Société mathématique du Canada

Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2018

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

CMS SMC

Expertise. Insight. Solutions.

SOCIETY OF ACTUARIES

Identité des participants

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et fournir tous les détails requis, à défaut de quoi votre examen pourrait être rejeté. Cet examen n'est pas considéré comme étant valide à moins d'être accompagné par le formulaire signé de votre superviseur d'examen/enseignant.

1. Prénom : (obligatoire)

2. Nom de famille : (obligatoire)

3. Êtes-vous actuellement inscrit(e) à temps plein à une école primaire, secondaire ou un Cégep ou suivez-vous un enseignement à la maison depuis le 15 septembre de cette année? (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ **Non**

4. Êtes-vous citoyen(ne) canadien(ne) ou résident(e) permanent(e) du Canada? (quelle que soit votre adresse actuelle) (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ **Non**

5. Date de naissance : (obligatoire)

A A A A M M J J

6. Année de scolarité : (obligatoire)

☐ 8 ☐ 10 ☐ 12
☐ 9 ☐ 11 ☐ Cégep

autre: ______________

7. Sexe : (facultif)

☐ Féminine
☐ Masculin

8. Adresse électronique : (facultif)

NE PAS PHOTOCOPIER D'EXAMENS NON REMPLIS! Chaque page de chacun des exemplaires est pré-codée de manière unique pour faciliter l'attribution assistée par ordinateur des notes.

Question A1 (4 points)

Soit x un nombre réel tel que $x(x+3) = 154$. Déterminer la valeur de $(x+1)(x+2)$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A2 (4 points)

Soit v, w, x, y et z cinq entiers distincts tels que $45 = v \times w \times x \times y \times z$. Quelle est la somme des cinq entiers?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A3 (4 points)

Les points $(0;0)$ et $(3\sqrt{7};7\sqrt{3})$ sont les extrémités d'un diamètre du cercle Γ. Déterminer l'abscisse de l'autre point où Γ coupe l'axe des x.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A4 (4 points)

Dans la suite d'entiers positifs débutant par $2018, 121, 16, \ldots$ chaque terme est le carré de la somme des chiffres qui composent le terme précédent. Quel est le 2018^e terme de la suite?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B1 (6 points)

Si on écrit $(1+\sqrt{2})^5 = a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers positifs, quelle est la valeur de $a+b$?

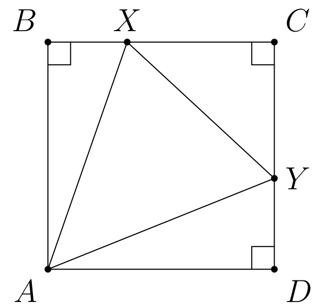
Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B2 (6 points)

Soit $ABCD$ un carré dont la longueur du côté est égale à 1. Les points X et Y sont respectivement sur les côtés BC et CD de façon à ce que les aires des triangles ABX, XCY et YDA soient égales. Déterminer le rapport de l'aire de ΔAXY sur l'aire de ΔXCY.

Votre solution :



Votre réponse finale :

Question B3 (6 points)

La fonction *somme double* est définie de la façon suivante.

$$D(a,n) = \overbrace{a + 2a + 4a + 8a + \dots}^{n \text{ termes}}.$$

Par exemple, nous avons

$$D(5,3) = 5 + 10 + 20 = 35$$

et

$$D(11,5) = 11 + 22 + 44 + 88 + 176 = 341.$$

Déterminer le plus petit entier positif n tel que pour chaque entier i entre 1 et 6 inclusivement, il existe un entier positif a_i qui satisfait $D(a_i, i) = n$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B4 (6 points)

Déterminer le nombre de 5-uplets d'entiers $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ tels que

(a) $x_i \geq i$ pour $1 \leq i \leq 5$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_i = 25$.

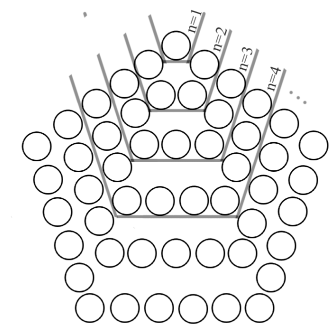
Votre solution :

Votre réponse finale :

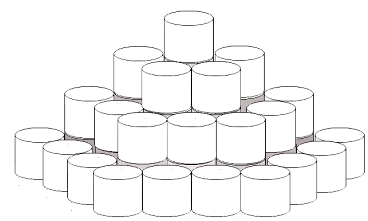
Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question C1 (10 points)

Au Walmath, les conserves de nourriture pour chats forment une pyramide pentagonale de 15 étages de hauteur. La pyramide compte 1 conserve à l'étage supérieur, 5 conserves à l'étage juste dessous, 12 conserves au troisième étage à partir du haut, 22 conserves au quatrième étage à partir du haut et ainsi de suite de façon à ce que le k^e étage soit un pentagone avec k conserves de côté.



Une vue de dessus

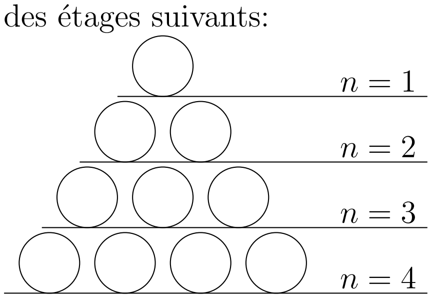


Une vue de face

(a) Combien y a-t-il de conserves sur l'étage du bas, le 15^e étage de la pyramide?

(b) La pyramide pentagonale est réarrangée en un prisme qui compte 15 étages identiques. Combien de conserves forment le 15^e étage du prisme?

(c) Un prisme triangulaire consiste en plusieurs étages identiques en forme de triangle. (Le nombre de conserves dans un étage triangulaire est un des nombres triangulaires: 1,3,6,10...) Par exemple, un prisme pourrait être composé des étages suivants:



Démontrer qu'une pyramide pentagonale avec un nombre d'étages $l \geq 2$ peut être réarrangée (sans reste ou déficit) en un prisme triangulaire de conserves ayant le même nombre d'étages l.

Votre solution :

Question C2 (10 points)

Alice a deux boîtes : la boîte A et la boîte B. Initialement, la boîte A contient n pièces de monnaie et la boîte B est vide. À chaque tour, Alice peut soit transférer une pièce de la boîte A à la boîte B ou retirer k pièces de la boîte A, où k est le nombre de pièces dans la boîte B à ce moment. Elle gagne lorsque la boîte A est vide.

(a) Si la boîte A contient initialement 6 pièces, montrer qu'Alice peut gagner en 4 tours.

(b) Si la boîte A contient initialement 31 pièces, montrer qu'Alice ne peut pas gagner en 10 tours.

(c) Quel est le nombre minimal de tours nécessaires pour qu'Alice gagne si la boîte A contient initialement 2018 pièces?

Votre solution :

Question C3 (10 points)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Les demi-droites BA et CD se croisent en E, les demi-droites DA et CB se croisent en F et les diagonales AC et BD se croisent en G. De plus, les triangles DBF et DBE ont la même aire.

(a) Démontrer que EF et BD sont parallèles.

(b) Démontrer que G est le point milieu de BD.

(c) Étant donné que l'aire du triangle ABD est 4 et que l'aire du triangle CBD est 6, calculer l'aire du triangle EFG.

Votre solution :

Question C4 (10 points)

Étant donné un entier positif N, Mathieu écrit N en décimal sur un tableau, sans mettre de chiffre 0 superflu devant le nombre. À chaque minute, il prend deux chiffres consécutifs, les efface, puis les remplace avec le dernier chiffre de leur produit. Si cette étape a pour effet de placer des zéros à la gauche de l'écriture du nouveau nombre, ceux-ci sont effacés. Il répète ce processus autant de fois qu'il le veut. On dit qu'un entier M est *atteignable* à partir de N si en débutant avec le nombre N, une suite finie d'étapes permet à Mathieu d'obtenir le nombre M. Par exemple, 10 est atteignable à partir de 251023 via les étapes

$$2510\underline{23} \to \underline{25}106 \to 1\underline{06} \to 10.$$

(a) Montrer que 2018 est atteignable à partir de 2567777899.

(b) Trouver deux entiers strictement positifs A et B pour lesquels il n'existe aucun entier positif C tel que A et B sont atteignables à partir de C.

(c) Soit S un ensemble fini d'entiers strictement positifs dont aucun ne contient le chiffre 5 dans sa représentation décimale. Démontrer qu'il existe un entier positif N tel que tous les éléments de S sont atteignables à partir de N.

Votre solution :

Principaux commanditaires

en collaboration avec

Commanditaires :

Aqueduct
Banff International Research Station
Centre de recherche mathématiques
The Fields Institute
Maplesoft
The McLean Foundation
Popular Book Company
RBC Foundation
S.M. Blair Foundation
The Samuel Beatty Fund

Partenaires du milieu de l'éducation :

University of British Columbia
University of Calgary
Dalhousie University
University of Manitoba
Memorial University
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
Dept. of Mathematics & Statistics, (University of Saskatchewan)
University of Toronto
York University
ASDAN China

Partenaires gouvernementaux :

Alberta Education
Manitoba
New Brunswick
Northwest Territories
Nova Scotia
Nunavut
Ontario
Prince Edward Island

CONSIGNES AUX ÉLÈVES

Consignes générales :

1) N'ouvre pas le livret d'examen jusqu'à ce que ton superviseur d'examen (enseignant superviseur) ne te l'indique.

2) **Avant le début de l'examen, le superviseur t'accordera quelques minutes pour remplir la section sur l'identité des participants à la première page de l'examen.** Tu n'as pas à te presser. Assure-toi de remplir tous les champs d'information requis et d'écrire lisiblement.

3) **La lisibilité est importante :** Assure-toi que le crayon que tu comptes utiliser est suffisamment foncé pour que tes solutions soient faciles à lire.

4) Une fois que tu auras terminé l'examen et que tu l'auras remis au superviseur/enseignant, tu pourras quitter la salle.

5) Il <u>ne faut pas</u> discuter des questions et des solutions de l'examen du DOCM publiquement ou les partager (y compris en ligne) pendant au moins 24 heures.

Les téléphones mobiles et les calculatrices sont INTERDITS.

Format de l'examen :

Le DOCM compte trois parties à faire en 2 heures et 30 minutes :

PARTIE A: Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. <u>Tu n'as pas à montrer ton travail.</u> Une bonne réponse finale donne les points complets. Si toutefois ta réponse finale n'est pas la bonne et que tu as montré ton travail dans l'espace réservé à cet effet, tu pourrais obtenir des points partiels.

PARTIE B: Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. L'attribution des notes et des notes partielles se fera comme pour la partie A.

PARTIE C: Quatre problèmes de preuve détaillés valant 10 points chacun. <u>Il faut montrer tout son travail.</u> On pourrait accorder des notes partielles.

Les diagrammes fournis *ne sont pas* à l'échelle; ce ne sont que des aides.

Brouillons/feuilles supplémentaires : Tu *peux* utiliser du papier brouillon, mais tu dois jeter les brouillons une fois ton travail terminé et que tu remets ton livret d'examen. <u>Seul le travail qui figure dans les pages fournies dans le livret sera évalué et noté.</u> Il est interdit d'insérer des pages supplémentaires dans votre livret d'examen.

Solutions exactes : On s'attend à ce que tous les calculs et les réponses soient exprimés en des chiffres exacts tels que 4π, $2 +$, $\sqrt{7}$, etc., plutôt que 12,566, 4,646, etc.

Prix : Les noms des lauréats seront publiés sur le site Web de la Société mathématique du Canada.