# Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2017

## Solutions officielles

*Présenté par la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.*

L'examen compte trois sections : A. Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré. B. Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré. C. Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10

**A.** Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

**B.** Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

**C.** Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10.

*Quelques solutions originales ont été choisies parmi les copies de certains étudiants afin de démontrer d'autres possibilités de raisonnement.*

— David Rowe de la Holy Heart of Mary Regional High School
— Haneul Shin de Bergen County Academies
— Victor Wang de la Sir Winston Churchill Secondary School
— Freddie Zhao du Indus Center for Academic Excellence

Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante : https://cms.math.ca/Concours/DOCM/2017/practice.html

# Section A – 4 points pour chaque question

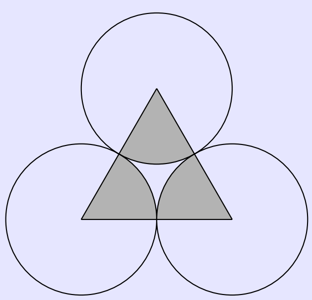
**A1.** La moyenne des nombres $2, 5, x, 14$ et $15$ est $x$. Déterminez la valeur de $x$.

**La réponse est** $\boxed{9}$.

**Solution 1 :** La moyenne des nombres est $\dfrac{2+5+x+14+15}{5} = \dfrac{x+36}{5}$ ; et doit être égale à $x$. On résout alors $36 + x = 5x$ pour trouver $x = 9$.

**Solution 2 :** Puisque la présence du $x$ n'affecte pas la moyenne des quatre autres nombres, $x = \dfrac{2+5+14+15}{4} = \dfrac{36}{4} = 9$.

**A2.** À chaque sommet d'un triangle équilatéral de côté $4\,\text{cm}$, on trace un cercle ayant un rayon de longueur $2\,\text{cm}$ comme illustré dans la figure. L'aire totale des régions ombrées dans les trois cercles est égale à $a \times \pi$ cm$^2$. Déterminez la valeur de $a$.

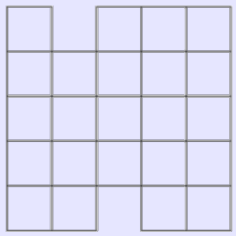


**La réponse est** $\boxed{2}$.

**Solution :** L'aire de l'intersection de chaque cercle avec le triangle est $4\pi/6$ cm$^2$. Les trois cercles ne se croisent pas donc l'aire de la région ombragée est $2\pi$ cm$^2$.

**A3.** Deux carrés $1 \times 1$ sont enlevés d'une grille $5 \times 5$ comme illustré dans la figure.



Déterminez le nombre total des carrés de différentes grandeurs qui se trouvent dans la grille.

**La réponse est $\boxed{\textbf{39}}$ squares.**

**Solution 1 :** Il y a 23 carrés $1 \times 1$, 12 carrés $2 \times 2$ et 4 carrés $3 \times 3$ pour un total de $23 + 12 + 4 = 39$ carrés.

**Solution 2 :** En ajoutant les petits carrés manquants, il y aurait $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ carrés. À ce total on doit enlever

$1 \times 2 = 2$ carrés $1 \times 1$,

$2 \times 2 = 4$ carrés $2 \times 2$,

$2 \times 3 = 6$ carrés $3 \times 3$,

$2 \times 2 = 4$ carrés $4 \times 4$.

On doit donc enlever $2 = 4 + 6 + 4 = 16$ carrés du total. Le nombre de carrés est ainsi $55 - 16 = 39$.

**A4.** Trois entiers positifs $a, b, c$ sont tels que

$$4^a \times 5^b \times 6^c = 8^8 \times 9^9 \times 10^{10}.$$

Déterminez la valeur de $a + b + c$.

**La réponse est $\boxed{\textbf{36}}$.**

**Solution :** La factorisation en nombres premiers du côté gauche de l'équation est

$$2^{2a} \times 5^b \times 2^c \times 3^c = 2^{2a+c} \times 3^c \times 5^b,$$

et celle du côté droit est

$$2^{24} \times 3^{18} \times 2^{10} \times 5^{10} = 2^{34} \times 3^{18} \times 5^{10}.$$

Ainsi, $2a + c = 34$, $c = 18$ et $b = 10$. On trouve maintenant $a$. Puisque $2a + c = 34$ et que $c = 18$, $2a + 18 = 34$, on obtient $a = 8$. Ainsi, $a + b + c = 8 + 10 + 18 = 36$.

# Section B – 6 points pour chaque question

**B1.** Antoine et Béatrice pratiquent leurs lancers libres au basket-ball. Un jour, ils ont ensemble fait un total de 105 lancers libres, chacun effectuant au moins un lancer libre. Si Antoine a réussi exactement $1/3$ de ses lancers libres et que Béatrice a réussi exactement $3/5$ de ses lancers libres, quel est le plus grand nombre possible de lancers libres réussis par les deux ?

**Réponse : Le maximum de lancers francs qu'ils ont pu réussir est $\boxed{\mathbf{59}}$.**

**Solution 1 :** À partir de leurs taux de réussite, on en déduit que chacun d'eux doit avoir effectué un multiple de 15 lancers. Plus précisément, on déduit qu'Antoine doit avoir fait un multiple de 3 lancers. Puisque le nombre total de lancers (105) est aussi un multiple de 3, le nombre de lancers effectués par Béatrice doit aussi être un multiple de 3. De la même façon, on déduit que le nombre de lancers effectués par Béatrice doit être un ultiple de 5, donc un multiple de 15 en utilisant le raisonnement précédent. Comme 105 est un multiple de 5, le nombre de lancers effectués par Antoine doit être un multiple de 5 et donc lui aussi un multiple de 15.

Supposons qu'Antoine a fait $15a$ lancers et que Béatrice a fait $15b$ lancers. On doit avoir $15a + 15b = 105$. Puisque $1/3 < 3/5$, pour maximiser le nombre de lancers réussis on doit minimiser la valeur de $a$ sans le rendre nul. Antoine a donc fait 15 lancers.

Dans ce cas, le nombre de lancers réussis est $15 \times \frac{1}{3} + 90 \times \frac{3}{5} = 5 + 54 = 59$.

**Solution 2 :** Supposons qu'Antoine a fait $a$ lancers francs et que Béatrice a fait $b$ lancers francs. Alors $a + b = 105$, $a > 0$, $b > 0$. Soit $M$ le nombre de lancers réussis. On en déduit

$$M = \frac{a}{3} + \frac{3b}{5} = \frac{a}{3} + \frac{3(105 - a)}{5} = \frac{945 - 4a}{15} = 63 - \frac{4a}{15}.$$

$M$ est maximisé lorsque $\frac{4a}{15}$ est minimal. Ceci nous indique que $a = 15$ et donc que $M = 59$.

**B2.** Il y a vingt personnes dans une salle : $a$ hommes et $b$ femmes. Chaque paire d'hommes se serre la main et chaque paire de femmes se serre la main, mais il n'y a aucune poignée de main entre un homme et une femme. Un total de 106 poignées de main sont échangées. Déterminez la valeur de $a \times b$.

**La réponse est $\boxed{84}$.**

**Solution 1 :** Puisqu'il y a 20 personnes dans la pièce,

$$a + b = 20.$$

Il n'y a aucune poignée de main entre un homme et une femme. Dans un groupe de $m$ personnes, il y a $m(m-1)/2$ paires de personnes. Ainsi, le nombre de poignées de main données est

$$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} = 106,$$

ce qui peut être réécrit comme

$$\frac{a^2 + b^2 - (a+b)}{2} = 106 \Rightarrow a^2 + b^2 = 212 + (a+b) = 232.$$

En substituant $b = 20 - a$ dans l'équation on obtient

$$a^2 + (20-a)^2 = 232 \Rightarrow a^2 + (400 - 40a + a^2) = 232$$

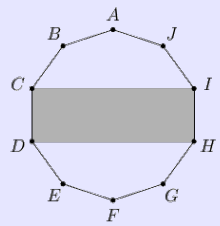
$$\Rightarrow 2a^2 - 40a + 168 = 0 \Rightarrow 2(a^2 - 20a + 84) = 0.$$

On peut factoriser l'expression à $2(a-14)(a-6) = 0$. Ainsi, $a = 14$ ou $a = 6$. Puisque $a + b = 20$, $(a, b) = (14, 6)$ ou $(6, 14)$. Donc $a \times b = 84$.

**Solution 2 :** Puisqu'il y a 20 personnes dans la pièce, il y a $\frac{20 \times 19}{2} = 190$ paires de personnes. Parmi eux, $a \times b$ paires ne se serrent pas la main.

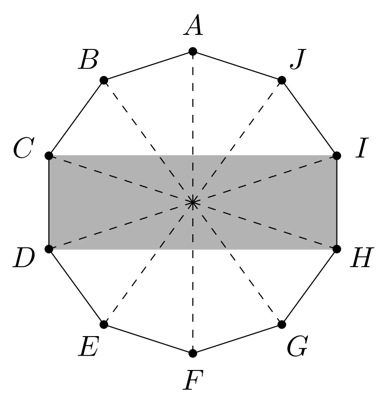
Ainsi, $190 - a \times b = 106$ poignées de main sont données, et donc $a \times b = 190 - 106 = 84$.

**B3.** Un décagone régulier (polygone à 10 côtés) $ABCDEFGHIJ$ a une aire de 2017 unités carrées. Déterminez l'aire (en unités carrées) du rectangle $CDHI$.




**La réponse est $\boxed{806.8}$ unités carrées.**

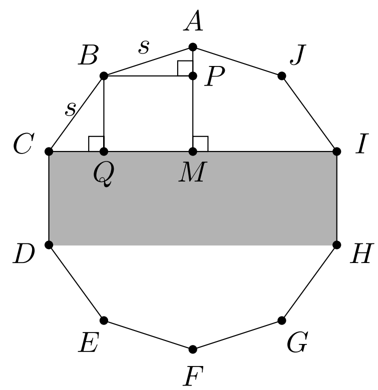
**Solution 1 :** Si $O$ est le centre du décagone et qu'on coupe ce dernier en triangles isocèles comme sur la figure, on remarque que l'aire du décagone est 10 fois l'aire d'un des triangles. Puisque les diagonales $CH$ et $DI$ ont la même mesure et qu'elles se croisent en leur milieu, le quadrilatère $CDHI$ est un rectangle avec la même base que les triangles mais avec le double de la hauteur. Ainsi, l'aire de $CDHI$ est quatre fois celle des triangles et donc 40% de l'aire totale du décagone, soit $0,4 \times 2017 = 806,8$ unités carrées.




*Une deuxième solution est présentée sur la page suivante.*

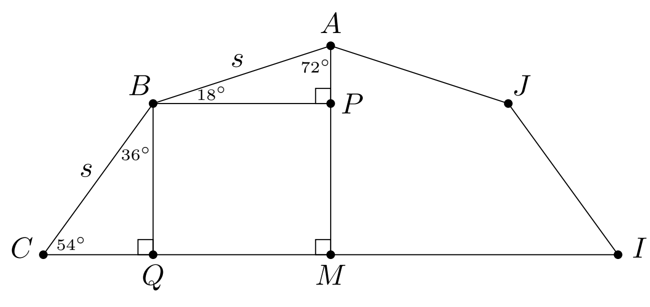
**Solution 2 :** Soit $s = |AB|$ la longueur des côtés du décagone régulier. Puisqu'il s'agit d'un polygone régulier à 10 côtés, tous ses angles intérieurs sont égaux : $\angle ABC = \angle JAB = 180 \times (10-2)/10 = 144°$. Soit $M$ le point milieu de $CI$. Traçons $AM$ perpendiculaire à $CI$. On place le point $P$ sur $AM$ et le point $Q$ sur $CM$ de façon à ce que $BP$ soit perpendiculaire à $AM$ et que $BQ$ soit perpendiculaire à $CM$.




L'aire de $ABCM$ peut être trouvée en additionnant l'aire des triangles rectangles $BPA$ et $BQC$ et du rectangle $BPMQ$. Remarquons que l'angle $BAP$ est 144/2=72° et donc l'angle $ABP$ mesure $90 - 72 = 18°$. De plus, l'angle $CBQ$ mesure $144 - 18 - 90 = 36°$ et donc $BCQ$ mesure $90 - 36 = 54°$.

L'aire du triangle rectangle $BPA$ est $\frac{1}{2}s^2 \sin 18° \cos 18° = \frac{1}{4}s^2 \sin 36°$.

L'aire du triangle rectangle $BQC$ est $\frac{1}{2}s^2 \sin 54° \cos 54° = \frac{1}{4}s^2 \sin 108° = \frac{1}{4}s^2 \cos 18°$.




L'aire du rectangle $BPMQ$ est $s^2 \sin 54° \cos 18° = \frac{1}{2}s^2(\sin 36° + \sin 72°) = \frac{1}{2}s^2(\sin 36° + \cos 18°)$.

Ainsi, l'aire de $ABCM$ est $\frac{3}{4}s^2(\sin 36° + \cos 18°) \equiv \Delta$.

L'aire de $CDHI$ est $2s^2(\sin 36° + \cos 18°) = \frac{8}{3}\Delta$.

L'aire totale du décagone est $4\Delta + \frac{8}{3}\Delta = \frac{20}{3}\Delta = 2017$.

Ainsi, l'aire de $CDHI$ est $\frac{8}{20} \times 2017 = 806,8$.

**B4.** Les nombres $a, b$ et $c$ forment une suite arithmétique si $b - a = c - b$. Soientt $a, b$ et $c$ des entiers positifs qui forment une suite arithmétique avec $a < b < c$. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Deux nombres réels distincts $r$ et $s$ sont tels que $f(r) = s$ et $f(s) = r$. Si $rs = 2017$, déterminez la plus petite valeur possible de $a$.

**La réponse est** $\boxed{9}$.

**Solution 1 :** Remarquons que

$$\begin{aligned} ar^2 + br + c &= s \\ as^2 + bs + c &= r \end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient

$$a(r^2 - s^2) + b(r - s) = -(r - s) \Rightarrow a(r + s)(r - s) + (b + 1)(r - s) = 0$$

$$\Rightarrow (a(r + s) + b + 1)(r - s) = 0.$$

Puisque $r \neq s$, $r + s = -\frac{b+1}{a}$.
En substituant $s = -\frac{b+1}{a} - r$ dans la première équation, on obtient
$ar^2 + br + c = -\frac{b+1}{a} - r \Rightarrow ar^2 + (b + 1)r + c + \frac{b+1}{a} = 0.$

En substituant $r = -\frac{b+1}{a} - s$ dans la première équation, on obtient
$as^2 + bs + c = -\frac{b+1}{a} - s \Rightarrow as^2 + (b + 1)s + c + \frac{b+1}{a} = 0.$

Ainsi, $r$ et $s$ sont les solutions de l'équation $ax^2 + (b + 1)x + c + \frac{b+1}{a} = 0$. Le produit des solutions à cette équation sont $\frac{c}{a} + \frac{b+1}{a^2} = 2017$.

On sait aussi que les coefficients forment une suite arithmétique, ce qui nous permet de poser
$b = a + k, c = a + 2k$. Ainsi, nous avons $\frac{a+2k}{a} + \frac{a+k+1}{a^2} = 2017$ et donc

$$k = \frac{2016a^2 - 1 - a}{2a + 1} = 1008a - 504 + \frac{503 - a}{2a + 1} = 1008a - 504 + \frac{1}{2}\left(\frac{1007}{2a + 1} - 1\right).$$

Afin que $k$ soit entier, $2a + 1$ doit être un facteur de $1007 = 19 \times 53$. Ainsi $a = 9$, $a = 26$ ou $a = 503$.

Le plus petit entier positif $a$ pour lequel $k$ est un entier est $a = 9$.

Dans ce cas, $k = 8594$, $b = 8603$ et $c = 17197$.

Les racines $r = -478 + 3\sqrt{25163}$ et $s = -478 - 3\sqrt{25163}$ satisfont les conditions demandées.

*Une deuxième solution est présentée sur la page suivante.*

**Solution 2 :** Remarquons que

$$\begin{array}{rcll} ar^2+br+c & = & s & (1) \\ as^2+bs+c & = & r & (2) \end{array}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient

$$a(r^2-s^2)+b(r-s) = -(r-s) \Rightarrow a(r+s)(r-s)+(b+1)(r-s)=0$$

$$\Rightarrow (a(r+s)+b+1)(r-s)=0.$$

Puisque $r \neq s$, $r+s=-\frac{b+1}{a}$.
En multipliant maintenant (1) par $r$ et (2) par $s$, on trouve les équations

$$\begin{array}{rcll} ar^3+br^2+cr & = & rs & (3) \\ as^3+bs^2+cs & = & rs & (4) \end{array}$$

On additionne ensuite (3) et (4) pour obtenir

$$2rs = a((r+s)^3-3rs(r+s))+b((r+s)^2-2rs)+c(r+s).$$

Ainsi,

$$rs(2+3a(r+s)+2b) = a(r+s)^3+b(r+s)^2+c(r+s). \qquad (5)$$

On remarque que $2+3a(r+s)+2b = 2-3(b+1)+2b = -(b+1) = a(r+s)$. À partir de (5), $ars(r+s) = a(r+s)^3+b(r+s)^2+c(r+s)$, et donc

$$rs = (r+s)^2+\frac{b}{a}(r+s)+\frac{c}{a} = \frac{(b+1)^2}{a^2}-\frac{b(b+1)}{a^2}+\frac{c}{a} = \frac{b+1}{a^2}+\frac{c}{a}.$$

Par conséquent, $2017 = \frac{b+1}{a^2}+\frac{c}{a}$ qui devient $2017a^2-ca-(b+1)=0$. Puisque $a, b, c$ forment une suite arithmétique, $2b=a+c$ ou $c=2b-a$. À partir de la dernière équation, on obtient $2017a^2-(2b-a)a-(b+1)=0$, ce qui implique que

$$b = \frac{2018a^2-1}{2a+1} = \frac{(2a+1)(1009a-1)-1007a}{2a+1} = 1009a-1-\frac{1007a}{2a+1}.$$

Le nombre $b$ est entier donc $\frac{1007a}{2a+1}$ doit être entier. puisque $\text{PGCD}(a, 2a+1)=1$, $2a+1$ doit être un facteur de $1007 = 19 \times 53$ et donc $a=9$, $a=26$ ou $a=503$. La plus petite valeur est $a=9$.

# Section C – 10 points pour chaque question

*Note : Pour les questions de la section C, les participants doivent expliquer toute leur démarche.*

**C1.** Pour un entier positif $n$, on définit la fonction $P(n)$ comme étant la somme des chiffres de $n$ **plus** le nombre de chiffres de $n$. Par exemple, $P(45) = 4 + 5 + 2 = 11$. (À noter que le premier chiffre du côté gauche de $n$ ne peut pas être 0).

(a) Calculez $P(2017)$.

**Solution :** $2 + 0 + 1 + 7 + 4 = 14$.

La réponse est $\boxed{\text{P(2017)=14}}$.

(b) Déterminez tous les nombres $n$ tels que $P(n) = 4$.

**Solution :** Parmi les nombres à 1 chiffre, seul $n = 3$ satisfait la condition. Pour les nombres à 2 chiffres, il faut que la somme des chiffres soit 2. Les deux possibilités sont $n = 11$ et $n = 20$. Pour les nombres à 3 chiffres, il faut que la somme des chiffres soit 1. La seule possibilité est $n = 100$. Pour les nombres à 4 chiffres ou plus, $P(n) > 4$ donc nous avons trouvé toutes les possibilités.

La réponse est $\boxed{3, 11, 20 \text{ et } 100}$.

(c) Déterminez, en expliquant votre raisonnement, s'il existe un nombre $n$ pour lequel $P(n) - P(n + 1) > 50$.

**Solution :** Si $n$ et $n + 1$ diffèrent seulement par le chiffre à la position des unités, $P(n) - P(n + 1) > 50$ n'est pas possible.

Considérons le cas où $n$ est composé de $k$ fois le chiffre 9. Dans ce cas $P(n) = 9k + k = 10k$ et $P(n + 1) = 1 + (k + 1) = k + 2$. Si on veut que $P(n) - P(n + 1) = 9k - 2 > 50$, on doit avoir $k \geq 6$. Pour $k = 6$, $n = 999999$ et $P(999999) - P(1000000) = 60 - 8 > 50$.

La réponse est $\boxed{\text{Oui, par exemple}\, n = 999999}$.

**C2.** On dit qu'une fonction $f(x)$ est périodique avec une période $T > 0$ si $f(x+T) = f(x)$ pour toute valeur de $x$. Le plus petit nombre $T$ ayant cette propriété est appelé la plus petite période. Par exemple, les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont périodiques avec plus petite période $2\pi$.

(a) Soit $g(x)$ une fonction périodique dont la plus petite période est $T = \pi$. Déterminez la plus petite période de $g(x/3)$.

**Solution :** La plus petite période de $g\left(\frac{x}{3}\right)$ est $3\pi$ puisque $g\left(\frac{x+3\pi}{3}\right) = g\left(\frac{x}{3}+\pi\right) = g\left(\frac{x}{3}\right)$.

Si $g(x/3)$ avait une période inférieure à $3\pi$, alors $g(x)$ aurait une période inférieure à $\pi$, ce qui est une contradiction.

La réponse est $\boxed{3\pi}$.

(b) Déterminez la plus petite période de $H(x) = \sin(8x) + \cos(4x)$.

**Solution :** La plus petite période de $\sin(8x)$ est $\frac{\pi}{4}$ puisque $\sin(8(x+\frac{\pi}{4})) = \sin(8x+2\pi) = \sin(8x)$. La plus petite période de $\cos(4x)$ est $\frac{\pi}{2}$ puisque $\cos(4(x+\frac{\pi}{2})) = \cos(4x+2\pi) = \cos(4x)$. On choisit la plus grande des deux périodes pour la somme des fonctions. En général, c'est le plus petit commun multiple des deux périodes qui est la plus petite période de la somme.

Si $H(x)$ avait une plus petite période inférieure à $\pi/2$, alors $\cos x$ aurait une période inférieure à $2\pi$, ce qui est une contradiction.

La réponse est $\boxed{\pi/2}$.

(c) Déterminez la plus petite période des fonctions $G(x) = \sin(\cos(x))$ et $F(x) = \cos(\sin(x))$.

**La solution est en deux parties :**

1. $G(x+2\pi) = \sin(\cos(x+2\pi)) = \sin(\cos(x)) = G(x)$.

Pour montrer que $T = 2\pi$ est la plus petite période, considérons par exemple $x = 0$. On remarque que $G(0) = \sin(1)$. Pour que $G(T) = \sin(\cos(T)) = \sin(1)$, nous devons avoir soit $\cos(T) = 1 + 2\pi k$ ou $\cos(T) = -1 + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dans le premier cas, on remarque que l'inégalité $-1 \leq 1 + 2\pi k \leq 1$ est vraie seulement si $k = 0$. Ceci nous indique que $\cos(T) = 1$ et donc que $T = 2\pi$. Dans le deuxième cas, $-1 \leq -1 + (2k+1)\pi \leq 1$ n'est vraie pour aucun entier $k$. Ainsi, la seule possibilité est $T = 2\pi$.

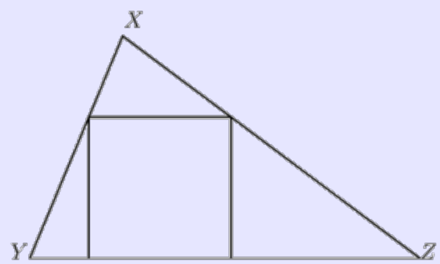
2. $F(x+\pi) = \cos(\sin(x+\pi)) = \cos(-\sin(x)) = \cos(\sin(x)) = F(\pi)$.

Pour montrer que $T = \pi$ est la plus petite période, considérons par exemple $x = 0$. On remarque que $F(0) = 1$. Il est donc nécessaire que $F(0+T) = \cos(\sin(T)) = 1$. On a alors que $\sin T = 0$, et donc la plus petite valeur strictement positive pour $T$ est $T = \pi$.

Les réponses sont $\boxed{2\pi}$ et $\boxed{\pi}$.

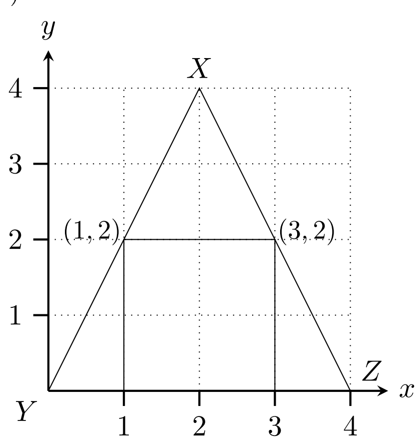
 

**C3.** Soit $XYZ$ un triangle aigu (tous les angles intérieurs sont aigus). Soit $s$ la longueur du côté du carré qui a deux sommets adjacents sur le segment $YZ$, un sommet sur le côté $XY$ et un sommet sur le côté $XZ$. Soit $h$ la distance qui sépare $X$ du côté $YZ$ et $b$ la distance entre $Y$ et $Z$.




(a) Si les coordonnées des sommets sont données : $X = (2;4)$, $Y = (0;0)$ et $Z = (4;0)$, déterminez les valeurs de $b$, $h$ et $s$.

**Solution :** En soustrayant les coordonnées des points correspondants, on obtient $b = z_1 - y_1 = 4 - 0 = 4$, $h = x_2 - y_2 = x_2 - z_2 = 4 - 0 = 4$. Remarquons que les points $(1,2)$ et $(3,2)$ reposent respectivement sur les côtés $XY$ et $XZ$. Avec les points $(1,0)$ et $(3,0)$, ils forment un carré qui satisfait les conditions du problème. Ce carré a un côté $s = 2$. (De façon équivalente, à partir de triangles semblables on trouve $\frac{s}{b} = \frac{h-s}{h}$ donc $\frac{s}{4} = \frac{4-s}{4}$ et ainsi $s = 2$.)




La réponse est $\boxed{b = 4, \quad h = 4, \quad s = 2}$.

(b) Si $h = 3$ et $s = 2$, déterminez la valeur de $b$.

**Solution :** Puisque $XPQ$ est semblable à $XYZ$, $h = 3$ et la hauteur correspondante dans $XPQ$ mesure $3 - 2 = 1$. On en déduit que la base de $XYZ$ mesure $3 \times 2 = 6$.

La réponse est $\boxed{b = 6}$.

(c) Si l'aire du carré est 2017, déterminez la valeur minimale de l'aire du triangle $XYZ$.

**Solution 1 :** Comme $XPQ$ et $XYZ$ sont semblables, on a que $\frac{s}{b} = \frac{h-s}{h}$. De manière équivalente, $s = \frac{bh}{b+h}$. Ainsi $s^2 = \frac{(bh)^2}{(b+h)^2} = 2K\frac{bh}{(b+h)^2}$. Dans cette dernière équation, $K = \frac{bh}{2}$ est l'aire de $XYZ$. Par l'inégalité arithmético-géométrique (la moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne géométrique), on trouve $\frac{4bh}{(b+h)^2} \leq 1$ et donc $s^2 \leq \frac{K}{2}$.

On sait que $2017 \leq \frac{K}{2}$. Ainsi, $4034 \leq K$.

On montre maintenant que l'aire minimale est obtenue lorsque $b = h = 2s = 2\sqrt{2017}$. En fait, lorsque $b = h$ alors $s = \frac{bh}{b+h} = \frac{b}{2} = \frac{h}{2}$ et $K = 2s^2 = 4034$.

L'aire minimale de $XYZ$ est 4034.

La réponse est $\boxed{4034}$.

**Solution 2 :** À partir de la similitude de $XPQ$ et $XYZ$ on obtient $\frac{s}{b} = \frac{h-s}{h}$. Ainsi, $b = \frac{sh}{h-s}$. L'aire

$$[XYZ] = \frac{bh}{2} = \frac{h^2 s}{2(h-s)}.$$

Trouver la valeur minimale de cette expression équivaut à trouver le maximum de l'expression réciproque $\frac{2(h-s)}{h^2 s} \to \text{max}$.

Remarquons que la réciproque est une forme quadratique avec la variable $\frac{1}{h}$, soit

$$\frac{2(h-s)}{h^2 s} = -2\left(\frac{1}{h}\right)^2 + \frac{2}{s}\left(\frac{1}{h}\right),$$

et son maximum est donc atteint en $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s}$ ou de manière équivalente pour $h = 2s$.

Ainsi $b = 2s$ et l'aire $[XYZ] = 2s^2 = \boxed{4034}$.

*Un remerciement spécial à **Haneul Shin de la Bergen County Academies** pour avoir donné la solution présentée plus haut. Celle-ci a été éditée pour la clarté et la précision.*

**C4.** Soit $n$ un entier positif et $S_n = \{1; 2; \ldots; 2n-1; 2n\}$. Un *appariement parfait* de $S_n$ est une partition des $2n$ nombres en $n$ paires, de façon à ce que la somme des deux nombres de chaque paire soit toujours un carré parfait. Par exemple, si $n = 4$, un appariement parfait de $S_4$ est $(1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5)$. Il n'est pas nécessaire que chaque paire ait pour somme le même carré parfait.

(a) Montrez que $S_8$ possède au moins un appariement parfait.

**Solution :** Pour $n = 8$ les paires $(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)$ ont toutes une somme de 9 les paires $(9, 16), (10, 15), (11, 14), (12, 13)$ ont toutes une somme de 25.

La réponse est $\boxed{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (9, 16), (10, 15), (11, 14), (12, 13)}$.

(b) Montrez que $S_5$ ne possède aucun appariement parfait.

**Solution 1 :** Toutes les paires doivent avoir une somme de 16, 9 ou 4. Les 5 paires doivent avoir une somme totale de 55. Il doit donc y avoir au moins 2 paires dont la somme est 16. Dans ce cas, les trois autres paires doivent avoir une somme de 55 - 32 = 23, ce qu'il est impossible d'obtenir avec des 9 et des 4. Il ne peut y avoir plus de trois paires dont la somme est 16 puisqu'il y a seulement deux façon de les former, soit (6, 10) et (7, 9).

P.S. Il est aussi possible de construire un argument en utilisant toutes les sommes modulo 8 :

$$55 \equiv 7 \mod 8, \quad 16 \equiv 0 \mod 8, \quad 9 \equiv 1, \mod 8, \quad 4 \equiv 4 \mod 8.$$

Ainsi, pour cinq paires on doit avoir $7 = 4 + 1 + 1 + 1 + 0$. Ceci ne donne pas la bonne somme : $4 + 9 + 9 + 9 + 16 = 47 \neq 55$ donc l'appariement parfait est impossible.

**Solution 2 :** Considérons $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Remarquons que 10 nécessite 6 afin de former une paire parfaite, ce qui signifie que 3 peut seulement former une paire parfaite avec 1. Ceci laisse le 8 sans partenaire pour former une paire parfaite.

*Un remerciement spécial à* ***David Rowe de la Holy Heart of Mary Reg. H.S.*** *pour avoir donné la solution précédente. Celle-ci a été éditée pour la clarté la précision.*

(c) Montrez ou réfutez : il existe un entier positif $n$ pour lequel $S_n$ a au moins 2017 appariement parfaits différents. (Si deux appariements sont composés des mêmes paires écrites dans un ordre différent, on considère qu'il s'agit du même appariement)

**Solution 1 :** La façon la plus simple d'obtenir un assemblage parfait de $\{a, a+1, ..., 2m\}$ est que toutes les paires aient la même somme, ce qui est possible lorsque $a+2m$ est un carré. La deuxième manière la plus simple d'y arriver survient lorsque les ensembles $\{a, ..., 2n\}$ et $\{2n+1, ..., 2m\}$ sont tels que $a+2n$ et $2n+1+m$ sont des carrés. On débute en montrant le lemme suivant :

**Lemme :** Soit $a \equiv 1 \pmod 4$ un entier positif. Il existe un nombre entier positif pair $m$ tel que $2m > a$ et $\{a, a+1, \ldots, 2m\}$ possède 2 assemblage parfaits distincts en $(2m-a+1)/2$ paires.

**Preuve du lemme :** Soit $x, y$ des nombres entiers impairs positifs qui satisfont

$$x^2 > 2a, \quad y^2 > 2(x^2 - a + 1).$$

En prenant $m = \frac{y^2 - x^2 + a - 1}{2}$, on trouve

$$\{a, \ldots, 2m\} = \{a, a+1, \ldots, x^2 - a\} \dot\cup \{x^2 - a + 1, x^2 - a + 2, \ldots, y^2 - x^2 + a - 1\},$$

où on place les éléments du premier ensemble en paires dont la somme est $x^2$ et les éléments du deuxième ensemble en paires dont la somme est $y^2$. On voudrait aussi former des paires qui ont toutes la même somme, i.e. on voudrait que $2m + a$ soit un carré. Ceci revient à résoudre

$$y^2 - x^2 + 2a - 1 = z^2,$$

dans laquelle $x, y$ sont des entiers impairs positifs, $z$ est un entier positif, $x^2 > 2a$ et $y^2 > 2(x^2 - a + 1)$. Le fait que $m$ soit pair est automatiquement vérifié puisque $y^2 - x^2 - a + 1 \equiv 0 \pmod 4$ car $x$ et $y$ sont impairs. Plus précisément, $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \equiv 0 \pmod 4$ et $a \equiv 1 \pmod 4$. On réarrange l'équation pour obtenir

$$(y - z)(y + z) = y^2 - z^2 = x^2 - 2a + 1.$$

En choisissant $x = 2r + 1$ comme un entier impair positif supérieur à $\sqrt{2a}$ et en remarquant que $x^2 = 4r(r+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$ et $2a \equiv 2 \pmod 8$, on trouve que $x^2 - 2a + 1 \equiv 0 \pmod 8$. Ainsi, on pose $y - z = 2$ et $y + z = \frac{x^2 - 2a + 1}{2}$ et on obtient

$$y = \frac{x^2 - 2a + 5}{4}, \quad z = \frac{x^2 - 2a - 3}{4}.$$

Ainsi $y$ et $z$ sont des entiers positifs, $y$ est impair et $y, z$ satisfont $y^2 - x^2 + 2a - 1 = z^2$. On a supposé que $x^2 > 2a$ donc nous aurons terminé en supposant que $y^2 > 2(x^2 - a + 1)$. Mais $y^2$ est une expression de degré 2 en $x$ et donc l'inégalité est vérifiée pour $x$ suffisamment grand. Ainsi, on peut choisir $x$ suffisamment grand pour que l'inégalité tienne. Ceci complète la preuve du lemme.

On montre maintenant que pour n'importe quel $N \geq 2$, il existe un entier $n$ pour lequel $S_n$ a au moins $N$ différents assemblages parfaits. On procède par induction sur $N$, et on impose que $n$ soit pair. Le cas $N = 2$ est réglé par le lemme précédent avec $a = 1$. Supposons que l'énoncé est vrai pour $N - 1 \geq 2$ et que $m$ est un nombre pair tel que $\{1, \ldots, 2m\}$ a au moins $N - 1$ assemblages parfaits. Prenons ensuite $a = 2m + 1 \equiv 1 \pmod 4$ dans le lemme précédent pour obtenir $n > m$ pair pour lequel $\{2m + 1, \ldots, 2n\}$ possède au moins 2 paires de partitions dont la somme des paires est un carré. En combinant ces assemblages avec ceux de $\{1, \ldots, 2m\}$, on remarque que $\{1, \ldots, 2n\}$ possède au moins $2(N - 1) \geq N$ assemblages parfaits. Ainsi, le résultat est vrai pour $N = 2017$.

**Solution 2 :** On commence par démontrer l'énoncé suivant.

**Lemme :** Il existe des nombres arbitrairement grands $n \equiv 0 \mod (4)$ pour lesquels l'ensemble $S_n$ possède un appariement parfait.

**Démonstration du lemme :** On fait un démonstration par induction. On sait qu'il existe un appariement parfait pour $S_4$. Supposons qu'il existe un appariement parfait pour $S_n$ pour un entier $n$ divisible par 4. Nous allons construire un appariement parfait pour $S_m$ avec $m > n$ aussi divisible par 4.
La construction est une généralisation directe de la méthode utilisée pour la partie (a). On va trouver $m = n + r$ avec $r > 0$ divisible par 4 tel que $2n + 2m + 1 = k^2$ pour un certain entier $k$. Ceci nous donne un appariement parfait de $S_m$ consistant en toutes les paires de l'appariement parfait de $S_n$ ainsi que des nouvelles paires

$$(2n + 1, 2m),\ (2n + 2, 2m - 1),\ \ldots,\ (2n + r, 2n + r + 1).$$

On a donc l'équation $2(n + m) + 1 = 4n + 2r + 1 = k^2$, i.e.

$$r = \frac{k^2 - 4n - 1}{2}.$$

Prenons $k = 2q + 1$, où $q^2 \geq n$. Ainsi

$$r = (4q^2 + 4q + 1 - 4n - 1)/2 = 2(q(q + 1) - n). \qquad (*)$$

Puisque $q(q + 1)$ et $n$ sont tous deux pairs, $r$ est divisible par 4 et la construction est complète. Ceci termine la preuve du lemme.

Remarquons que dans cette construction, chaque appariement parfait de $S_n$ nous donne un appariement parfait de $S_m$ et ceux-ci sont tous différents.

Supposons maintenant, dans le but de créer une contradiction, qu'il existe un entier $H$ (dans le contexte du problème, $H < 2017$) tel que pour tout $i \geq 16$ divisible par 4, l'ensemble $S_i$ a au plus $H$ appariements parfaits. Soit $n \geq 16$ divisible par 4 et tel que $S_n$ a exactement $H$ appariements parfaits. En utilisant la construction précédente, on trouvera $H$ appariements parfaits pour $S_m$. On explique plus tard comment justifier que $S_m$ a un appariement parfait différent de ceux expliqués par notre construction. Un tel ensemble $S_m$ aura $H + 1$ appariements parfaits, une contradiction.

Puisque $n$ est divisible par 4, prenons $q = n/4$ dans $(*)$, ce qui nous donne $r = n^2/8 + n/2 - 2n = n(n-12)/8$. Ici, le rôle de la condition $n \geq 16$ devient clair : il assure que $r > 0$. Le calcul suivant nous assure que $2m+1$ est un carré :

$$2m + 1 = 2(n + r) + 1 = 2n + \frac{n(n-12)}{4} + 1 = \frac{n^2 - 4n + 4}{4} = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2.$$

Ainsi, en plus des appariements parfaits de $S_m$ qui correspondent à ceux de $S_n$, on a aussi l'appariement parfait

$$\{(1, 2m), (2, 2m-1), \ldots, (m, m+1)\}.$$

**Solution 3 :** Cette solution est basée sur le fait qu'il existe une progression arithmétique de longueur 3 formée de carrés, spécifiquement $\{1, 25, 49\}$.

Remarquons que si $n = \frac{25N^2-1}{2}$ pour un certain entier impair $N \geq 1$ alors il existe au moins un appariement parfait de $S_n$, soit

$(1, 25N^2 - 1), (2, 25N^2 - 2), \ldots, (\frac{25N^2-1}{2}, \frac{25N^2+1}{2})$.

Maintenant, on peut choisir un entier $N$ assez grand pour lequel il existe au moins 2016 paires d'entiers $(a, b)$ telles que $1 \leq a < b \leq 2n$ et $b - a = 24N^2$. (N'importe quel entier impair $N$ avec $N^2 > 2017$ fera l'affaire.)

Ensuite, on peut prendre n'importe quelles deux paires $(a, 25N^2 - a)$ et $(b, 25N^2 - b)$ de l'appariement parfait et les échanger avec $(a, 25N^2 - b)$ et $(b, 25N^2 - a)$. Lorsque $b - a = 24N^2$, cet échange produira un nouvel appariement parfait puisque $25N^2 + b - a = 25N^2 + 24N^2 = 49N^2$ et $25N^2 - b + a = 25N^2 - 24N^2 = N^2$. De cette façon, on peut produire 2016 nouveaux appariements parfaits. Avec l'appariement parfait initial, on en a 2017 au total.

*Un remerciement spécial à* ***Victor Wang de la Sir Winston Churchill S.S.*** *pour avoir donné la solution précédente. Celle-ci a été éditée pour la clarté et la précision.*

**Solution 4 :** Séparons les ensembles $S_n$ en deux groupes : $(1 \ldots, x)$ et $(x+1, \ldots 2n)$. La partition $(1, x), (2, x-1), \ldots, (x+1, 2n), (x+2, 2n-1), \cdots)$ de $S_n$ est un appariement parfait en autant que $x$ soit pair et que $1 + x = m^2$, $m^2 + 2n = k^2$ pour certains entiers impairs $k > m > 1$. À l'inverse, toute paire d'entiers $k$, $m$ telle que $k^2 - m^2 = 2n$ produit un appariement parfait de $S_n$ et les appariements parfaits associés à d'autres paires $(m, k)$ sont differents. Nous allons trouver $n$ tel que l'équation $2n = k^2 - m^2$ a au moins 2017 solutions entières positives $k, m$.

Prenons 2017 triplets Pythagoriciens distincts $(r_i, s_i, t_i)$, $1 \leq i \leq 2017$ (tels que $r_i^2 + s_i^2 = t_i^2$), et posons $a = \Pi_{i=1}^{2017} s_i$. On peut supposer qu'au moins un $s_i$ est pair, de façon à ce que $a$ soit pair. Posons $n = a^2/2$. Maintenant, $m_i = ar_i/s_i$ et $k_i = at_i/s_i$ sont entiers et $m_i^2 + a^2 = \frac{a^2(r_i^2+s_i^2)}{s_i^2} = k_i^2$ pour n'importe quel $1 \leq i \leq 2017$. Ceci produit 2017 solutions à l'équation $k^2 - m^2 = 2n$ et donc 2017 appariements parfaits de $S_n$.

*Un remerciement spécial à* ***Freddie Zhao du Indus Center for Academic Excellence*** *pour avoir donné la solution précédente. Celle-ci a été éditée pour la clarté et la précision.*

# Principaux commanditaires

Expertise. Insight. Solutions.

SOCIETY OF ACTUARIES

en collaboration avec crowdmark

**Commanditaires :**

Aqueduct
Banff International Research Station
Canadian Aviation Electronics
Centre de recherche mathématiques
The Fields Institute
Maplesoft
The McLean Foundation
Nelson
The Pacific Institute for Mathematical Sciences
Popular Book Company
RBC Foundation
S.M. Blair Foundation
The Samuel Beatty Fund

**Partenaires universitaires :**

University of British Columbia
University of Calgary
Dalhousie University
University of Manitoba
Memorial University
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
Dept. of Mathematics & Statistics, (University of Saskatchewan)
University of Toronto
York University

**Partenaires gouvernementaux :**

Alberta Education
Île du Prince-Édouard
Manitoba
Nouveau-Brunswick
Nouvelle-Écosse
Nunavut
Ontario
Québec
Territoires du Nord-Ouest