Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2018

Solutions officielles

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

L'examen compte trois sections :

A. Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

B. Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

C. Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune.

Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante : https://cms.math.ca/Concours/DOCM/2018/practice.html

 17 janvier 2019

Section A – 4 points pour chaque question

A1. Soit x un nombre réel tel que $x(x+3) = 154$. Déterminer la valeur de $(x+1)(x+2)$.

La réponse est $\boxed{156}$.

Solution 1 :

En développant $x(x+3) = 154$, on trouve $x^2 + 3x = 154$. Ainsi,
$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2 = 154 + 2 = 156$.

Solution 2 :

De manière alternative, $154 = 11 \times 14 = (-11) \times (-14)$. Dans le premier cas, $x = 11$ et donc $12 \times 13 = 156$. Dans le deuxième cas, $x = -14$ et donc $(-13) \times (-12) = 156$.

A2. Soit v, w, x, y et z cinq entiers distincts tels que $45 = v \times w \times x \times y \times z$. Quelle est la somme des cinq entiers ?

La réponse est $\boxed{5}$.

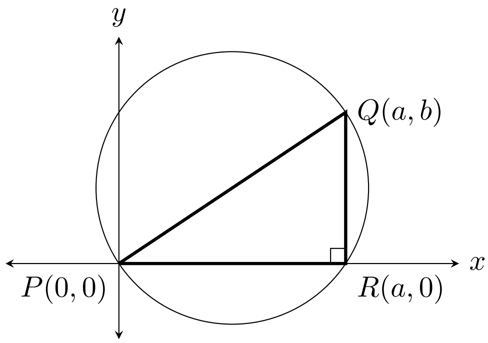
Solution :
Remarquons que $45 = 3 \times 3 \times 5$. Pour écrire 45 comme le produit de cinq facteurs entiers, il semble donc logique d'ajouter ± 1 dans le but d'augmenter le nombre de facteurs. De plus, afin que les cinq entiers soient distincts et que le produit ait le bon signe, -3 et -1 doivent apparaître chacun une fois. On a ainsi $45 = (-1) \times 1 \times (-3) \times 3 \times 5$. La somme des cinq facteurs est 5.

A3. Les points $(0;0)$ et $(3\sqrt{7};7\sqrt{3})$ sont les extrémités d'un diamètre du cercle Γ. Déterminer l'abscisse de l'autre point où Γ coupe l'axe des x.

La réponse est $\boxed{3\sqrt{7}}$**.**

Solution 1 :
Si $P(0,0)$ et $Q(a,b)$ sont les extrémités d'un diamètre et que R est l'autre point sur l'axe des x, alors ΔPQR est un triangle rectangle avec un angle droit en R.

Puisque PR est sur l'axe des x, QR est perpendiculaire à l'axe des x, donc parallèle à l'axe des y. Ainsi, le point R partage la coordonnée en x de Q, i.e. R est le point $(a,0)$. Dans notre cas, la valeur recherchée est $3\sqrt{7}$.



Solution 2 :
On peut trouver que le rayon du cercle mesure $\sqrt{210}/2$ et que le centre du cercle est situé en $(3\sqrt{7}/2, 7\sqrt{3}/2)$. L'équation décrivant le cercle est donc $(x-3\sqrt{7}/2)^2+(y-7\sqrt{3}/2)^2 = 210/4$. Pour trouver le deuxième point sur l'axe des x, on pose $y=0$ et on trouve $x=0$ et $x=3\sqrt{7}$.

A4. Dans la suite d'entiers positifs débutant par $2018, 121, 16, \ldots$ chaque terme est le carré de la somme des chiffres qui composent le terme précédent. Quel est le 2018^e terme de la suite ?

La réponse est $\boxed{256}$**.**

Solution :
On remarque qu'à partir du 5^e terme, la série oscille entre 169 pour les termes aux positions impaires et 256 pour les termes aux positions paires : $2018, 121, 16, 49, 169, 256, 169, \ldots$ Le 2018^e terme est donc 256.

Section B – 6 points pour chaque question

B1. Si on écrit $(1+\sqrt{2})^5 = a+b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers positifs, quelle est la valeur de $a+b$?

La réponse est $\boxed{70}$**.**

Solution 1 : Remarquons que si $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, alors

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n\\ &= (1+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})\\ &= a_n + b_n\sqrt{2} + a_n\sqrt{2} + 2b_n\\ &= (a_n+2b_n) + (a_n+b_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

Puisque $(1+\sqrt{2})^1 = 1 + 1\times\sqrt{2}$, on trouve que pour $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

où $a_1 = b_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Ainsi, on peut facilement faire les calculs.

n	a_n	b_n
1	1	1
2	3	2
3	7	5
4	17	12
5	41	29

On trouve alors que $a+b = a_5 + b_5 = 41 + 29 = 70$.

Solution 2 :

En développant selon le théorème du binôme, on obtient

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1}\left(\sqrt{2}\right) + \binom{5}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\sqrt{2}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\sqrt{2}\right)^5\\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1}\left(\sqrt{2}\right) + 2\binom{5}{2} + 2\sqrt{2}\binom{5}{3} + 4\binom{5}{4} + 4\sqrt{2}\binom{5}{5}\\ &= \left(\binom{5}{0} + 2\binom{5}{2} + 4\binom{5}{4}\right) + \left(\binom{5}{1} + 2\binom{5}{3} + 4\binom{5}{5}\right)\sqrt{2}\\ &= a + b\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a+b &= \left(\binom{5}{0} + 2\binom{5}{2} + 4\binom{5}{4}\right) + \left(\binom{5}{1} + 2\binom{5}{3} + 4\binom{5}{5}\right) \\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + 2\binom{5}{2} + 2\binom{5}{3} + 4\binom{5}{4} + 4\binom{5}{5} \\ &= 1 + 5 + 2(10) + 2(10) + 4(5) + 4(1) \\ &= 70 \end{aligned}$$

Solution 3 :

En faisant un calcul direct, on obtient :

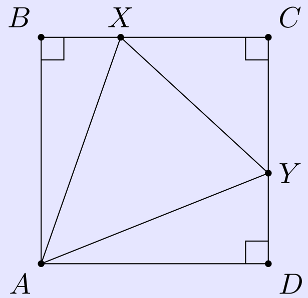
$(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})^4 = (3+2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})^5 = (17+12\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 17 + 24 + (17+12)\sqrt{2} = 41 + 29\sqrt{2}$

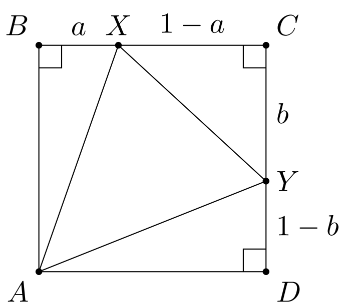
La réponse est $41 + 29 = 70$.

B2. Soit $ABCD$ un carré dont la longueur du côté est égale à 1. Les points X et Y sont respectivement sur les côtés BC et CD de façon à ce que les aires des triangles ABX, XCY et YDA soient égales. Déterminer le rapport de l'aire de ΔAXY sur l'aire de ΔXCY.



La réponse est $\boxed{\sqrt{5}}$**.**

Solution :



Soit $a = BX$ et $b = CY$. L'égalité des aires des triangles nous donne

$$\frac{a}{2} = \frac{(1-a)b}{2} = \frac{1-b}{2}.$$

En utilisant la première et la dernière expression, on trouve $a + b = 1$. En suite, on déduit $b^2 + b - 1 = 0$ de l'égalité entre la deuxième et la troisième expression. Les solutions sont $b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ mais puisque $b > 0$, on choisit $b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et ainsi $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ensuite on calcule,

$$\text{Aire de } \Delta AXY = 1 - 3(\text{Aire de } \Delta ABX) = 1 - \frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4},$$

et donc

$$\frac{\text{Aire de } \Delta AXY}{\text{Aire de } \Delta CXY} = \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{4}\right) \Big/ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) = \sqrt{5}.$$

La réponse est donc $\sqrt{5}$.

B3. La fonction *somme double* est définie de la façon suivante.

$$D(a,n) = \overbrace{a + 2a + 4a + 8a + \dots}^{n \text{ termes}}.$$

Par exemple, nous avons

$$D(5,3) = 5 + 10 + 20 = 35$$

et

$$D(11,5) = 11 + 22 + 44 + 88 + 176 = 341.$$

Déterminer le plus petit entier positif n tel que pour chaque entier i entre 1 et 6 inclusivement, il existe un entier positif a_i qui satisfait $D(a_i, i) = n$.

La réponse est $\boxed{9765}$**.**

Solution : Puisque $D(a,n) = a(2^n - 1)$, on a

$$\begin{aligned}
D(a_1, 1) &= a_1 = n \\
D(a_2, 2) &= 3a_2 = n \\
D(a_3, 3) &= 7a_3 = n \\
D(a_4, 4) &= 15a_4 = 3 \times 5 \times a_4 = n \\
D(a_5, 5) &= 31a_5 = n \\
D(a_6, 6) &= 63a_6 = 3^2 \times 7 \times a_6 = n
\end{aligned}$$

Ainsi, $3^2 \times 5 \times 7 \times 31 = 9765 \mid n$. La plus petite valeur possible est donc $n = 9765$.

Note :

$$\begin{aligned}
D(9765, 1) &= 9765 \\
D(3225, 2) &= 3255 + 6510 = 9765 \\
D(1395, 3) &= 1395 + 2790 + 5580 = 9765 \\
D(651, 4) &= 651 + 1302 + 2604 + 5208 = 9765 \\
D(315, 5) &= 315 + 630 + 1260 + 2520 + 5040 = 9765 \\
D(155, 6) &= 155 + 310 + 620 + 1240 + 2480 + 4960 = 9765
\end{aligned}$$

B4. Déterminer le nombre de 5-uplets d'entiers $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ tels que

(a) $x_i \geq i$ pour $1 \leq i \leq 5$;

(b) $\sum_{i=1}^{5} x_i = 25$.

La réponse est $\boxed{1001}$**.**

Solution : Soit $y_i = x_i - i$ pour $1 \leq i \leq 5$. Il nous reste à trouver le nombre de 5-tuplets $(y_1; y_2; y_3; y_4; y_5)$ d'entiers positifs ou nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 25 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 10.$$

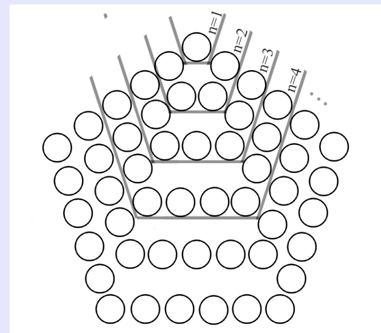
Considérons $10 + 5 - 1 = 14$ cases placées en ligne sur une feuille. On en coche $5 - 1 = 4$ parmi celles-ci. En débutant à gauche, posons y_1 le nombre de cases précédant la première case cochée, y_2 le nombre de cases entre la première et la deuxième case cochée et ainsi de suite jusqu'à y_5, le nombre de cases entre la quatrième case cochée et la fin de la rangée. Les y_i sont des entiers positifs et $\sum_{i=1}^{5} y_i = 10$. Il s'agit donc d'un 5-tuplet qui satisfait nos conditions ! Remarquons qu'étant donné un 5-tuplet $(y_1; y_2; \ldots; y_5)$, on peut cocher des cases comme expliqué plus haut et on obtient alors une bijection entre ces deux situations. Il y a $\binom{14}{4}$ façons de sélectionner les boîtes à cocher. Le nombre de 5-tuplets est donc
$\binom{14}{4} = \dfrac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{2 \times 3 \times 4} = 7 \times 13 \times 11 = 1001.$

Section C – 10 points pour chaque question

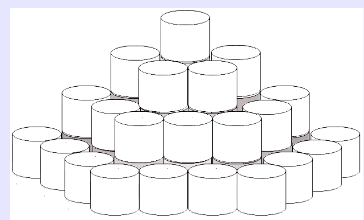
Note : Pour les questions de la section C, les participants doivent expliquer toute leur démarche.

C1.

Au Walmath, les conserves de nourriture pour chats forment une pyramide pentagonale de 15 étages de hauteur. La pyramide compte 1 conserve à l'étage supérieur, 5 conserves à l'étage juste dessous, 12 conserves au troisième étage à partir du haut, 22 conserves au quatrième étage à partir du haut et ainsi de suite de façon à ce que le k^e étage soit un pentagone avec k conserves de côté.



Une vue de dessus

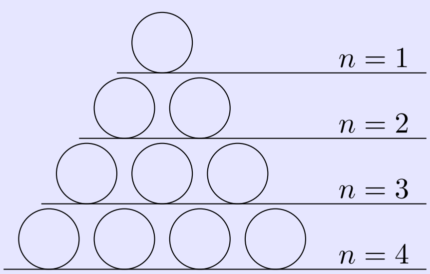


Une vue de face

(a) Combien y a-t-il de conserves sur l'étage du bas, le 15^e étage de la pyramide ?

(b) La pyramide pentagonale est réarrangée en un prisme qui compte 15 étages identiques. Combien de conserves forment le 15^e étage du prisme ?

(c) Un prisme triangulaire consiste en plusieurs étages identiques en forme de triangle. (Le nombre de conserves dans un étage triangulaire est un des nombres triangulaires : 1,3,6,10...) Par exemple, un prisme pourrait être composé des étages suivants :



Démontrer qu'une pyramide pentagonale avec un nombre d'étages $l \geq 2$ peut être réarrangée (sans reste ou déficit) en un prisme triangulaire de conserves ayant le même nombre d'étages l.

Solution (a) :

On peut trouver une formule pour exprimer le n^e nombre pentagonal. Supposons qu'il y a p_n boîtes sur le n^{e} étage. Remarquons que le n^{e} étage est formé du $n-1^{\text{e}}$ étage auquel on ajoute trois rangées de n boîtes, où 2 boîtes se trouvent sur deux des rangées. Ainsi, on a la récurrence $p_n = p_{n-1} + 3n - 2$ et on sait que $p_1 = 1$. Ainsi, on a

$$p_n = (3n-2) + (3(n-1)-2) + \cdots + (3*2-2) + (3*1-2)$$

$$= 3(1+2+\cdots+n) - 2n = \frac{3n^2-n}{2}.$$

En particulier, $p_{15} = \frac{3*15^2-15}{2} = 330$.

Autrement, on peut reconstruire la suite à partir des quatre premiers termes $1, 5, 12, 22$ en calculant les trois premières différences $4, 7, 10$ et en concluant que les différences augmentent de 3 à chaque terme. On trouve alors

1,5,12,22,35,51,70,92,117,145,176,210, 247,287,330.

Solution (b) :

On peut calculer la somme des nombres trouvés en (a) :

1+5+12+22+35+51+70+92+117+145+176+210+ 247+287+330=1800

On peut aussi utiliser la forme générale des termes de la suite des nombres pentagonaux :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} p_k = \sum_{k=1}^{15} \frac{3k^2-k}{2} &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{15} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15} k \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{15\times 16\times 31}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{15\times 16}{2}\right) = 1860 - 60 = 1800\end{aligned}$$

Puisque le prisme est formé de 15 étages identiques, le nombre de conserves à chaque étage est 1800/15=120.

Solution (c) :

Le n^{e} nombre triangulaire est $t_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dans la pyramide pentagonale à n étages, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2-k}{2} &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(n(n+1)(2n+1-1)) \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} \\ &= n \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n \times t_n.\end{aligned}$$

Ainsi, on peut réarranger ces n étages avec $\frac{n(n+1)}{2} = t_n$ boîtes à chaque étage.

C2. Alice a deux boîtes : la boîte A et la boîte B. Initialement, la boîte A contient n pièces de monnaie et la boîte B est vide. À chaque tour, Alice peut soit transférer une pièce de la boîte A à la boîte B ou retirer k pièces de la boîte A, où k est le nombre de pièces dans la boîte B à ce moment. Elle gagne lorsque la boîte A est vide.

(a) Si la boîte A contient initialement 6 pièces, montrer qu'Alice peut gagner en 4 tours.

Solution :

Appelons *opération 1* le mouvement d'une pièce de A vers B, et *opération 2* le fait de retirer des pièces de la boîte A.

a) La suite 1112 accomplit ce qui est demandé.

(b) Si la boîte A contient initialement 31 pièces, montrer qu'Alice ne peut pas gagner en 10 tours.

Solution :

On peut considérer toutes les sommes de dix avec deux entiers strictement positifs (10= 1+9=2+8=3+7=...=9+1) et leur suite correspondante d'opérations 1222222222, 1122222222,... où toutes les opérations 1 viennent avant les opérations 2. Remarquons que chaque échange entre les opérations 1 et 2 auraient pour effet d'augmenter le nombre de pièces restantes dans A par 1. Par exemple, la suite 1112222222 résulte en $31 - 1 - 1 - 1 - 3 \times 7 = 31 - 24 = 7$ pièces restantes dans la boîte A tandis que la suite 1121222222 résulte en $31 - 1 - 1 - 2 - 1 - 3 \times 6 = 31 - 23 = 8$ pièces restantes dans la boîte A et la suite 1211222222 résulte en $31 - 1 - 1 - 1 - 1 - 3 \times 6 = 31 - 22 = 9$ pièces restantes dans la boîte A.

Le meilleur résultat survient avec la suite 1111122222 ou 1111112222 mais dans ces deux cas, une pièce reste dans A. Il est donc impossible de gagner en dix tours.

(c) Quel est le nombre minimal de tours nécessaires pour qu'Alice gagne si la boîte A contient initialement 2018 pièces ?

Solution :

Si Alice fait l'opération 1 L fois puis l'opération 2 M fois, elle enlève $L(M + 1)$ pièces de la boîte A. Si elle interchange une opération 2 avec une opération 1, elle retirera moins de pièces de la boîte A. Avec L utilisations de l'opération 1 et M utilisations de l'opération 2, elle peut retirer entre L et $L(M + 1)$ pièces de la boîte A. Remarquons que lorsque $L = 45$ et $M = 44$, alors $L(M + 1) = 2025 > 2018$.

Si S est fixé et que $L + M = S$, la fonction $f_S(L) = L(M + 1) = L(1 + S - L) = (1 + S)L - L^2$ atteint son maximum à $L_{max} = (1 + S)/2$ et $f_S(L_{max}) = L^2_{max} = (1 + S)^2/4$. Donc lorsque $L + M \leq 88$, on a $L(M + 1) \leq (44.5)^2 < 2018$. Ainsi, 89 tours sont nécessaires.

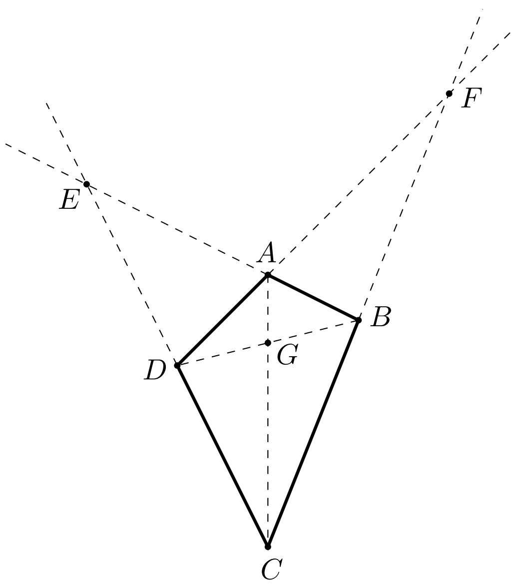
Voici une façon explicite qui permet à Alice de gagner en 89 tours lorsque 2018 pièces sont dans la boîte A : elle fait l'opération 1 à 38 reprises, l'opération 2, l'opération 1 à 7 reprises, puis l'opération 2 à 43 reprises. Ainsi, $2018 - 38 - 38 - 7 - (38 + 7) \times 43 = 0$.

C3. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Les demi-droites BA et CD se croisent en E, les demi-droites DA et CB se croisent en F et les diagonales AC et BD se croisent en G. De plus, les triangles DBF et DBE ont la même aire.

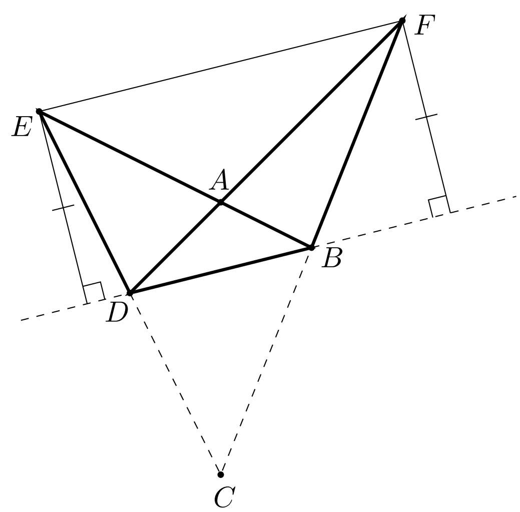
(a) Démontrer que EF et BD sont parallèles.

Solution :

Voici d'abord la figure.



a) Les triangles EBD et FBD ont la même aire, donc les hauteurs à partir de E et F sur la droite BD sont de même longueur. Ainsi, EF et BD sont parallèles.



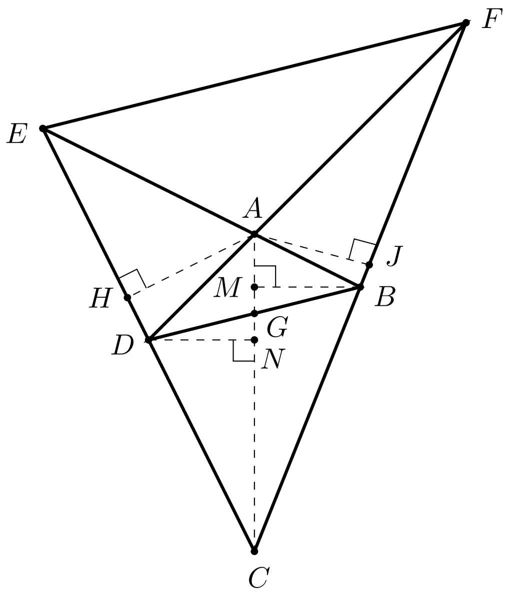
(b) Démontrer que G est le point milieu de BD.

Solution :

Dans le trapèze $BDEF$, A est l'intersection des diagonales et C est l'intersection des côtés non parallèles. On trouve d'abord que les triangles ADE et ABF ont la même aire en soustrayant le triangle ABD de la condition originale. Soit AJ et AH les hauteurs respectives des triangles ADE et ABF. On a $DE \cdot AH = BF \cdot AJ$ ou $DE/BF = AJ/AH$.

Ensuite, puisque les triangles DBC et EFC sont semblables, on trouve que DE/DC et BF/BC sont égaux. Conséquemment, $DE/BF = CD/BC$. On obtient $AJ/AH = CD/BC$ (puisque tous deux sont égaux à DE/BF), donc $AJ \cdot BC = CD \cdot AH$ et ainsi ACB et ACD ont la même aire.

Soit M et N des points sur le segment AC tels que BM et DN sont tous deux perpendiculaires à AC. À partir de l'égalité des aires de ACB et ACD, on conclut que $BM = DN$. Puisque BM et DN sont parallèles, les triangles rectangles GBM et GDN sont congrus. Ainsi G est le point milieu de BD.



(c) Étant donné que l'aire du triangle ABD est 4 et que l'aire du triangle CBD est 6, calculer l'aire du triangle EFG.

Solution :

Notons par $[ABC]$ l'aire d'un triangle ABC. On sait que

$$[ABC] = [ACD] = \frac{1}{2}([ABD] + [CBD]) = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Posons ensuite $x = [ADE]$. On a l'équation

$$\frac{x}{4} = \frac{[ADE]}{[ADB]} = \frac{AE}{AB} = \frac{[AEC]}{[ABC]} = \frac{x+5}{5},$$

qu'on peut résoudre pour obtenir $x = 20$.

Ainsi, on a

$$[EFG] = [EFD] = [FDC]\frac{DE}{DC} = [FDC]\frac{[ADE]}{[ADC]} = (x+10)\frac{x}{5} = 120.$$

C4. Étant donné un entier positif N, Mathieu écrit N en décimal sur un tableau, sans mettre de chiffre 0 superflu devant le nombre. À chaque minute, il prend deux chiffres consécutifs, les efface, puis les remplace avec le dernier chiffre de leur produit. Si cette étape a pour effet de placer des zéros à la gauche de l'écriture du nouveau nombre, ceux-ci sont effacés. Il répète ce processus autant de fois qu'il le veut. On dit qu'un entier M est *atteignable* à partir de N si en débutant avec le nombre N, une suite finie d'étapes permet à Mathieu d'obtenir le nombre M. Par exemple, 10 est atteignable à partir de 251023 via les étapes

$$2510\underline{23} \to \underline{25}106 \to 1\underline{06} \to 10.$$

(a) Montrer que 2018 est atteignable à partir de 2567777899.

Solution :

Considérons les étapes

$$25677778\underline{99} \to 2567777\underline{81} \to 25677\underline{77}8 \to 256\underline{77}98 \to 256\underline{99}8 \to 2\underline{56}18 \to 2018.$$

Toutes les solutions valides seront des variantes de cette séquence d'étapes.

(b) Trouver deux entiers strictement positifs A et B pour lesquels il n'existe aucun entier positif C tel que A et B sont atteignables à partir de C.

Solution :

Débutons en faisant quelques observations :

— Si le nombre N possède un 0, il ne peut pas disparaître à moins de prendre la position la plus à gauche (il est ainsi effacé). En particulier, cela brisera N en deux parties qui ne pourront jamais interagir.

— La seule façon de produire un 5 est en multipliant un nombre impair avec 5. Ainsi, le nombre de chiffres 5 ne peut jamais augmenter et descendra nécessairement lorsque Mathieu multiplie deux chiffres 5 ou lorsqu'il multiplie un chiffre 5 avec un nombre pair.

— De la même façon, la seule façon de produire un nombre pair non nul est de multiplier un nombre pair non nul avec n'importe quel chiffre sauf 0 ou 5.

Prenons $A = 2$ et $B = 5$ et supposons qu'il existe C pour lequel 2 et 5 sont atteignables à partir de C. Écrivons $C = c_1c_2 \cdots c_n$ en décimal, pour c_i un entier entre 0 et 9 avec $c_1 \neq 0$. Puisque 5 est atteignable à partir de C, un des c_i doit être égal à 5 ; soit k le plus grand indice tel que $c_k = 5$. Ainsi $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ doivent tous être impairs puisque dans le cas contraire, il serait impossible d'obtenir 5. D'un autre côté, 2 est aussi atteignable à partir de C, donc posons m le plus grand indice tel que c_m est pair ; cette indice doit être tel que $m < k$. Lorsque Mathieu effectue des étapes, le chiffre 5 le plus à droite sera toujours à la droite du nombre pair le plus à droite à moins que Mathieu ne fasse leur produit. Puisque 2 est atteignable à partir de C, Mathieu doit faire cette multiplication un jour ou l'autre et produire un 0. Par contre, tous les nombres à la droite du 0 seront alors impairs. Il n'y a donc aucune façon de produire un nombre pair non nul à droite du 0, ce qui contredit le fait que 2 soit atteignable à partir de C. Il est donc impossible d'atteindre 2 et 5 à partir du même nombre.

Remarque : *Prenons A, n'importe quel multiple impair de 5 et B, n'importe quel nombre pair non divisible par 10. La même preuve s'applique. Un argument fallacieux serait de dire que le produit des chiffres modulo 10 est toujours le même. Ceci est faux puisque, par exemple, $\underline{25}1 \to 1$, mais le côté gauche a un produit de $0 \pmod{10}$ tandis que le côté droit a un produit $1 \pmod{10}$ (le fait d'effacer les zéros de gauche pose problème).*

(c) Soit S un ensemble fini d'entiers strictement positifs dont aucun ne contient le chiffre 5 dans sa représentation décimale. Démontrer qu'il existe un entier positif N tel que tous les éléments de S sont atteignables à partir de N.

Solution :

On peut se restreindre à S, l'ensemble de tous les entiers strictement positifs qui ne contiennent pas le chiffre 5 et dont l'écriture décimale contient au maximum k chiffres. Définissons le nombre $C = 233\ldots3$, qui consiste en un chiffre deux suivi de $4k$ chiffres trois. Soit $X = a_1 \cdots a_r$ l'écriture décimale d'un nombre tel que $r \leq k$ et dont tous les r chiffres sont impairs et copremiers à cinq. On affirme qu'il existe un $e \in \{2, 4, 6, 8\}$ pour lequel eX (la concaténation des deux nombres) est atteignable à partir de C. En effet, n'importe quel nombre impair sauf cinq peut être construit à partir de 1 à 4 chiffres trois. Ainsi, X peut être construit à partir des $4k$ chiffres trois. Par la suite, on combine les trois restants avec le deux de gauche pour obtenir un nombre pair.
Prenons le nombre D comme $10333C333C \cdots 333C$. Ce nombre consiste en 10 suivi de k répétitions de la suite $333C$. Pour tout $X \in S$ qui ne contient pas le chiffre 0, on peut écrire $X = c_1c_2 \cdots c_r$ $(r \leq k)$, où c_i est une suite de chiffres qui débute par un chiffre pair non nul suivi par des chiffres impairs différents de cinq pour $2 \leq i \leq r$ (c_1 a soit cette forme où est seulement formé de nombres impairs). À partir du dernier C de D, on peut construire c_r, malgré que le premier chiffre peut être erroné. On utilise certains des chiffres trois pour corriger le nombre pair. On répète cette étape pour les autres sections de X. On obtient alors un nombre de la forme $Mc_2c_3 \cdots c_r$, où M est formé des chiffres restants. Puisque $r \leq k$, il y a au moins un C restant dans M avec lequel on forme c_1, dont on doit corriger le premier chiffre (s'il est pair). On enlève finalement les chiffres restants avec le deuxième chiffre (c'est un 0) pour finalement enlever le 10 de gauche afin de former X.
Comment peut-on maintenant construire tous les chiffres de S ? Pour ce faire, on pose N comme $10D0D0 \cdots D$. Ce dernier consiste en un 1 suivi de $k-1$ copies de $0D$. S'il y a $z \leq k-1$ zéros dans $X \in S$, alors on utilise les $z+1$ D les plus à droite de N pour former les suites qui précèdent le premier zéro, qui séparent les différents zéros et celle qui suit le dernier zéro. Les chiffres restants peuvent être enlevés en utilisant des zéros et comme plus tôt, le deuxième chiffre de notre nombre (0) permet d'éliminer tous les chiffres de gauche jusqu'à ce qu'on obtienne X en le combinant les deux premiers chiffres 10. Ainsi, tous les éléments de S sont atteignables à partir de N.

Remarque : *Il y a plusieurs façons de faire. Par exemple, on pourrait prendre $C = 87...7$ au lieu de* 23...3.

Principaux commanditaires

en collaboration avec

Commanditaires :

Aqueduct
Banff International Research Station
Centre de recherche mathématiques
The Fields Institute
Maplesoft
The McLean Foundation
Popular Book Company
RBC Foundation
S.M. Blair Foundation
The Samuel Beatty Fund

Partenaires du milieu de l'éducation :

University of British Columbia
University of Calgary
Dalhousie University
University of Manitoba
Memorial University
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
Dept. of Mathematics & Statistics, (University of Saskatchewan)
University of Toronto
York University
ASDAN China

Partenaires gouvernementaux :

Alberta Education
Manitoba
New Brunswick
Northwest Territories
Nova Scotia
Nunavut
Ontario
Prince Edward Island

