Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2019

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

Identité des participants

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et fournir tous les détails requis, à défaut de quoi votre examen pourrait être rejeté. Cet examen n'est pas considéré comme étant valide à moins d'être accompagné par le formulaire signé de votre superviseur d'examen/enseignant.

1. Prénom : (obligatoire)

2. Nom de famille : (obligatoire)

3. Êtes-vous actuellement inscrit.e à temps plein à une école primaire, secondaire ou un Cégep ou suivez-vous un enseignement à la maison depuis le 15 septembre de cette année? (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ **Non**

4. Êtes-vous citoyen.ne canadien.ne ou résident.e permanent.e du Canada? (quelle que soit votre adresse actuelle) (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ **Non**

5. Date de naissance : (obligatoire)

A A A A M M J J

6. Année de scolarité : (obligatoire)

☐ 8 ☐ 10 ☐ 12
☐ 9 ☐ 11 ☐ Cégep

autre: ______________

7. Sexe : (facultif)

☐ Féminine

☐ Masculin

8. Adresse électronique : (facultif)

9. Avez-vous entendu de la profession d'actuaire avant participer au Défi ouvert canadien de mathématiques? ☐ Oui ☐ Non

10. Avez-vous envisagé de faire carrière dans la science actuarielle? ☐ Oui ☐ Non ☐ Incertain.e

11. Seriez-vous intéressé.e d'apprendre davantage sur la profession d'actuaire? ☐ Oui ☐ Non ☐ Incertain.e

NE PAS PHOTOCOPIER D'EXAMENS NON REMPLIS! Chaque page de chacun des exemplaires est pré-codée de manière unique pour faciliter l'attribution assistée par ordinateur des notes.

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Question A1 (4 points)

Le mot de passe du cellulaire de Mathis est composé de quatre chiffres. Deux d'entre eux sont des 5 et les deux autres sont des 3. Combien y a-t-il de possibilités pour le mot de passe de Mathis ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A2 (4 points)

Le triangle ABC a des côtés de longueur entière et un périmètre de 7. Déterminer toutes les valeurs possibles pour la longueur du côté AB.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A3 (4 points)

Si a et b sont des entiers positifs tels que $a = 0.6\,b$ et $\text{pgcd}(a, b) = 7$, trouver $a + b$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A4 (4 points)

Les équations $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ et $x^4 - ax^2 + 4 = 0$ ont les mêmes racines. Déterminer la valeur de a.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B1 (6 points)

Jacques se rend de sa maison à l'école en marchant à une vitesse constante. Sa soeur Johanne fait le même trajet en vélo, à deux fois la vitesse de Jacques. La distance entre leur maison et l'école est de 3 km. Si Johanne quitte la maison 15 minutes après Jacques, ils arrivent à l'école en même temps. Quelle est la vitesse de marche de Jacques (en km/h) ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B2 (6 points)

Quel est le plus grand entier n tel que la quantité

$$\frac{50!}{(5!)^n}$$

est un entier ?

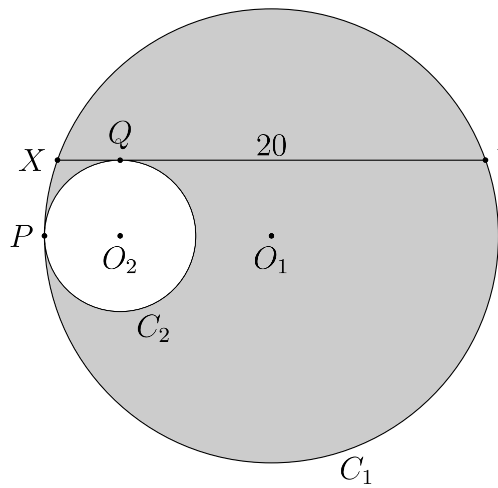
NOTE : Ici, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ est le produit des entiers de 1 à n. Par exemple $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B3 (6 points)

Sur la figure ci-dessous, les cercles C_1 et C_2 ont comme centre O_1 et O_2. Les rayons des cercles sont respectivement r_1 et r_2, avec $r_1 = 3r_2$. C_2 est tangent à l'intérieur de C_1 au point P. La corde XY du cercle C_1 a une longueur de 20, est tangente à C_2 en Q et est parallèle à la droite O_2O_1. Déterminer l'aire de la région ombragée, c'est-à-dire de C_1 sans C_2.



Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B4 (6 points)

Robert et Jeanne possèdent tous les deux un paquet de douze cartes. Les paquets sont identiques et comportent trois cartes de chacune des couleurs suivantes : rouge, vert, jaune et bleu. Robert et Jeanne mélangent chacun leur propre paquet et, tour à tour, retournent la première carte et la déposent sur la table. Sachant que Jeanne commence, trouver la probabilité que Jeanne ait fini de distribuer *toutes* les cartes rouges de son paquet avant que Robert n'ait distribué *aucune* de ses cartes rouges.
Donner votre solution sous la forme d'une fraction réduite.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question C1 (10 points)

Étant donné une fonction f définie sur les nombres naturels $1, 2, 3, \ldots$, par le fait que $f(1) = 1$ et que

$$f(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{10}\right) & \text{si } 10 \mid n, \\ f(n-1)+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Note : La notation $b \mid a$ signifie que l'entier a est divisible par l'entier b.

(a) Calculer $f(2019)$.

(b) Déterminer la valeur maximale de $f(n)$ pour $n \leq 2019$.

(c) Une nouvelle fonction g est définie par $g(1) = 1$ et

$$g(n) = \begin{cases} g\left(\frac{n}{3}\right) & \text{si } 3 \mid n, \\ g(n-1)+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la valeur maximale de $g(n)$ pour $n \leq 100$.

Votre solution :

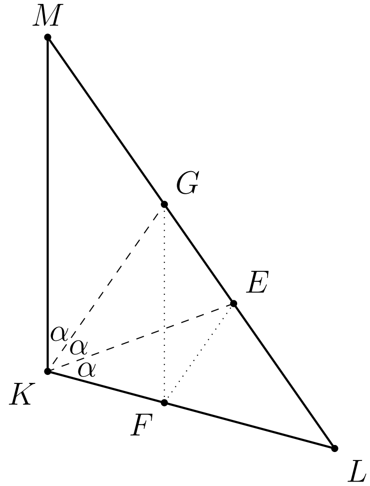
Question C1 (suite)

Question C2 (10 points)

(a) Soit $ABCD$ un trapèze isocèle avec $AB = CD = 5$, $BC = 2$, $AD = 8$. Trouver la longueur de sa hauteur et de ses diagonales.

(b) Trouver la valeur de $\cos \angle ABC$ dans le trapèze décrit en (a).

(c) Étant donné un triangle KLM, fixons G et E sur le segment LM tels que $\angle MKG = \angle GKE = \angle EKL = \alpha$. Soit F un point sur le segment KL tel que GF est parallèle à KM. Étant donné que $KFEG$ est un trapèze isocèle et que $\angle KLM = 84°$, déterminer la valeur de α.



Votre solution :

Question C3 (10 points)

Soit N un entier positif. Une « bonne division de N » est une partition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$ en deux ensembles disjoints et non-vides, S_1 et S_2, telle que la somme des éléments de S_1 est égale au produit des éléments de S_2. Par exemple, si $N = 5$, alors

$$S_1 = \{3, 5\}, \qquad S_2 = \{1, 2, 4\}$$

serait une bonne division.

(a) Trouver une bonne division pour $N = 7$.

(b) Trouver un N qui admet deux bonnes divisions distinctes.

(c) Montrer que si $N \geq 5$, alors il existe une bonne division pour N.

Votre solution :

Question C4 (10 points)

Trois joueurs A, B et C sont assis autour d'une table ronde et jouent à un jeu dans l'ordre suivant $A \to B \to C \to A \to \cdots$. À son tour, si un joueur a un nombre pair de pièces, il doit en donner la moitié au joueur suivant et il garde la moitié restante. Dans l'autre cas, s'il a un nombre impair de pièces, il en défausse une et garde le reste. Par exemple, si les joueurs A, B et C commencent avec $(\underline{2}, 3, 1)$ pièces respectivement, alors ils auront $(1, \underline{4}, 1)$ après le tour de A, $(1, 2, \underline{3})$ après le tour de B, $(\underline{1}, 2, 2)$ après le tour de C, etc. (Ici, la barre de soulignement indique le joueur dont le tour est à venir.) Nous appelons la position $(\underline{x}, y, z)$ *stable* si la partie revient à cette même position à tous les trois tours.

(a) Montrer que la partie commençant avec la position $(\underline{1}, 2, 2)$ (A est le prochain à jouer) se termine éventuellement par la position $(\underline{0}, 0, 0)$.

(b) Montrer que toute position stable comporte un total de $4n$ pièces, pour n un entier.

(c) Quel est le nombre minimal de pièces nécessaires afin d'avoir une position qui n'est pas stable, mais qui ne mène pas à $(\underline{0}, 0, 0)$?

Votre solution :

Principaux commanditaires

en collaboration avec

Partenaires :

ASDAN China
Dalhousie University
Dept. of Mathematics & Statistics,
(University of Saskatchewan)
Maplesoft
Memorial University
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
University of Toronto
York University

Commanditaires gouvernementaux :

Alberta Education
Manitoba
Nunavut
Ontario
Prince Edward Island

Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2019

7 et 8 novembre 2019

CONSIGNES AUX ÉLÈVES

<u>Consignes générales :</u>

1) N'ouvre pas le livret d'examen jusqu'à ce que ton superviseur d'examen (enseignant superviseur) ne te l'indique.

2) **Avant le début de l'examen, le superviseur t'accordera quelques minutes pour remplir la section sur l'identité des participants à la première page de l'examen.** Tu n'as pas à te presser. Assure-toi de remplir tous les champs d'information requis et d'écrire lisiblement.

3) **La lisibilité est importante :** Assure-toi que le crayon que tu comptes utiliser est suffisamment foncé pour que tes solutions soient faciles à lire.

4) Une fois que tu auras terminé l'examen et que tu l'auras remis au superviseur/enseignant, tu pourras quitter la salle.

5) Il <u>ne faut pas</u> discuter des questions et des solutions de l'examen du DOCM publiquement ou les partager (y compris en ligne) pendant au moins 24 heures.

Les téléphones mobiles et les calculatrices sont INTERDITS.

<u>Format de l'examen :</u>

Le DOCM compte trois parties à faire en 2 heures et 30 minutes :

PARTIE A: Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. <u>Tu n'as pas à montrer ton travail.</u> Une bonne réponse finale donne les points complets. Si toutefois ta réponse finale n'est pas la bonne et que tu as montré ton travail dans l'espace réservé à cet effet, tu pourrais obtenir des points partiels.

PARTIE B: Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. L'attribution des notes et des notes partielles se fera comme pour la partie A.

PARTIE C: Quatre problèmes de preuve détaillés valant 10 points chacun. <u>Il faut montrer tout son travail.</u> On pourrait accorder des notes partielles.

Les diagrammes fournis *ne sont pas* à l'échelle; ce ne sont que des aides.

Brouillons/feuilles supplémentaires : Tu *peux* utiliser du papier brouillon, mais tu dois jeter les brouillons une fois ton travail terminé et que tu remets ton livret d'examen. <u>Seul le travail qui figure dans les pages fournies dans le livret sera évalué et noté.</u> Il est interdit d'insérer des pages supplémentaires dans votre livret d'examen.

Solutions exactes : On s'attend à ce que tous les calculs et les réponses soient exprimés en des chiffres exacts tels que 4π, $2 +$, $\sqrt{7}$, etc., plutôt que 12,566, 4,646, etc.

Prix : Les noms des lauréats seront publiés sur le site Web de la Société mathématique du Canada.