Défi ouvert Canadien de mathématiques 2016

Financière Sun Life

Solutions officielles

Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante: https://cms.math.ca/Concours/DOCM/2016/practice.html

L'examen compte trois sections :

A. Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

B. Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

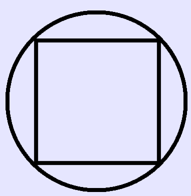
C. Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune. Il faut montrer tout son travail. On peut accorder des notes partielles.

Section A – 4 points pour chaque question

1. Patrick a dix examens à faire dans son année scolaire. La note maximale pour chaque examen est de 100 points. Après les 8 premiers examens, Patrick cumule une moyenne de 80 points. Si N est sa moyenne après ses 10 examens, quelle est la plus grande valeur possible pour N?

Solution : La moyenne maximale que peut obtenir Patrick surviendra si ce dernier a la note maximale (100) à ses deux derniers examens. Sa note totale pour les 10 examens sera alors de $8 * 80 + 100 + 100 = 840$ et sa moyenne sera $840/10 = 84$.

2. Un carré est inscrit dans un cercle comme dans la figure. Si l'aire du cercle est de 16π cm^2 et que l'aire du carré est de S cm^2, quelle est la valeur de S?



Solution: L'aire d'un cercle de rayon r est πr^2. Puisque l'aire du cercle est 16π, on a que $r^2 = 16$ et donc $r = 4$. Le cercle a donc un rayon de 4 et un diamètre de 8.

Soit t la longueur du côté du carré. Par le théorème de Pythagore, $t^2 + t^2 = 8^2$ donc $t^2 = 32$, qui est l'aire du carré.

3. Déterminez la paire de nombres réels x, y qui satisfont le système d'équations :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y} &= 1 \\ \tfrac{2}{x}+\tfrac{3}{y} &= 4 \end{aligned}$$

Solution 1 : Soit $a = \frac{1}{x}$ et $b = \frac{1}{y}$. On peut rééecrire nos équations comme :

$$\begin{aligned} a+b &= 1 \\ 2a+3b &= 4 \end{aligned}$$

En soustrayant deux fois la première équation de la deuxième, on obtient directement $b = 2$. On retrouve la valeur de $a = -1$ en remplaçant dans la première équation. On trouve alors $x = -1$ et $y = \frac{1}{2}$.

Solution 2 : En prenant trois fois la première équation et en soustrayant la deuxième, on trouve $\frac{1}{x} = -1$, donc $x = -1$. En substituant cette valeur dans la première équation, on obtient $-1 + \frac{1}{y} = 1$ ce qui nous donne $y = \frac{1}{2}$. Ainsi $(x, y) = (-1, \frac{1}{2})$.

4. Trois hommes et deux femmes écrivent leur nom sur des bouts de papier et placent ceux-ci côte à côte sur une table dans un ordre aléatoire. Quelle est la probabilité que les noms des deux femmes occupent les deux positions les plus à droite sur la table?

Solution 1 : En regardant les papiers de droite à gauche, on veut que les deux premiers noms soient des femmes. La probabilité que le premier nom soit celui d'une femme est $\frac{2}{5}$. Étant donné que le premier nom est celui d'une femme, la probabilité que le deuxième nom soit celui de la deuxième femme est $\frac{1}{4}$. Ainsi, la probabilité recherchée est $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Solution 2 : On veut que les trois premiers noms soient ceux des hommes et que les deux derniers soient ceux des femmes. Il y a $\binom{5}{2} = 10$ façons de placer les noms des deux femmes dans la liste de 5 noms. On recherche la probabilité d'une de ces configurations qui est donc $\frac{1}{10}$ puisque toutes les configurations sont équiprobables.

Section B – 6 points pour chaque question

1. Si l'équation cubique $x^3 - 10x^2 + Px - 30 = 0$ a trois racines entières positives, déterminez la valeur de P.

Solution 1 : Si les trois racines de l'équation sont x_1, x_2, x_3, alors $x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = P$ et $x_1x_2x_3 = 30$. Supposons que $x_1 = 1$ est une racine. Alors $x_2 + x_3 = 9$ et $x_2x_3 = 30$. Si deux entiers ont un produit de 30 alors leur somme est au moins de 11. Ceci exclut alors la possibilité que 1 soit une racine. La seule autre possibilité est que les racines soient $2, 3, 5$ et on obtient alors $P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 31$.

Solution 2 : Les racines de l'équation sont des entiers dont le produit est 30. Les ensembles possibles sont $(1, 1, 30), (1, 2, 15), (1, 3, 10), (1, 5, 6), (2, 3, 5)$. Parmi ceux-ci, seul $(2, 3, 5)$ a une somme de 10 et doit être notre réponse. Pour déterminer la valeur de P, on subsitue $x = 2$ dans l'équation et on obtient $8 - 40 + 2P - 30 = 0$, donc $P = 31$.

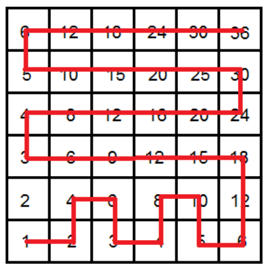
2. Les carrés d'une grille 6×6 sont tous associés à une *valeur numérique*. Comme il est possible de le remarquer dans la figure plus bas, la valeur associée au carré de la ligne i et de la colonne j est $i \times j$.

6	12	18	24	30	36
5	10	15	20	25	30
4	8	12	16	20	24
3	6	9	12	15	18
2	4	6	8	10	12
1	2	3	4	5	6

Un *chemin* dans la grille est une suite de carrés dont les carrés consécutifs partagent un côté et pour laquelle aucun carré ne se répète. Le *pointage* associé à un chemin est la somme des valeurs des carrés faisant partie du chemin.
Déterminez le pointage maximal d'un chemin qui débute dans le coin inférieur gauche et qui se termine dans le coin supérieur droit.

Solution: Débutons en coloriant la grille en noir et blanc à la manière d'un échiquier de façons à ce que la case inférieure gauche soit noire. Un chemin dans la grille alternera entre les cases blanches et les cases noires en débutant et en terminant toujours sur une case noire. Il est donc impossible que le chemin visite les 18 cases blanches. On évite alors la case blanche avec le pointage minimal comme illustré dans la figure plus bas.

La somme des pointages de toutes les cases de la grille est de $(1+2+3+4+5+6)(1+2+3+4+5+6) = 441$. Notre chemin a donc un pointage de 439.



3. Un hexagone $ABCDEF$ est tel que $AB = 18$cm, $BC = 8$cm, $CD = 10$cm, $DE = 15$cm, $EF = 20$cm, $FA = 1$cm, $\angle FAB = 90°$, $\angle CDE = 90°$ et BC est parallèle à EF. Déterminez l'aire de cet hexagone en cm^2.

Solution : Tout d'abord, on trouve la mesure de BF et CE. Par le théorème de Pythagore, $BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{18^2 + 1^2} = \sqrt{325}$cm et $CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{325}$cm. De plus, on remarque que $BF = CE$.

Comme BC est parallèle à EF et que $BF = CE$, $BCEF$ est un trapèze isocèle.

L'hexagone est donc composé des triangles rectangles FAB et CDE et du trapèze isocèle $BCEF$. L'aire de FAB est $FA \times AB/2 = 1 \times 18/2 = 9$cm^2 et l'aire de CDE est $CD \times DE/2 = 10 \times 15/2 = 75$cm^2. Il nous reste à déterminer l'aire de $BCEF$.

Souvenons-nous que BC est parallèle à EF, $BC < EF$ et $BF = CE$. Traçons les deux perpendiculaires au côté EF qui passent par les points B et C. Les points de rencontre de ces deux perpendiculaires avec EF sont nommés respectivement X et Y. Alors $XY = BC = 8$cm, $FX + XY + YE = EF = 20$cm et $FX = YE$ puisque $BCEF$ est un trapèze isocèle. Comme $FX + YE = 20 - XY = 20 - 8 = 12$cm, $FX = YE = 6$cm. Par le théorème de Pythagore, $BX = \sqrt{BF^2 - FX^2} = \sqrt{325 - 36} = \sqrt{289} = 17$cm. La hauteur du trapèze $BCEF$ est donc de 17cm. Ainsi, l'aire du trapèze est de $(BC + EF) \times BX/2 = (8 + 20) \times 17/2 = 14 \times 17 = 238$cm^2.

En additionnant les aires des trois pièces de l'hexagone, on obtient $9 + 75 + 238 = 322$cm^2.

4. Soit n un entier strictement positif. Étant donné un nombre x, $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 2,4 \rfloor = 2, \lfloor 3 \rfloor = 3$ et $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Prenons une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ où $a_1 = n$ et

$$a_m = \left\lfloor \frac{a_{m-1}}{3} \right\rfloor,$$

pour toutes les entiers $m \geq 2$. La suite s'arrête lorsque sa valeur devient 0. Le nombre n est dit *chanceux* si 0 est le seul nombre de la suite qui est divisible par 3. Par exemple, 7 est chanceux puisque $a_1 = 7, a_2 = 2, a_3 = 0$ et que $7, 2$ ne sont pas divisibles par 3. Par contre, 10 n'est pas chanceux car $a_1 = 10, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 0$ et que $a_2 = 3$ est divisible par 3. Combien y a-t'il de nombre chanceux inférieurs ou égaux à 1000?

Solution : Remarquons que $\lfloor m/3 \rfloor$ consiste simplement à effacer le chiffre le plus à droite de la représentation en base 3 du nombre m. Ainsi, en débutant avec le nombre n, la séquence a pour effet de faire disparaître un à un les chiffres de la représentation en base 3 de n en commençant par la droite jusqu'à ce qu'aucun chiffre ne reste. Un nombre écrit en base 3 est divisible par 3 si et seulement si son chiffre le plus à droite est 0. On en déduit donc que n est chanceux si et seulement si aucun chiffre de la représentation en base 3 de n est zéro.

On convertit l'entier n en base 3. Commençons par trouver la représentation en base 3 de 1000. Pour ce faire, remarquons que $1000/3 = 333+1/3$, $333/3 = 111+0/3$, $111/3 = 37+0/3$, $37/3 = 12 + 1/3$, $12/3 = 4 + 0/3$, $4/3 = 1 + 1/3$ et $1/3 = 0 + 1/3$. Ainsi, 1000 peut s'écrire 1101001_3. On doit déterminer combien de nombres en base 3 ne contiennent aucun zéro et sont inférieurs à 1101001_3.

On remarque que le dernier nombre chanceux inférieur à 1101001_3 est 222222_3. Les nombres chanceux inférieurs à 1000 sont donc ceux dont la représentation en base 3 possède au plus 6 chiffres qui sont soit des 1 ou des 2. Il y a 2^k nombres de k chiffres qui satisfont à la condition. Ainsi, il y a $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 126$ nombres chanceux inférieurs ou égaux à 1000.

Section C – 10 points pour chaque question

1. Une suite de trois nombres a, b, c forme une suite arithmétique si la différence entre les termes successifs de la suite est constante. Dans ce cas, il faut que $b - a = c - b$.

   (a) Si la suite $2, b, 8$ est arithmétique, déterminez la valeur de b.

   (b) Étant donné une suite a, b, c, soit d_1 le nombre positif qu'il faut soit soustraire ou additionner à b afin que la suite devienne arithmétique (sans changer la valeur de a et c). Soit d_2 le nombre positif qu'il faut soit soustraire ou additionner à c afin que la suite devienne arithmétique (sans changer la valeur de a et b).

   Par exemple, si la suite de trois termes est $3, 10, 13$, alors on doit diminuer 10 à 8 pour obtenir la suite aritmétique $3, 8, 13$. On a soustrait 2 à b , donc $d_1 = 2$. Autrement, il aurait été possible de changer le 13 par 17 pour obtenir la suite arithmétique $3, 10, 17$. On a additionné 4 à 13, donc $d_2 = 4$.

   Supposons que notre suite de départ est $1, 13, 17$. Déterminez les valeurs de d_1 et d_2.

   (c) Définissons d_1, d_2 comme dans la partie (b). Pour toutes les suites de trois nombres, montrez que $2d_1 = d_2$.

(a) **Solution 1 :** Il faut que $b - a = c - b$, donc $b - 2 = 8 - b$ et alors $b = 5$.

Solution 2 : b doit être exactement au milieu de a et c, donc $b = (8 + 2)/2 = 5$.

Solution 3 : $2, 5, 8$ est une suite arithmétique donc $b = 5$.

(b) **Solution 1:** $b-a = c-b$, et $a = 1, c = 17$. En substituant dans l'équation et en résolvant on trouve $b = 9$. Puisque 13, est le terme du milieu, la différence est $d_1 = 13 - 9 = 4$.

De la même façon, en remplaçant $a = 1, b = 13$ dans l'équation on trouve $c = 25$. La différence est dans ce cas $d_2 = 25 - 17 = 8$.

Solution 2: Pour former une séquence arithmétique, le deuxième nombre doit être 9 et donc $d_1 = 13 - 9 = 4$.

De la même façon, le troisième nombre doit être 25 afin de former une suite arithmétique et donc $d_2 = 25 - 17 = 8$.

(c) **Solution 1:** On peut réécrire l'équation pour une suite arithmétique de la façon suivante: $2b = a + c$. Si nous avons une suite (pas nécessairement arithmétique) a, b, c, alors on peut écrire $2(b \pm d_1) = a + c$, et on peut aussi écrire $2b = a + (c \pm d_2)$. En soustrayant une des deux équations de l'autre, on obtient $2d_1 = \pm d_2$. Comme d_1 et d_2 sont tous deux des nombre positifs, on a trouvé que $2d_1 = d_2$.

Solution 2: On commence par déterminer la valeur de d_1. Soit b' le nombre par lequel on remplace b pour former une suite arithmétique. Alors $b'-a = c-b'$. Ainsi, $b' = (a+c)/2$. On a remplacé b par $(a+c)/2-b$. On a donc que $d_1 = |(a+c)/2-b| = |(a+c-2b)/2|$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue habituelle. (Il n'est pas nécessaire d'utiliser la valeur absolue ici. N'importe quelle indication du fait qu'on prend la valeur positive associée à la quantité calculée suffit.)

On poursuit avec le calcul de la valeur de d_2. Soit c' le nombre par lequel on remplace c pour former une suite arithmétique. Alors $c' - b = b - a$. Ainsi, $c' = 2b - a$. On a remplacé c par $c' - c = 2b - a - c$. On a donc que $d_2 = |2b - a - c| = 2|(2b - a - c)/2| = 2|(a + c - 2b)/2| = 2d_1$, comme voulu.

Solution 3: Plaçons les points $A(1, a), B(2, b), C(3, c)$ sur le plan cartésien. Soit b' le nombre pour lequel a, b', c est une suite arithmétique et c' le nombre pour lequel a, b, c' est une suite arithmétique. Soit $B' = (2, b')$ et $C' = (3, c')$. Alors A, B', C sont situés sur une ligne droite et il en est de même pour A, B et C'. De plus, B' est le point milieu de AC et B est le point milieu de AC'.

La valeur d_1 est la distance qui sépare B et B' et la valeur d_2 est la distance qui sépare C et C'. Considérons le triangle ACC'. Puisque BB', CC' sont des segments verticaux, ils sont parallèles. Ainsi, $\Delta ABB'$ et $\Delta AC'C$ sont semblables avec un ratio $1 : 2$. Conséquemment, CC' mesure le double de BB', donc $d_2 = 2d_1$.

2. Arnaud et Béatrice jouent tour à tour à un jeu qui consiste à placer des pièces de monnaie sur une rangée de n chaises. À son tour, un joueur doit poser une pièce de monnaie sur un siège à condition qu'il n'y ait pas de pièce sur ce siège ou sur un siège adjacent à ce dernier. Arnaud joue le premier. Le premier joueur qui ne peux plus placer de pièce perd la partie.

   (a) Montrez qu'Arnaud a une stratégie gagnante lorsque $n = 5$.

   (b) Montrez qu'Arnaud a une stratégie gagnante lorsque $n = 6$.

   (c) Montrez que Béatrice a une stratégie gagnante lorsque $n = 8$.

(a) **Solution :** À son premier tour, Arnaud place une pièce sur le siège 3. Béatrice ne peut maintenant jouer que sur les sièges 1 ou 5. Peu importe le choix de Béatrice, Arnaud peut jouer sur l'autre siège à son prochain tour. Après cela, Béatrice ne peut plus jouer et Arnaud remporte la partie.

(b) **Solution :** À son premier tour, Arnaud place une pièce sur le siège 3. Béatrice peut ensuite jouer sur les sièges 1, 5, ou 6. Si Béatrice joue sur le siège 1, Arnaud peut ensuite jouer sur le siège 5 pour terminer la partie. Si Béatrice joue sur le siège 5 ou 6, Arnaud peut placer une pièce sur le siège 1 et la partie se termine.

(c) **Solution :** Si Arnaud joue sur les sièges 1 ou 8, il reste ensuite 6 sièges consécutifs pour la suite de la partie. La partie est donc équivalente à ce qui a été fait en (b) à l'exception que Béatrice débute maintenant la partie. De la même façon, si Arnaud place une pièce sur le siège 2 ou 7, il reste maintenant 5 sièges consécutifs accessibles. Cette situation est équivalente à celle étudiée en (a), à l'exception que Béatrice débute la partie.

Si Arnaud place sa première pièce sur le siège 3, Béatrice joue ensuite sur le siège 6 (et vice-versa). De cette façon, les deux seuls sièges accessibles sont le 1 et le 8. Peu importe le choix d'Arnaud, Béatrice peut ensuite jouer et terminer la partie.

Si Arnaud place sa première pièce sur le siège 4, Béatrice joue ensuite sur le siège 6. Les seuls sièges accessibles sont ensuite le 1, le 2, et le 8. Deux autres pièces seront placées avant de terminer la partie et Béatrice sera donc gagnante. Si Arnaud place sa première pièce sur le siège 5, Béatrice joue sur le siège 3 et s'assure encore de gagner.

3. Soit $A = (0, a), O = (0, 0), C = (c, 0), B = (c, b)$, où a, b, c sont des entiers strictement positifs. Soit $P = (p, 0)$ le point sur le segment OC qui minimise la distance $AP+PB$ parmi toutes les valeurs possibles de P. Soit $X = AP + PB$.

   (a) Montrez que cette distance minimale $X = \sqrt{c^2 + (a + b)^2}$.

   (b) Si $c = 12$, trouvez toutes les paires (a, b) pour lesquelles a, b, p, et X sont des entiers positifs.

   (c) Si a, b, p, X sont tous des entiers positifs, montrez qu'il existe un entier $n \geq 3$ qui divise a et b.

(a) **Solution :** On fait la réflexion du point B par rapport à l'axe des x et on note ce point B'. Donc $PB = PB'$. Par l'inégalité triangulaire, $PA + PB' \geq AB'$. La droite AB' croisera le segment OC. En prenant P sur AB', on s'assure alors que $PA+PB'$ est minimal.

Par le théorème de Pythagore, la longueur de AB' est $X = \sqrt{c^2 + (a + b)^2}$.

(b) **Solution :** On observe que pour le point P trouvé en (a), POA et PCB sont des triangles semblables. Soit $a + b = n$. On a $X^2 = 144 + n^2$, ou $(X - n)(X + n) = 144$. Puisque X et n sont des entiers, nous savons que $X - n$ et $X + n$ sont de même parité. Comme leur produit est un multiple de 2, ils doivent tous deux être des multiples de 2. On peut factoriser 144 de plusieurs façons en s'assurant que les deux facteurs soient pairs: $(72, 2), (36, 4), (18, 8), (12, 12), (24, 6)$. On obtient alors des paires pour (X, n) : $(37, 35), (20, 16), (13, 5), (12, 0), (15, 9)$. On peut éliminer $(12, 0)$, puisque n doit être strictement positif.

Par un argument de triangles semblables, $p/12 = a/n$, donc $p = 12a/n$. Si $n = 5, 35$, il n'y a aucune valeur de a pour laquelle b sera aussi positif.

Lorsque $n = 9$, on a $(a, b) = (3, 6), (6, 3)$ et lorsque $n = 16$, on a $(a, b) = (4, 12), (8, 8), (12, 4)$.

(c) **Solution :** Let $q = c - b$. By similar triangles, $p = ac/(a + b)$ and $q = bc/(a + b)$.

Soit $q = c - b$. Par un argument de triangles semblables, $p = ac/(a+b)$ et $q = bc/(a+b)$.

Soit k le plus petit entier tel que kc est divisible par $a + b$. Alors puisque p et q sont entiers, k doit diviser a et b.

Si $k = 1$, alors $c = m(a + b)$ pour un certain entier m et $X = \sqrt{1 + m^2}(a + b)$. Cette quantité est entière seulement si m = 0, ce qui est impossible puisque dans ce cas c = 0. Ainsi $k > 1$.

Si $k = 2$, alors $2c = m(a + b)$ pour un certain entier m et $X = (\frac{a+b}{2})\sqrt{4 + m^2}$. Encore une fois, cette quantité est entière seulement si $m = 0$, donc $k > 2$, comme demandé.

4. Deux droites se croisent en un point Q et forment un angle de $\theta°$, où $0 < \theta < 180$. Une grenouille se trouve sur la droite bissectrice de l'angle θ mais pas au point Q. La grenouille fait ensuite des sauts par-dessus une des deux droites. Chaque saut est effectué de façon à ce que le point d'arrivée soit la réflexion du point de départ du saut par rapport à une des deux droites.
La grenouille s'arrête lorsqu'elle atterrit directement sur une des deux droites.

   (a) Supposons que $\theta = 90°$. Montrez que la grenouille ne s'arrêtera jamais.

   (b) Supposons que $\theta = 72°$. Montrez que la grenouille s'arrêtera éventuellement.

   (c) Déterminez le nombre de valeurs entières de θ, avec $0 < \theta° < 180°$, pour lesquelles la grenouille ne s'arrêtera jamais.

(a) **Solution :** Orientons les deux droites de façon à ce que ℓ_1 soit l'axe des x et ℓ_2 soit l'axe des y. Supposons que la grenouille saute par-dessus ℓ_1 pour commencer. Si la grenouille débute au point (r, r) où $r > 0$, alors les prochaines positions de la grenouille seront $(r, -r), (-r, -r), (-r, r), (r, r)$ pour continuer vers $(r, -r)$. La grenouille se promènera indéfiniment sur ces quatre points et donc n'arrêtera jamais. On considère que la grenouille ne saute jamais deux fois de suite par-dessus la même droite puisque dans ce cas elle reviendrait nécessairement sur un point déjà visité.

(b) **Solution :** Soit ℓ_1, ℓ_2 les deux droites et ℓ la bissectrice de l'angle de 72°. Au départ, la grenouille est à un point F sur ℓ qui n'est pas le point d'intersection des droites (O). Par symétrie, on suppose que la grenouille saute par-dessus la droite ℓ_1. Remarquons que les droites ℓ et ℓ_1 se croisent avec un angle de 36°. Soit F' la réflexion du point F par rapport à ℓ_1. Alors OF' et ℓ_1 se croisent avec un angle de 36°. Ainsi, l'angle formé par OF' et ℓ_2 est de 108°. On sait que l'angle obtus formé par ℓ_1 et ℓ_2 vaut $180 - 72 = 108°$. À son prochain saut, la grenouille atterrira directement sur ℓ_1 et s'arrêtera.

(c) **Solution :** On va montrer que la grenouille va s'arrêter si et seulement si θ est un multiple de 8. De cette façon, on trouvera qu'il y a $\lfloor 179/8 \rfloor = 22$ multiples de 8 entre 1 et 179 (inclusivement) et donc qu'il y a $179 - 22 = 157$ valeurs entières de θ pour lesquelles la grenouille ne s'arrête jamais.

Soit O l'origine du plan cartésien, ℓ_1 la première droite qui coïncide avec l'axe des x et ℓ_2 placé de façon à ce qu'elle forme un angle θ avec le côté positif de l'axe des x.

La première observation clé est de remarquer que la grenouille est toujours à la même distance de O. La raison est que les deux droites se croisent en O et la réflexion autour d'une droite préserve la distance à un point de la droite donné (dans ce cas O).

Ainsi, il est possible de mesurer l'angle, dans le sens anti-horaire, formé par les segments suivants: celui qui part au point O et se dirige du côté positif de l'axe des x (i.e. ℓ_1) et OG, où G est la position de la grenouille. On utilisera la mesure de cet angle pour décrire la position de la grenouille. Puisqu'un tour complet mesure $360°$, les angles congrus modulo $360°$, sont égaux.[1]

Il y a quatre mesures pour lesquelles la grenouille est située sur une droite: $0, \theta, 180$ et $180+\theta$. Si la grenouille est forcée de tomber sur une de ces mesures d'angle, elle s'arrête.

Étant donné une position α, soit $f(\alpha)$ la position de la grenouille après un saut par-dessus ℓ_1 et $g(\alpha)$ la position de la grenouille après un saut sur ℓ_2.

On trouve tout d'abord une formule explicite pour $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$. $f(\alpha)$ est un réflexion autour de l'axe des x. Ainsi, $f(\alpha) = -\alpha$, où nous considérons la valeur des angles modulo 360. $g(\alpha)$ est une réflexion autour de la droite ℓ_2, située à un angle de θ. Pour déterminer $g(\alpha)$, on fait une rotation de θ degrés dans le sens horaire, on fait la réflexion, puis on fait une rotation anti-horaire de θ degrés. La rotation dans le sens horaire de θ degrés fait tourner l'angle α vers $\alpha - \theta$. La réflexion de cet angle autour de l'axe des x nous mène à $\theta - \alpha$. En faisant la rotation horaire de $\theta°$, notre angle est maintenant de $2\theta - \alpha$. Ainsi, $g(\alpha) = 2\theta - \alpha$.

On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ la suite des positions de la grenouille après chaque saut, où α_1 est la position initiale de la grenouille, soit $\theta/2$. Sans perte de généralité, supposons que la grenouille saute par-dessus ℓ_1 pour commencer. Alors $\alpha_2 = f(\alpha_1) = -\alpha_1 = -\theta/2$. De plus, $\alpha_3 = g(\alpha_2) = g(f(\alpha_1))$ et $\alpha_4 = f(\alpha_3) = f(g(\alpha_2))$. De façon générale, $\alpha_{n+2} = g(f(\alpha_n))$ pour les n impairs et $\alpha_{n+2} = f(g(\alpha_n))$ pour les n pairs.

Remarquons que $f(g(\alpha)) = f(2\theta - \alpha) = \alpha - 2\theta$ et $g(f(\alpha)) = g(-\alpha) = 2\theta + \alpha$.

Ainsi, $\alpha_1 = \theta/2, \alpha_3 = 2\theta + \theta/2.\alpha_5 = 4\theta + \theta/2$. En général, $\alpha_{2k+1} = 2k\theta + \theta/2$ pour tous les entiers positifs k. Pour les nombres pairs, $\alpha_2 = -\theta_2.\alpha_4 = -2\theta - \theta/2, \alpha_6 = -4\theta - \theta/2$. En général, $\alpha_{2k+2} = -2k\theta - \theta/2$ pour tous les entiers positifs k.

La grenouille arrêtera donc s'il existe un entier positif k pour lequel soit $2k\theta + \theta/2$ ou $-2k\theta - \theta/2$ vaut n'importe laquelle des valeurs $0, \theta, 180, 180 + \theta$, modulo 360. Ceci est équivalent au fait que $2k\theta + \theta/2$ ou $-2k\theta - \theta/2$ soit égal à 0 ou θ modulo 180.

La valeur $2k\theta + \theta/2 \equiv 0 \pmod{180}$ si et seulement si $(4k+1)\theta \equiv 0 \pmod{360}$. Puisque

[1] Il s'agit bien de coordonnées polaires mais on tente d'éviter de les utiliser explicitement ici.

$4k+1$ est impair et que 360 est divisible par 8, θ doit être divisible par 8 afin qu'il y ait une solution. À l'inverse, si θ est divisible par 8, alors en posant $k = 11$ on obtient une valeur de $45k$ sur le côté gauche, ce qui est en effet divisible par 360.

La valeur $2k\theta + \theta/2 \equiv \theta \pmod{180}$ si et seulement si $(4k-1)\theta \equiv 0 \pmod{360}$. Puisque $4k-1$ est impair et que 360 est divisible 8, θ doit être divisible par 8 afin qu'il y ait une solution. À l'inverse, si θ est divisible par 8, alors en posant $k = 34$ on obtient une valeur de $135k = 3 \cdot 45k$ sur le côté gauche, et $45k$ est divisible par $360°$.

La valeur $-2k\theta - \theta/2 \equiv 0 \pmod{180}$ si et seulement si $(4k+1)\theta \equiv 0 \pmod{360}$. On est alors dans la même situation que pour le premier cas.

La valeur $-2k\theta - \theta/2 \equiv \theta \pmod{180}$ si et seulement si $(4k+3)\theta \equiv 0 \pmod{360}$. Puisque $4k+3$ est impair et que 360 est divisible par 8, θ doit être divisible par 8 afin qu'il y ait une solution. À l'inverse, si θ est divisible par 8, alors en posant $k = 33$ on obtient une valeur de $(4k+3)\theta = 135\theta = 3 \cdot 45\theta$ sur le côté gauche, valeur qui est divisible par 360.

Ainsi, dans tous les cas, il existe une valeur positive de k de façon à ce que $\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}$ soit sur la droite ℓ_1, ℓ_2, ce qui se produit si et seulement si θ est divisible par 8. Ceci complète la démonstration.