Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2017

Présenté par la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

CMS SMC

Expertise. Insight. Solutions.

SOCIETY OF ACTUARIES

Identité des participants

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et fournir tous les détails requis, à défaut de quoi votre examen pourrait être rejeté. Cet examen n'est pas considéré comme étant valide à moins d'être accompagné par le formulaire signé de votre superviseur d'examen/enseignant.

1. Prénom : (obligatoire)

2. Nom de famille : (obligatoire)

3. Êtes-vous actuellement inscrit(e) à temps plein à une école primaire, secondaire ou un Cégep ou suivez-vous un enseignement à la maison depuis le 15 septembre 2017? (exigence pour être admissible) ☐**Oui** ☐ Non

4. Êtes-vous citoyen(ne) canadien(ne) ou résident(e) permanent(e) du Canada? (quelle que soit votre adresse actuelle) (exigence pour être admissible) ☐**Oui** ☐ Non

5. Date de naissance : (obligatoire)

A A A A M M J J

6. Année de scolarité : (obligatoire)

☐ 8 ☐ 10 ☐ 12
☐ 9 ☐ 11 ☐ Cégep

autre: ______________

7. Sexe : (facultif)

☐ Féminine
☐ Masculin

8. Adresse électronique : (facultif)

UNIVERSITY OF TORONTO

*Nous remercions tout particulièrement l'**University of Toronto**, partenaire qui note les examens pour le DOCM 2017!*

NE PAS PHOTOCOPIER D'EXAMENS NON REMPLIS! Chaque page de chacun des exemplaires est pré-codée de manière unique pour faciliter l'attribution assistée par ordinateur des notes.

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Question A1 (4 points)

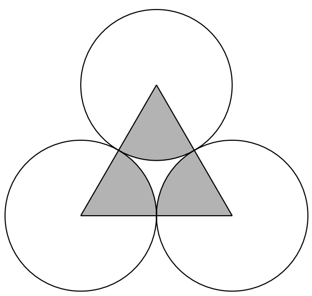
La moyenne des nombres $2, 5, x, 14$ et 15 est x. Déterminez la valeur de x.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A2 (4 points)

À chaque sommet d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, on trace un cercle ayant un rayon de longueur 2 cm comme illustré dans la figure. L'aire totale des régions ombrées dans les trois cercles est égale à $a \times \pi$ cm^2. Déterminez la valeur de a.



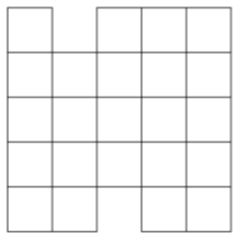
Votre solution :

Votre réponse finale :

Page à identification unique
– **aucune photocopie!**

Question A3 (4 points)

Deux carrés 1×1 sont enlevés d'une grille 5×5 comme illustré dans la figure.



Déterminez le nombre total des carrés de différentes grandeurs qui se trouvent dans la grille.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question A4 (4 points)

Trois entiers positifs a, b, c sont tels que

$$4^a \times 5^b \times 6^c = 8^8 \times 9^9 \times 10^{10}.$$

Déterminez la valeur de $a + b + c$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B1 (6 points)

Page à identification unique
– aucune photocopie!

Antoine et Béatrice pratiquent leurs lancers libres au basket-ball. Un jour, ils ont ensemble fait un total de 105 lancers libres, chacun effectuant au moins un lancer libre. Si Antoine a réussi exactement 1/3 de ses lancers libres et que Béatrice a réussi exactement 3/5 de ses lancers libres, quel est le plus grand nombre possible de lancers libres réussis par les deux?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B2 (6 points)

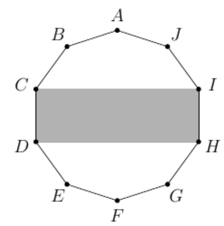
Il y a vingt personnes dans une salle: a hommes et b femmes. Chaque paire d'hommes se serre la main et chaque paire de femmes se serre la main, mais il n'y a aucune poignée de main entre un homme et une femme. Un total de 106 poignées de main sont échangées. Déterminez la valeur de $a \times b$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question B3 (6 points)

Un décagone régulier (polygone à 10 côtés) $ABCDEFGHIJ$ a une aire de 2017 unités carrées. Déterminez l'aire (en unités carrées) du rectangle $CDHI$.



Votre solution :

Votre réponse finale :

Page à identification unique
– **aucune photocopie!**

Question B4 (6 points)

Les nombres a, b et c forment une suite arithmétique si $b - a = c - b$. Soientt a, b et c des entiers positifs qui forment une suite arithmétique avec $a < b < c$. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Deux nombres réels distincts r et s sont tels que $f(r) = s$ et $f(s) = r$. Si $rs = 2017$, déterminez la plus petite valeur possible de a.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Question C1 (10 points)

Pour un entier positif n, on définit la fonction $P(n)$ comme étant la somme des chiffres de n **plus** le nombre de chiffres de n. Par exemple, $P(45) = 4 + 5 + 2 = 11$. (À noter que le premier chiffre du côté gauche de n ne peut pas être 0).

(a) Calculez $P(2017)$.

(b) Déterminez tous les nombres n tels que $P(n) = 4$.

(c) Déterminez, en expliquant votre raisonnement, s'il existe un nombre n pour lequel $P(n) - P(n + 1) > 50$.

Votre solution :

Question C2 (10 points)

On dit qu'une fonction $f(x)$ est périodique avec une période $T > 0$ si $f(x+T) = f(x)$ pour toute valeur de x. Le plus petit nombre T ayant cette propriété est appelé la plus petite période. Par exemple, les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont périodiques avec plus petite période 2π.

(a) Soit $g(x)$ une fonction périodique dont la plus petite période est $T = \pi$. Déterminez la plus petite période de $g(x/3)$.

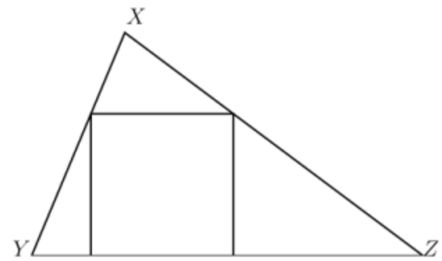
(b) Déterminez la plus petite période de $H(x) = \sin(8x) + \cos(4x)$

(c) Déterminez la plus petite période des fonctions $G(x) = \sin(\cos(x))$ et $F(x) = \cos(\sin(x))$.

Votre solution :

Question C3 (10 points)

Soit XYZ un triangle aigu (tous les angles intérieurs sont aigus). Soit s la longueur du côté du carré qui a deux sommets adjacents sur le segment YZ, un sommet sur le côté XY et un sommet sur le côté XZ. Soit h la distance qui sépare X du côté YZ et b la distance entre Y et Z.



(a) Si les coordonnées des sommets sont données: $X = (2; 4)$, $Y = (0; 0)$ et $Z = (4; 0)$, déterminez les valeurs de b, h et s.

(b) Si $h = 3$ et $s = 2$, déterminez la valeur de b.

(c) Si l'aire du carré est 2017, déterminez la valeur minimale de l'aire du triangle XYZ.

Votre solution :

Question C4 (10 points)

Soit n un entier positif et $S_n = \{1; 2; \ldots; 2n-1; 2n\}$. Un *appariement parfait* de S_n est une partition des $2n$ nombres en n paires, de façon à ce que la somme des deux nombres de chaque paire soit toujours un carré parfait. Par exemple, si $n = 4$, un appariement parfait de S_4 est $(1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5)$. Il n'est pas nécessaire que chaque paire ait pour somme le même carré parfait.

(a) Montrez que S_8 possède au moins un appariement parfait.

(b) Montrez que S_5 ne possède aucun appariement parfait.

(c) Montrez ou réfutez: il existe un entier positif n pour lequel S_n a au moins 2017 appariement parfaits différents. (Si deux appariements sont composés des mêmes paires écrites dans un ordre différent, on considère qu'il s'agit du même appariement)

Votre solution :

Principaux commanditaires

Expertise. Insight.
Solutions.

SOCIETY OF
ACTUARIES

en collaboration avec crowdmark

Commanditaires :

Aqueduct
Banff International Research Station
Canadian Aviation Electronics
Centre de recherche mathématiques
The Fields Institute
Maplesoft
The McLean Foundation
Nelson
The Pacific Institute for Mathematical Sciences
Popular Book Company
RBC Foundation
S.M. Blair Foundation
The Samuel Beatty Fund

Partenaires universitaires :

University of British Columbia
University of Calgary
Dalhousie University
University of Manitoba
Memorial University
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
Dept. of Mathematics & Statistics, (University of Saskatchewan)
University of Toronto
York University

Partenaires gouvernementaux :

Alberta Education
Île du Prince-Édouard
Manitoba
Nouveau-Brunswick
Nouvelle-Écosse
Nunavut
Ontario
Québec
Territoires du Nord-Ouest

Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2017

2 et 3 novembre 2017

CONSIGNES AUX ÉLÈVES

<u>**Consignes générales :**</u>

1) N'ouvre pas le livret d'examen jusqu'à ce que ton superviseur d'examen (enseignant superviseur) ne te l'indique.

2) **Avant le début de l'examen, le superviseur t'accordera quelques minutes pour remplir la section sur l'identité des participants à la première page de l'examen.** Tu n'as pas à te presser. Assure-toi de remplir tous les champs d'information requis et d'écrire lisiblement.

3) **La lisibilité est importante :** Assure-toi que le crayon que tu comptes utiliser est suffisamment foncé pour que tes solutions soient faciles à lire.

4) Une fois que tu auras terminé l'examen et que tu l'auras remis au superviseur/enseignant, tu pourras quitter la salle.

5) Il <u>ne faut pas</u> discuter des questions et des solutions de l'examen du DOCM publiquement ou les partager (y compris en ligne) pendant au moins 24 heures.

<u>**Format de l'examen :**</u>

Le DOCM compte trois parties à faire en 2 heures et 30 minutes :

PARTIE A: Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. <u>Tu n'as pas à montrer ton travail.</u> Une bonne réponse finale donne les points complets. Si toutefois ta réponse finale n'est pas la bonne et que tu as montré ton travail dans l'espace réservé à cet effet, tu pourrais obtenir des points partiels.

PARTIE B: Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. L'attribution des notes et des notes partielles se fera comme pour la partie A.

PARTIE C: Quatre problèmes de preuve détaillés valant 10 points chacun. <u>Il faut montrer tout son travail.</u> On pourrait accorder des notes partielles.

Les diagrammes fournis *ne sont pas* à l'échelle; ce ne sont que des aides.

Brouillons/feuilles supplémentaires : Tu *peux* utiliser du papier brouillon, mais tu dois jeter les brouillons une fois ton travail terminé et que tu remets ton livret d'examen. <u>Seul le travail qui figure dans les pages fournies dans le livret sera évalué et noté.</u> Il est interdit d'insérer des pages supplémentaires dans votre livret d'examen.

Solutions exactes : On s'attend à ce que tous les calculs et les réponses soient exprimés en des chiffres exacts tels que 4π , 2 + , $\sqrt{7}$, etc., plutôt que 12,566, 4,646, etc.

Prix : Les noms des lauréats seront publiés sur le site Web de la Société mathématique du Canada.