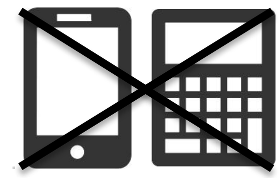
Le Défi ouvert canadien de mathématiques
3-4 novembre 2016

INSTRUCTION - ÉLÈVES

Instructions générales



Les calculatrices et les téléphones cellulaires sont INTERDITS.

1) N'ouvrez pas le cahier d'examen avant de recevoir l'autorisation de l'enseignant surveillant.
2) Le superviseur vous accordera **cinq minutes avant le début de l'examen** pour remplir la section d'identité de la page de couverture de l'examen. Inutile de vous précipiter. Assurez-vous de remplir tous les champs d'information et d'écrire lisiblement.
3) Lorsque vous aurez terminé l'examen et l'aurez remis à l'enseignant surveillant, vous pourrez quitter la salle.
4) Vous ne devez pas discuter publiquement (ni sur le Web) des questions de l'examen du DOCM 2016 ni de vos solutions pendant au moins 24 heures.

Format de l'examen

Vous disposez de 2 heures et 30 minutes pour faire le DOCM. L'examen compte trois sections:

PARTIE A: Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

PARTIE B: Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

PARTIE C: Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune. Il faut montrer tout son travail. On peut accorder des notes partielles.

Les diagrammes ne sont pas à l'échelle; ils sont fournis à titre informatif seulement.

Démarches et réponses

Toutes vos démarches et vos réponses doivent être présentées dans ce cahier, dans les cases réservées à cet effet; n'ajoutez pas de feuilles supplémentaires. Des points seront accordés pour les solutions complètes et pour la clarté. Dans les parties A et B, vous n'êtes pas obligé de présenter votre démarche pour obtenir tous vos points. Toutefois, si votre réponse ou votre solution n'est pas bonne, vous pourriez tout de même obtenir une partie des points pour les démarches notées dans le cahier. Dans la partie C, vous devez **démontrer** votre démarche et fournir la bonne réponse ou solution pour obtenir tous les points.

Veuillez exprimer tous vos calculs et fournir vos réponses en nombres exacts comme 4π, $2 + \sqrt{7}$, etc., plutôt que sous la forme 12,566, 4,646, etc. Les noms de tous les gagnants seront publiés sur le site web de la Société mathématique du Canada https://cms.math.ca/Concours/DOCM.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2016

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et **fournir toute l'information requise ci-dessous.** *Votre examen pourrait être rejeté si vous n'écrivez pas clairement en lettres moulées ou ne fournissez pas toute l'information requise. Cet examen ne sera pas jugé valide à moins qu'il soit accompagné du formulaire signé de votre superviseur d'examen.*

Prénom :

Nom de famille :

Êtes-vous actuellement un élève/étudiant à temps plein dans une école primaire ou secondaire ou un Cégep ou obtenez-vous votre enseignement à domicile par vos parents, et ce, depuis le 15 septembre de cette année?

☐ Oui ☐ Non

Êtes-vous citoyen canadien ou résident permanent du Canada (quelle que soit votre adresse actuelle)?

☐ Oui ☐ Non

Année scolaire :

☐ 8 ☐ 9 ☐ 10
☐ 11 ☐ 12 ☐ Cégep
Autre : ________

Grandeur de t-shirt :
(Facultatif. Pour le tirage au sort)

☐ P ☐ M
☐ G ☐ TG ☐ TTG

Date de naissance :

a a a a m m j j

Sexe : (Facultatif)

☐ Homme ☐ Femme

Courriel :

Signature : ______________________

N'écrivez pas dans ces cases :

A1	A2	A3	A4

B1	B2	B3	B4

C1	C2	C3	C4

TOTAL

______ Initiales de la personne qui attribue les points

______ Initiales de la personne qui saisit les données

______ Initiales de vérification

Partie A : Question 1 (4 points)

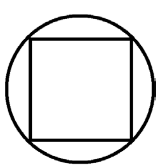
Patrick a dix examens à faire dans son année scolaire. La note maximale pour chaque examen est de 100 points. Après les 8 premiers examens, Patrick a une moyenne de 80 points. Si N est sa moyenne après ses 10 examens, quelle est la plus grande valeur possible pour N?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie A : Question 2 (4 points)

Un carré est inscrit dans un cercle comme dans la figure ci-dessous. Si l'aire du cercle est 16π cm^2 et que l'aire du carré est de A cm^2, quelle est la valeur de A ?



Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie A : Question 3 (4 points)

Déterminez la paire de nombres réels x, y qui satisfont le système d'équations :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} &= 1 \\ \tfrac{2}{x} + \tfrac{3}{y} &= 4 \end{aligned}$$

Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie A : Question 4 (4 points)

Trois hommes et deux femmes écrivent leur nom sur des bouts de papier et les placent ensuite côte à côte sur une table dans un ordre aléatoire. Quelle est la probabilité que les noms des deux femmes occupent les deux positions les plus à droite sur la table ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie B : Question 1 (6 points)

Si l'équation cubique $x^3 - 10x^2 + Px - 30 = 0$ a trois racines entières positives, déterminez la valeur de P.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie B : Question 2 (6 points)

Chaque carré d'une grille 6×6 est associé à une *valeur numérique*. Comme il est possible de le remarquer dans la figure ci-dessous, la valeur associée au carré de la ligne i et de la colonne j est $i \times j$.

6	12	18	24	30	36
5	10	15	20	25	30
4	8	12	16	20	24
3	6	9	12	15	18
2	4	6	8	10	12
1	2	3	4	5	6

Un *chemin* dans la grille est une suite de carrés dont les carrés consécutifs partagent un côté et pour laquelle aucun carré ne se répète. Le *pointage* associé à un chemin est la somme de la valeur des carrés faisant partie du chemin.

Déterminez le pointage maximal d'un chemin qui débute dans le coin inférieur gauche et qui se termine dans le coin supérieur droit.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie B : Question 3 (6 points)

Un hexagone $ABCDEF$ est tel que $AB = 18$cm, $BC = 8$cm, $CD = 10$cm, $DE = 15$cm, $EF = 20$cm, $FA = 1$cm, $\angle FAB = 90°$, $\angle CDE = 90°$ et BC est parallèle à EF. Déterminez l'aire de cet hexagone en cm^2.

Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie B : Question 4 (6 points)

Soit n un entier positif. Étant donné un nombre x, $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \lfloor 3 \rfloor = 3$ et $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Prenons une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ où $a_1 = n$ et

$$a_m = \left\lfloor \frac{a_{m-1}}{3} \right\rfloor,$$

pour toutes les entiers $m \geq 2$. La suite s'arrête lorsque sa valeur devient 0. Le nombre n est dit *chanceux* si 0 est le seul nombre de la suite qui est divisible par 3.

Par exemple, 7 est chanceux puisque $a_1 = 7, a_2 = 2, a_3 = 0$ et que $7, 2$ ne sont pas divisibles par 3. Par contre, 10 n'est pas chanceux car $a_1 = 10, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 0$ et que $a_2 = 3$ est divisible par 3. Combien y a-t-il de nombres chanceux inférieurs ou égaux à 1000 ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

Partie C : Question 1 (10 points)

Une suite de trois nombres a, b, c forme une suite arithmétique si la différence entre les termes successifs de la suite est constante. Dans ce cas, il faut que $b - a = c - b$.

(a) La suite $2, b, 8$ est une suite arthmétique. Déterminez la valeur de b.

(b) Étant donné une suite a, b, c, soit d_1 le nombre positif qu'il faut soit soustraire ou additionner à b afin que la suite devienne arithmétique. Soit d_2 le nombre positif qu'il faut soit soustraire ou additionner à c afin que la suite devienne arithmétique.

Par exemple, si la suite de trois termes est $3, 10, 13$, alors on doit diminuer 10 à 8 pour obtenir la suite aritmétique $3, 8, 13$. On a soustrait 2 à b , donc $d_1 = 2$. Autrement, il aurait été possible de changer le 13 par 17 pour obtenir la suite arithmétique $3, 10, 17$. On a additionné 4 à 13, donc $d_2 = 4$.

Supposons que notre suite de départ est $1, 13, 17$. Déterminez les valeurs de d_1 et d_2.

(c) Définissons d_1, d_2 comme dans la partie (b). Pour toutes les suites de trois nombres, montrez que $2d_1 = d_2$.

Votre solution :

Partie C : Question 2 (10 points)

Arnaud et Béatrice jouent tour à tour à un jeu qui consiste à placer des pièces de monnaie sur une rangée de n chaises. À son tour, un joueur doit poser une pièce de monnaie sur un siège à condition qu'il n'y ait pas de pièce sur ce siège ou sur un siège adjacent à ce dernier. Arnaud joue le premier. Le premier joueur qui ne peux plus placer de pièce perd la partie.

(a) Montrez qu'Arnaud a une stratégie gagnante lorsque $n = 5$.

(b) Montrez qu'Arnaud a une stratégie gagnante lorsque $n = 6$.

(c) Montrez que Béatrice a une stratégie gagnante lorsque $n = 8$.

Votre solution :

Partie C : Question 3 (10 points)

Soit $A = (0, a), O = (0, 0), C = (c, 0), B = (c, b)$, où a, b, c sont des entiers strictement positifs. Soit $P = (p, 0)$ le point sur le segment OC qui minimise la sommes des distances $AP + PB$ parmi toutes les valeurs possibles de P. Soit $X = AP + PB$.

(a) Montrez que cette distance minimale est $X = \sqrt{c^2 + (a + b)^2}$.

(b) Si $c = 12$, trouvez toutes les paires (a, b) pour lesquelles a, b, p, et X sont des entiers positifs.

(c) Si a, b, p, X sont tous des entiers positifs, montrez qu'il existe un entier $n \geq 3$ qui divise a et b.

Votre solution :

Partie C : Question 4 (10 points)

Deux droites se croisent en un point Q et forment un angle de $\theta°$, où $0 < \theta < 180°$. Une grenouille se trouve à un point autre que Q sur la droite bissectrice de cet angle. La grenouille fait ensuite des sauts par dessus l'une des droites. Chaque saut est effectué de façon à ce que son point d'arrivée soit la réflexion du point de départ du saut par rapport à la droite par dessus laquelle la grenouille a sauté.

La grenouille s'arrête lorsqu'elle atterrit directement sur l'une des deux droites.

(a) Supposons que $\theta = 90°$. Montrez que la grenouille ne s'arrêtera jamais.

(b) Supposons que $\theta = 72°$. Montrez que la grenouille s'arrêtera éventuellement.

(c) Déterminez le nombre de valeurs entières de θ, avec $0 < \theta° < 180°$, pour lesquelles la grenouille ne s'arrêtera jamais.

Votre solution :

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

Défi ouvert canadien de mathématiques 2016

Parrainé par

Sun Life Financial · RBC Foundation · UBC · Maplesoft · York University · University of Toronto · Nelson Education · University of Calgary · Dalhousie University · University of Prince Edward Island · Memorial University · UNB · University of Manitoba

Soutenus par

Centre de recherches mathématiques, Pacific Institute for the Mathematical Sciences,

Fields Institute, Popular Book Company, McLean Foundation, CAE Inc.,

Gouvernement du Manitoba, Gouvernement de la Nouvelle-Écosse,

Gouvernement de l'Ontario, Gouvernement de l'Île-du-Prince-Édouard

et le Gouvernement des Territoires du Nord-Ouest.

