}{3} + \binom{6}{2}\binom{6}{3} + \binom{7}{2}\binom{5}{3} + \binom{8}{2}\binom{4}{3} + \binom{9}{2}\binom{3}{3} = \binom{13}{6}$.

Par un calcul explicite des coefficients, nous obtenons :

$1 \times 120 + 3 \times 84 + 6 \times 56 + 10 \times 35 + 20 \times 15 + 21 \times 10 + 28 \times 4 + 36 \times 1 = 1716.$

Le nombre total de possibilités est $\binom{12}{3}^2 = 220^2 = 48400$.

La probabilité est donc :

$$\frac{1716}{48400} = \frac{429}{12100} = \frac{39}{1100}.$$

La réponse est $\boxed{\frac{39}{1100}}$.

Section C – 10 points pour chaque question

C1. Étant donné une fonction f définie sur les nombres naturels $1, 2, 3, \ldots,$ par le fait que $f(1) = 1$ et que

$$f(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{10}\right) & \text{si } 10 \mid n, \\ f(n-1)+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Note : La notation $b \mid a$ signifie que l'entier a est divisible par l'entier b.

(a) Calculer $f(2019)$.

(b) Déterminer la valeur maximale de $f(n)$ pour $n \leq 2019$.

(c) Une nouvelle fonction g est définie par $g(1) = 1$ et

$$g(n) = \begin{cases} g\left(\frac{n}{3}\right) & \text{si } 3 \mid n, \\ g(n-1)+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la valeur maximale de $g(n)$ pour $n \leq 100$.

Solution (a) :

$$\begin{aligned} f(2019) &= f(2018)+1 = f(2017)+2 = \ldots = f(2010)+9 = f(201)+9 \\ &= f(200)+1+9 \\ &= f(20)+1+9 \\ &= f(2)+1+9 \\ &= f(1)+1+1+9 \\ &= 1+1+1+9 = 12. \end{aligned}$$

En général, on peut voir que $n \equiv m \pmod{10}$ alors $f(n) = f(n-m)+m$, où $10 \mid (n-m)$. Ainsi, $f(n)$ donne la somme des chiffres de n. En effet, $f(2019) = 2+0+1+9 = 12$.

La réponse est $\boxed{12}$**.**

Solution (b) :
Nous souhaitons trouver le nombre n tel que $n \leq 2019$, $n = 1000a + 100b + 10c + d$ et $a+b+c+d$ est maximal. Si $a = 2$, le maximum que nous pouvons obtenir est $f(2019) = 12$, mais si $a = 1$, nous avons $f(1999) = 28$ qui est le maximum.

La réponse est $\boxed{28}$**.**

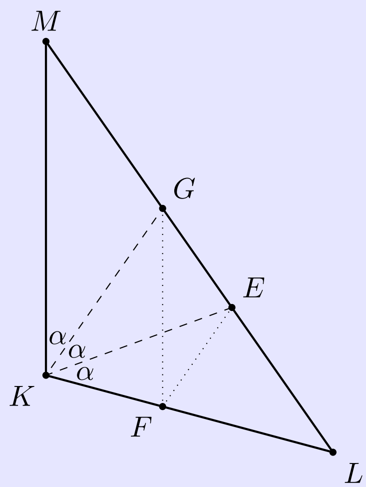
Solution (c) :
La fonction g donne la somme des chiffres de n quand on l'exprime en base 3. Comme $100 = 81 + 18 + 1 = 10201_3$, $g(100) = 4$ et g est maximisée en $2222_3 = 80$ avec $g(80) = 8$.

La réponse est $\boxed{8}$**.**

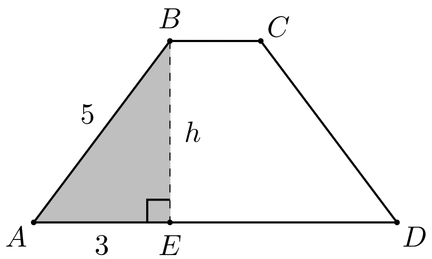
C2. (a) Soit $ABCD$ un trapèze isocèle avec $AB = CD = 5$, $BC = 2$, $AD = 8$. Trouver la longueur de sa hauteur et de ses diagonales.

(b) Trouver la valeur de $\cos\angle ABC$ dans le trapèze décrit en (a).

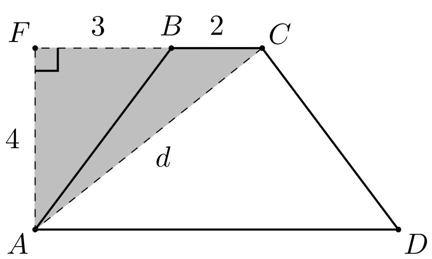
(c) Étant donné un triangle KLM, fixons G et E sur le segment LM tels que $\angle MKG = \angle GKE = \angle EKL = \alpha$. Soit F un point sur le segment KL tel que GF est parallèle à KM. Étant donné que $KFEG$ est un trapèze isocèle et que $\angle KLM = 84°$, déterminer la valeur de α.



Solution (a) : Fixons BE comme étant la hauteur du trapèze. Ainsi, BEA est un triangle rectangle avec comme hypoténuse le côté AB dont la mesure est 5. On trouve également que AE=(8-2)/2=3. Ainsi, la hauteur BE est de 4.



Posons AF la hauteur du trapèze issue de A. Étant donné que le triangle AFC est rectangle avec $AF = 4$, $FC = FB + BC = 3 + 2 = 5$ nous obtenons que $AC = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.

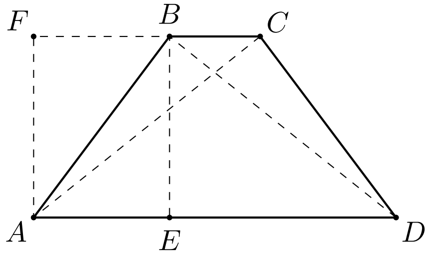


La réponse est $\boxed{\textbf{4 et } \sqrt{41}}$**.**

C2. (b) Trouver la valeur de $\cos\angle ABC$ dans le trapèze décrit en (a).

Solution (b) :

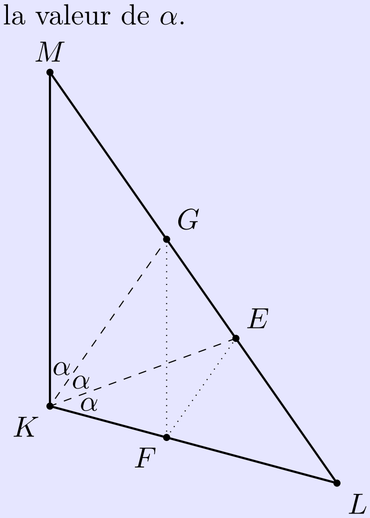
Étant donné le triangle ABC, nous pouvons utiliser la loi des cosinus afin d'obtenir que $41 = 4 + 25 - 20\cos\angle ABC$ et donc que $\cos\angle ABC = -0.6$.



De façon alternative, comme $FB = AE = 3$, $AB = 5$ et $\cos\angle FBA = 3/5$, alors $\cos\angle ABC = \cos(180 - \angle FBA) = -\cos\angle FBA = -3/5 = -0.6$.

La réponse est $\boxed{-0.6}$**.**

C2. (c) Étant donné un triangle KLM, fixons G et E sur le segment LM tels que $\angle MKG = \angle GKE = \angle EKL = \alpha$. Soit F un point sur le segment KL tel que GF est parallèle à KM. Étant donné que $KFEG$ est un trapèze isocèle et que $\angle KLM = 84°$, déterminer la valeur de α.



1. Comme $KM||FG$ et que $KFEG$ est un trapèze isocèle, nous avons que $\angle KML = \angle FGE = \angle FKE$, donc que $\angle LKM = 3\angle KML$. Comme la somme des mesures de ces deux angles est de 96 degrés, nous avons que $\angle LKM = 72° = 3\alpha$. Ainsi, $\alpha = 24°$.
   De façon alternative, comme $KFEG$ est un trapèze isocèle, le triangle KLG est un triangle isocèle. Alors, $2\alpha + 2\alpha + 84° = 180°$, donc $\alpha = 24°$.
   La réponse est $\boxed{24°}$**.**

C3. Soit N un entier positif. Une « bonne division de N » est une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ en deux ensembles disjoints et non-vides, S_1 et S_2, telle que la somme des éléments de S_1 est égale au produit des éléments de S_2. Par exemple, si $N = 5$, alors

$$S_1 = \{3, 5\}, \qquad S_2 = \{1, 2, 4\}$$

serait une bonne division.

(a) Trouver une bonne division pour $N = 7$.

(b) Trouver un N qui admet deux bonnes divisions distinctes.

(c) Montrer que si $N \geq 5$, alors il existe une bonne division pour N.

Solution (a) :

Prenons $S_1 = \{2, 4, 5, 7\}$ et $S_2 = \{1, 3, 6\}$.

Solution (b) :

Considérons que $S_2 = \{1, x, y\}$ avec $1 < x < y \leq N$ et que S_1 est le complément de S_2 dans $\{1, 2, \ldots, N\}$. Il s'agira d'une bonne division si et seulement si

$$\frac{N^2 + N}{2} - 1 - x - y = \sum_{s \in S_1} s = \prod_{s \in S_2} s = xy.$$

Que l'on peut arranger de la façon suivante :

$$(x + 1)(y + 1) = \frac{N(N + 1)}{2}. \tag{2}$$

De façon semblable, si nous prenions $S_2 = \{x', y'\}$, alors nous obtiendrions une bonne division si et seulement si

$$\frac{N^2 + N}{2} - x' - y' = \sum_{s \in S_1} s = \prod_{s \in S_2} s = x'y'.$$

Que l'on peut réarranger comme ceci :

$$(x' + 1)(y' + 1) = \frac{N(N + 1)}{2} + 1.$$

Avec $N = 10$, Nous avons $(x + 1)(y + 1) = 55 = 5 \times 11$ et $(x' + 1)(y' + 1) = 56 = 7 \times 8$. Ainsi, $(x, y) = (4, 10)$ et $(x', y') = (6, 7)$, et nous avons deux bonnes divisions distinctes :

$$S_1 = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}, \qquad S_2 = \{1, 4, 10\};$$

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}, \qquad S_2 = \{6, 7\}.$$

Une autre solution pour (b) est de prendre $S_2 = (1, x, y)$ pour certains $1 < x < y \leq N$, et S_1 le complément de S_2 dans $\{1, 2, \ldots, N\}$. Ensuite on trouve une valeur de N pour laquelle $N(N + 1)/2$ a plusieurs factorisations valides. Par exemple, $N = 20$ donne :

$N(N+1)/2 = 10 \times 21 = 14 \times 15 = (1+9)(1+20) = (1+13)(1+14)$. Ainsi, $N = 20$ admet deux bonnes divisions distinctes :

$$S_1 = \{2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}, \qquad S_2 = \{1,9,20\};$$

$$S_1 = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,16,17,18,19,20\}, \qquad S_2 = \{1,13,14\}.$$

C3. (c) Montrer que si $N \geq 5$, alors il existe une bonne division pour N.

Solution (c) :

Nous allons utiliser l'équation (2). Si $N \geq 6$ est pair, alors $x = \frac{N-2}{2}$ et $y = N$ satisfont l'inéquation $1 < x < y \leq N$. Si $N \geq 5$ est impair, alors $x = \frac{N-1}{2}$ et $y = N - 1$ satisfont l'inéquation $1 < x < y \leq N$. Nous pouvons donc conclure que tous les $N \geq 5$ admettent une bonne division.

C4. Trois joueurs A, B et C sont assis autour d'une table ronde et jouent à un jeu dans l'ordre suivant $A \to B \to C \to A \to \cdots$. À son tour, si un joueur a un nombre pair de pièces, il doit en donner la moitié au joueur suivant et il garde la moitié restante. Dans l'autre cas, s'il a un nombre impair de pièces, il en défausse une et garde le reste. Par exemple, si les joueurs A, B et C commencent avec $(\underline{2}, 3, 1)$ pièces respectivement, alors ils auront $(1, \underline{4}, 1)$ après le tour de A, $(1, 2, \underline{3})$ après le tour de B, $(\underline{1}, 2, 2)$ après le tour de C, etc. (Ici, la barre de soulignement indique le joueur dont le tour est à venir.) Nous appelons la position $(\underline{x}, y, z)$ *stable* si la partie revient à cette même position à tous les trois tours.

(a) Montrer que la partie commençant avec la position $(\underline{1}, 2, 2)$ (A est le prochain à jouer) se termine éventuellement par la position $(\underline{0}, 0, 0)$.

(b) Montrer que toute position stable comporte un total de $4n$ pièces, pour n un entier.

(c) Quel est le nombre minimal de pièces nécessaires afin d'avoir une position qui n'est pas stable, mais qui ne mène pas à $(\underline{0}, 0, 0)$?

Solution (a) :

La partie commençant avec la position $(\underline{1}, 2, 2)$ se poursuit comme ceci :

$$(0, \underline{2}, 2) \to (0, 1, \underline{3}) \to (\underline{0}, 1, 2) \to (0, \underline{1}, 2) \to (0, 0, \underline{2}) \to$$
$$(\underline{1}, 0, 1) \to (0, \underline{0}, 1) \to (0, 0, \underline{1}) \to (\underline{0}, 0, 0).$$

Solution (b) :

Supposons que $(\underline{a}, b, c)$ est une position stable (où A est le prochain à jouer). Après trois mouvements, nous n'aurons pas enlevé de pièces, et donc a doit être pair. Nous écrivons $a = 2n$. Ainsi, après le tour de A, nous nous trouvons dans la situation $(n, \underline{n+b}, c)$. Nous savons aussi que $n + b$ est pair. Toutefois, nous savons aussi qu'après avoir enlevé la moitié de $n + b$, il nous restera encore b (afin de revenir à notre position stable de départ au prochain tour). Donc $b = n$. Il s'ensuit qu'après le mouvement de B, nous nous trouvons dans la position $(n, n, \underline{n+c})$. En appliquant un argument similaire pour C, nous obtenons également que $c = n$. Donc, toutes les positions stables sont de la forme $(\underline{2n}, n, n)$, où le prochain joueur à jouer est celui avec le plus grand nombre de pièces. Ainsi, une position stable comporte $4n$ pièces.

C4. (c) Quel est le nombre minimal de pièces nécessaires afin d'avoir une position qui n'est pas stable, mais qui ne mène pas à $(\underline{0}, 0, 0)$?

Solution (c) : Réponse : $\boxed{9}$.

Par exemple, $(\underline{3}, 4, 2)$ n'est pas stable, mais nous arrivons à la position $(2, \underline{4}, 2)$ après le tour de A. C'est une position stable par (b).

Afin de prouver qu'il n'y a pas de solutions avec moins de pièces, nous faisons plusieurs remarques et observations.

Sans perte de généralité, nous allons considérer les positions de la forme $(\underline{a}, b, c)$, avec $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

1. Pour n'importe quelle position initiale $(\underline{a}, b, c)$ il existe un nombre fini de positions rencontrées au cours de la partie complète. En effet, si on n'enlève aucune pièce durant la partie, le nombre de positions rencontrées est borné par le nombre de partitions non-négatives de $N = a + b + c$. Dans le cas où on enlève des pièces, nous avons un nombre fini de partitions pour chacun des N, $N - 1$, $N - 2$ etc., donc le nombre total est fini.

2. Si $(\underline{a}, b, c)$ revient à lui-même en $K > 0$ mouvement(s), alors il fait partie d'un cycle. Si $(\underline{a}, b, c)$ ne revient pas à lui-même (donc qu'il ne fait pas partie d'un cycle) alors il mène éventuellement à $(\underline{0}, 0, 0)$. Nous allons identifier tous les candidats potentiels pour $(\underline{a}, b, c)$ qui feraient partie de cycles et allons vérifier que cette affirmation est vraie. (Nous pourrions tester toutes les positions $(\underline{a}, b, c)$ avec $a + b + c \leq 8$ mais ça prendrait beaucoup de temps !)

Remarquons que $(\underline{0}, 0, 0)$ est stable. Nous allons donc l'exclure de la suite de notre raisonnement.

Observation 1. Si un ou deux des éléments du triplet $(\underline{a}, b, c)$ sont 0, celui-ci ne peut faire partie d'un cycle, parce que 0 sera remplacé par un nombre strictement positif, mais on ne peut jamais obtenir 0 en divisant un nombre strictement positif par deux.

Observation 2. Si a est impair, alors $(\underline{a}, b, c)$ ne fait pas partie d'un cycle, puisque la position obtenue après le tour de A : $(a - 1, \underline{b}, c)$ diminue le nombre total de pièces. De façon similaire, si b est impair, la position $(a, \underline{b}, c)$ ne fait pas partie d'un cycle, puisque la position obtenue après le tour de B : $(a, b - 1, \underline{c})$ diminue le nombre total de pièces. Enfin si c est impair, la position $(a, b, \underline{c})$ ne fait pas partie d'un cycle, puisque la position obtenue après le tour de C : $(\underline{a}, b, c - 1)$ diminue le nombre total de pièces.

Observation 3. On s'intéresse au maximum de pièces détenues par un seul joueur au cours de la partie. Ce maximum existe et est atteint au cours de la partie. Au moment où le maximum est atteint, ce doit être le tour du joueur avec le maximum de pièces, autrement il aurait reçu plus de pièces au tour du joueur précédent, ce qui contredirait la maximalité.

Ainsi, les positions $(\underline{a}, b, c)$ possibles pour faire partie d'un cycle sont les suivantes :

$(\underline{6}, 1, 1)$, $(\underline{4}, 1, 3)$, $(\underline{4}, 2, 2)$, $(\underline{4}, 3, 1,)$, $(\underline{4}, 1, 2)$, $(\underline{4}, 2, 1)$, $(\underline{4}, 1, 1)$, $(\underline{2}, 1, 1)$.

Nous avons que les positions

$$(\underline{6}, 1, 1) \to (3, \underline{4}, 1) \to (3, 2, \underline{3}),$$

ne font pas partie d'un cycle en raison de l'observation 2. Dans une position de la forme $(\underline{4}, x, y)$, si x est impair, alors nous obtenons la position $(2, \underline{x + 2}, y)$ après le tour de A avec $x + 2$ qui est impair, cette position ne fait donc également pas partie d'un cycle par l'observation 2. Nous avons traité tous nos candidats, à l'exception de la position $(\underline{4}, 2, 2)$, qui est stable, et de la position $(\underline{4}, 2, 1)$, qui continue comme suit :

$$(\underline{4}, 2, 1) \to (2, \underline{4}, 1) \to (2, 2, \underline{3}),$$

et qui n'est donc pas stable, en raison de l'observation 2. Le dernier cas restant est $(\underline{2}, 1, 1)$, qui est stable. Ainsi, tous les cycles avec au plus 8 pièces sont stables.

3. En regardant le dernier coup joué pour arriver à la position $(\underline{4}, 2, 2)$, nous remarquons qu'il y a seulement deux possibilités : soit depuis la position stable$(2, 2, \underline{4})$, soit depuis la position $(4, 2, \underline{3})$.

4. En regardant le dernier coup joué pour arriver à la position $(\underline{2}, 1, 1)$, nous remarquons que la seule possibilité est d'arriver d'une position stable. Ainsi, pour $N \leq 8$ nous ne pouvons avoir que des positions stables ou une suite de positions menant à $(\underline{0}, 0, 0)$.

Note : Bien que ce ne soit pas important pour la solution de la question posée, on remarque que si la configuration $(\underline{a}, b, c)$ revient sur lui-même après $3n$ mouvements pour un entier positif n alors il revient sur lui-même après exactement 3 mouvements. Nous ne connaissons pas une preuve élémentaire de ce fait ; notre preuve repose sur les valeurs propres d'une matrice.

Principaux commanditaires

en collaboration avec

Partenaires :

ASDAN China
Dalhousie University
Dept. of Mathematics & Statistics,
(University of Saskatchewan)
Maplesoft
Memorial University
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
University of Toronto
York University

Commanditaires gouvernementaux :

Alberta Education
Manitoba
Nunavut
Ontario
Prince Edward Island