Financière Sun Life
Défi ouvert Canadien
de mathématiques 2015

Solutions officielles

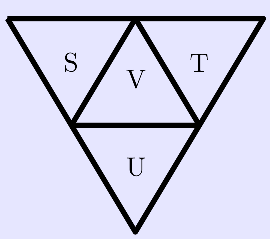
Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante: https://cms.math.ca/Concours/DOCM/2015/practice.html

Section A – 4 points pour chaque question

1. Un palindrome est un nombre dont les chiffres se lisent de la même façon en partant de la gauche ou de la droite, comme 4774 ou 505. Quel est le plus petit palindrome supérieur à 2015?

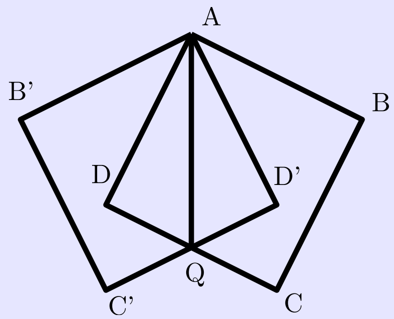
Solution : Comme 2015 a 4 chiffres, on cherche aussi un palindrome à quatre chiffres. Étant donné deux chiffres de départ en ordre, il y a un seul palindrome de 4 chiffres qui commence par ceux-ci. En débutant avec 20, le palindrome associé est 2002, ce qui est inférieur à 2015. Le palindrome suivant débute avec 21: il s'agit du nombre 2112. Puisque $2112 > 2015$ il s'agit du plus petit palindrome supérieur à 2015.

2. Dans l'image qui suit, il y a quatre triangles qu'on a nommé avec les lettres S, T, U et V. On veut colorier deux des triangles en bleu et les deux autres en rouge. De combien de façon différentes peut-on colorier les triangles de façon à ce que les deux triangles bleus aient un côté commun ?



Solution : Afin que les deux triangles bleus aient un coté commun, V doit être un des deux triangles bleus. L'autre triangle bleu pourrait être S, T ou U. Il y a donc trois façons différentes de colorier les triangles.

3. Dans la figure, $ABCD$ est un carré avec des côtés de longueur 4. De plus, Q est le point milieu de CD. En faisant la réflexion de $ABCD$ par la droite AQ, on obtient le carré $AB'C'D'$. La superposition des deux carrés forme le quadrilatère $ADQD'$. Trouvez l'aire du quadrilatère $ADQD'$.



Solution : Puisque la longueur des côtés de $ABCD$ est 4, alors $DQ = 2$. L'aire de ADQ est $4 \times 2/2 = 4$ et celle de $AD'Q$ est la même par symétrie. Ainsi, l'aire de $ADQD'$ est $4 + 4 = 8$.

4. L'aire d'un rectangle est égale à 180 unités carrées et son périmètre mesure 54 unités. Si la longueur de chaque côté du rectangle est augmentée de 6 unités, quelle est l'aire du rectangle résultant?

Solution 1 : Soit x et y les longueurs des côtés du rectangle. Alors $xy = 180$ et $2x + 2y = 54$ ou $x + y = 27$. Par inspection, on remarque que $x = 12, y = 15$ et $x = 15, y = 12$ sont les deux solutions. Lorsque chaque côté est augmenté de 6 unités, l'aire du nouveau rectangle est $(12 + 6)(15 + 6) = 18 * 21 = 378$.

Solution 2 : Soit x et y les longueurs des côtés du rectangle. L'énoncé nous indique que $xy = 180$ et$2x + 2y = 54$. On veut trouver la valeur de

$$\begin{aligned}(x+6)(y+6) \quad &= xy + 6x + 6y + 36 \\ &= xy + 3(2x + 2y) + 36 \\ &= 180 + 162 + 36 \\ &= 378.\end{aligned}$$

Section B – 6 points pour chaque question

1. Étant donné un entier $n > 0$, on pose $f(n)$ comme le deuxième plus grand diviseur positif de n. Par exemple, $f(12) = 6$ et $f(13) = 1$. Quel est le plus grand entier positif n tel que $f(n) = 35$?

Solution : Pour un entier positif n, posons n' comme le plus petit nombre premier qui divise n. Ainsi, on peut voir que $f(n) = n/n'$ et donc que $n = f(n) \cdot n'$. On nous donne $f(n) = 35$, donc pour maximiser la valeur de n on doit maximiser la valeur de n'. Puisque n' est le plus petit facteur premier de n, il ne peut être supérieur à aucun facteur premier de $f(n)$. Ainsi, la valeur maximale pour n' est 5 et la valeur maximale pour n est $5 \cdot 35 = 175$.

2. Soit ABC un triangle rectangle avec $C = 90^o$. Un cercle de diamètre AC croise l'hypothénuse AB en K. Si $BK : AK = 1 : 3$, déterminez la mesure de l'angle BAC.

Solution : Le triangle AKC est rectangle en K puisque celui-ci est inscrit dans un demi-cercle. AKC et ACB sont donc des triangles semblables. SPDG, on suppose que $AK = 3$ et $BK = 1$. Posons $AC = x$. Ainsi, les triangles semblables nous donnent $\frac{3}{x} = \frac{x}{4}$, donc $x = 2\sqrt{3}$. Par le théorème de Pythagore, $BC^2 = 4^2 - 12 = 4$ donc $BC = 2$. On remarque que ABC est un triangle $30 - 60 - 90$ dont BAC est l'angle de 30°.

3. Une suite arithmétique est une suite pour laquelle chacun des termes (sauf le premier) est la somme du terme précédant avec une valeur constante. Par exemple, $3, 7, 11, 15, \ldots$ est une suite arithmétique.
   S est une suite qui a les propriétés suivantes:

   - Le premier terme de S est positif.
   - Les trois premiers termes de S forment une suite arithmétique.
   - Si on construit un carré avec une aire égale à un terme de S, alors le prochain terme de S est le périmètre de ce carré.

   Trouvez toutes les valeurs possibles pour le troisième terme de S.

Solution : Posons que le quatrième terme est a^4. Par la troisième condition, le deuxième terme doit être $4a^2$ et le troisième terme doit être $8a$. Dans une suite arithmétique, la somme du premier et du troisième terme est le double du deuxième. On obtient donc:

$$\begin{aligned} a^4 + 8a &= 8a^2 \\ a^4 - 8a^2 + 8a &= 0 \\ a(a-2)(a^2+2a-4) &= 0 \end{aligned}$$

On trouve alors $a = 0, 2, -1 \pm \sqrt{5}$. Puisque chacun des termes représente l'aire ou le périmètre d'un carré, il est nécessaire que $a > 0$. Ainsi, les valeurs possibles sont $a = 2$ et $a = \sqrt{5} - 1$. Les valeurs possibles pour le troisième terme sont alors 16 et $8\sqrt{5} - 8$.

4. Une fermière a un troupeau de n moutons, où $2000 \leq n \leq 2100$. La fermière met une partie de ses moutons dans une première grange et le reste dans une deuxième grange. La fermière réalise alors que si elle pigeait deux moutons de son troupeau de façon aléatoire, la probabilité que ceux-ci se trouvent dans la même grange serait de $\frac{1}{2}$. Trouvez toutes les valeurs possibles de n.

Solution 1 : Supposons que la fermière possède n moutons au total et en place k dans une des deux granges. La probabilité que la fermière choisisse 1 mouton de chacune des granges est $\frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}} &= \frac{1}{2} \\
2k(n-k) &= n(n-1)/2 \\
(4k)n - 4k^2 &= n^2 - n \\
n^2 - (4k+1)n + 4k^2 &= 0 \\
n &= \frac{(4k+1) \pm \sqrt{(4k+1)^2 - 16k^2}}{2} \\
n &= \frac{(4k+1) \pm \sqrt{8k+1}}{2}
\end{aligned}$$

Afin que n soit un entier, il est nécessaire que $8k + 1 = a^2$ pour un certain entier positif a. On a donc $k = \frac{a^2-1}{8}$. En substituant dans l'équation pour n, on trouve:

$$\begin{aligned}
n &= \frac{4a^2-4+8\pm 8a}{16} \\
&= \frac{4a^2+4\pm 8a}{16} \\
&= \frac{a^2 \pm 2a+1}{4} \\
&= \left(\frac{a\pm 1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, n doit être un carré parfait. Le seul carré parfait entre 2000 et 2100 est 2025. Lorsque $a = 89$, on obtient $n = 2025, k = 990$ comme solution. La solution est donc $n = 2025$.

Solution 2 : On procède comme pour la solution 1: on trouve $n^2 - (4k+1)n + 4k^2 = 0$ qu'on peut réécrire $n = n^2 - 4k + 4k^2$. Cette expression se simplifie à $n = (n-2k)^2$ et donc n doit être un carré parfait, impliquant que $n = 2025$.

Section C – 10 points pour chaque question

1. Un polynome de degré deux $f(x) = x^2 + px + q$, avec des nombres réels p et q, est appelé *polynôme doublé* si celui-ci a deux racines dont une qui est le double de l'autre.

   (a) Si $p = -15$ pour un polynôme doublé $f(x)$, déterminez la valeur de q.

   (b) Si $f(x)$ est un polynôme doublé dont une des racines est 4, déterminez toutes les valeurs possibles de $p + q$.

   (c) Trouvez tous les polynômes doublés pour lesquels $p + q = 9$.

Solution :

(a) Disons qu'un polynôme doublé a pour racines k et $2k$. Le polynôme s'écrit donc $(x - k)(x - 2k) = x^2 - 3k + 2k^2$. Lorsque $p = -15$, on a $k = 5$ donc $q = 2 \cdot (5)^2 = 50$.

(b) De la partie précédente, on sait que $p+q = 2k^2-3k$. Si une des racines est 4, alors les deux possibilités pour k sont $k = 4$ et $k = 2$. Lorsque $k = 4$, on obtient $p + q = 32 - 12 = 20$ et lorsque $k = 2$, on obtient $p + q = 8 - 6 = 2$.

(c) Si $p+q = 9$, on a que $2k^2 - 3k = 9$ dont les solutions sont $k = 3, k = -\frac{3}{2}$. Les polynômes associés à ces valeurs dont $x^2 - 9x + 18$ et $x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$.

2. Soit $O = (0,0), Q = (13,4), A = (a,a), B = (b,0)$, où a et b sont des nombres réels strictement positifs avec $b \geq a$. Le point Q est sur le segment de droite AB.

   (a) Déterminez les valeurs de a et b pour lesquelles Q est le point milieu de AB.

   (b) Trouvez toutes les valeurs de a et b pour lesquelles Q est sur le segment AB et OAB est isocèle et rectangle.

   (c) Il y a une infinité de segments de droite AB qui contiennent le point Q. Pour combien de ces segments a et b sont-ils entiers?

Solution :

(a) Afin que Q soit le point milieu de AB, on doit avoir $(a+b)/2 = 13$ et $(a+0)/2 = 4$. La deuxième équation nous indique que $a = 8$, qu'on substitue dans la première équation pour obtenir $b = 18$.

(b) Si le triangle OAB est isocèle, il y a trois possibilités: $OA = OB, OA = AB$ ou $OB = AB$.

Si $OB = AB$, l'angle droit doit être situé au sommet B, ce qui implique que $a = b$. Afin que le point Q soit sur ce segment, on doit avoir $a = b = 13$.

Si $OA = AB$, l'angle droit doit être situé au sommet A. Par symétrie, on a nécessairement $b = 2a$. Il faut donc que le point $(13,4)$ soit sur le segment reliant (a,a) et $(2a,0)$. L'équation de la droite est $x + y = 2a$ et afin que $(13,4)$ s'y trouve, on doit avoir $a = 8,5, b = 17$.

Lorsque $OA = OB$, le triangle n'est pas rectangle.

(c) La pente du segment de droite AQ est $\frac{4-a}{13-a}$ et la pente du segment QB est $\frac{0-4}{b-13}$. Ces deux pentes doivent coïncider, on a donc l'égalité:

$$\begin{aligned}
\tfrac{-4}{b-13} &= \tfrac{4-a}{13-a} \\
52 - 4a &= ab - 4b - 13a + 52 \\
0 &= ab - 9a - 4b \\
36 &= (a-4)(b-9)
\end{aligned}$$

Afin que a et b soient des entiers positifs, les facteurs $a - 4$ et $b - 9$ doient être des diviseurs positifs de 36. Il y a 9 possibilités:

a - 4	b - 9	a	b
1	36	5	45
2	18	6	27
3	12	7	21
4	9	8	18
6	6	10	15
9	4	13	13
12	3	16	12
18	2	22	11
36	1	40	10

Comme $b \geq a$, on laisse tomber les 3 dernières possibilités. Il y a donc 6 possibilités pour le segment AB.

3. (a) Si $n = 3$, déterminez toutes les valeurs entières de m pour lesquelles m^2+n^2+1 est divisible par $M - n + 1$ et par $m + n + 1$.

   (b) Montrez que pour n'importe quel entier n, il y a toujours au moins une valeur entière m pour laquelle $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m-n+1$ et par $m+n+1$.

   (c) Montrez que pour n'importe quel entier n, il y a seulement un nombre fini de valeurs entières m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m-n+1$ et par $m + n + 1$.

Solution :

(a) Lorsque $n = 3$, il est nécessaire que $m^2 + 10$ soit divisible par $m - 2$ et $m + 4$. On peut écrire $m^2 + 10 = (m - 2)(m + 2) + 14$, impliquant que $m - 2$ doit être un diviseur de 14. De la même façon, $m^2 + 10 = (m + 4)(m - 4) + 26$ donc $m + 4$ doit diviser 26. Puisque $m - 2$ divise 14, $m - 2$ doit être un nombre parmi $-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14$ donc m doit être un nombre parmi $-12, -5, 0, 1, 3, 4, 9, 16$. Comme $m + 4$ divise 26, m doit être un nombre parmi $-30, -17, -6, -5, -3, -2, 9, 22$. Les seules valeur de m communes aux deux listes sont $m = -5$ et $m = 9$.

(b) Lorsque $m = n^2$, on a

$$m^2 + n^2 + 1 = n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Cette expression est divisible par $m + n + 1$ et $m - n + 1$ pour toute valeur de n.

(c) On peut écrire $m^2 + n^2 + 1 = (m - n + 1)(m + n - 1) + 2(n^2 - n + 1)$. Afin que $m - n + 1$ divise m^2+n^2+1, il doit aussi diviser $2n^2-n+1$. Pour toute valeur de n, $2(n^2-n+1) > 0$ et a donc un nombre fini de diviseurs positifs. Il y a donc un nombre fini de valeurs possibles pour m.

4. M. Gingras joue à un jeu avec les étudiants de son cours de mathématiques afin de leur en apprendre sur l'argent. Dans la classe de M. Gingras, il y $n \geq 2$ étudiants qui sont numérotés de 1 à n. M. Gingras donne $m_i \geq 0$ dollars à l'étudiant i pour chaque $1 \leq i \leq n$, où m_i est un entier et $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \geq 1$.
   On dit qu'un étudiant est un *donneur* si aucun étudiant n'a plus d'argent que lui et un *receveur* si aucun étudiant n'a moins d'argent que lui. Une étape du jeu consiste à ce que chaque donneur donne un dollar à chaque receveur (il est possible qu'un étudiant ait un montant négatif après cette étape). Cette étape est répétée jusqu'à ce que tous les étudiants aient le même montant ou que la distribution de l'argent dans la classe soit une distribution déjà obtenue plus tôt dans le jeu.

   (a) Trouvez des valeurs de $n, m_1, m_2, \ldots, m_n$ pour lesquelles le jeu se termine avec un étudiant qui a un montant négatif et montrez que le jeu se termine bel et bien de cette façon.

   (b) Supposons qu'il y a n étudiants. Déterminez la plus petite valeur de k_n telle que si $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \geq k_n$, alors aucun joueur ne peut terminer la partie avec un montant négatif.

   (c) Supposons que $n = 5$. Déterminez tous les quintuples $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ tels que $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4 \leq m_5$ pour lesquels tous les étudiants ont le même montant lorsque le jeu se termine.

Solution :

(a) Supposons qu'il y a 5 étudiants dans la classe et que les montants de départ sont: $(0, 0, 0, 1, 2)$. À mesure que le jeu progresse, les montants deviennent: $(1, 1, 1, 1, -1)$ puis $(0, 0, 0, 0, 3)$ et $(1, 1, 1, 1, -1)$. À ce moment, le jeu prend fin puisque ce quintuple a déjà été atteint.

(b) On considère une partie à n joueurs. Cette partie débute avec un joueur à $n-2$ dollars et tous les autres à $n-3$ dollars. Après le premier tour, le premier joueur aura -1 dollars, donc $n - 2 + (n-3)(n-1) = n^2 - 3n + 1$ n'est pas suffisant.
La seule façon pour qu'un joueur se retrouve avec un montant négatif est qu'il donne plus que le montant qu'il possède. Supposons que le montant total est $n^2 - 3n + 2$. Le principe des nids de pigeons nous dit qu'à chaque étape du jeu, il doit nécessairement y avoir un étudiant à $n-1$ dollars ou au moins deux étudiants à $n-2$ dollars. Dans le premier cas, comme le donneur va donner à $n-1$ étudiants, il n'aura pas un montant négatif à la prochaine étape. De la même façon, s'il y a au moins deux étudiants avec $n-2$ dollars, chacun d'eux donnera à au plus $n-2$ étudiants et aucun ne passera au prochain tour avec un montant négatif. Donc $k_n = n^2 - 3n + 2$.

(c) Il est nécessaire que $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$ soit un multiple de 5 afin que tous les étudiants aient le même montant. Soit m le montant moyen . Si un étudiant a exactement m dollars, il aura m dollars pour le reste de la partie puisque tous les autres étudiants auront m dollars ou bien il y aura un étudiant avec plus de m dollars et un étudiant avec moins de m dollars.
On considère les scénarios suivants:
   - $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 < m_5$ Tant que $m_5 \neq m_1$, quatre joueurs gagneront 1 dollar tandis que le cinquième en perdra 4. Ce scénario se poursuivra jusqu'au moment

ou les quatre joueurs auront m dollars. À ce point, la partie prend fin puisque le cinquième étudiant aura aussi m dollars. Le cas où $m_2 = m_3 = m_4 = m_5$ est symétrique à celui-ci.

- $m_1 < m_2 = m_3 = m_4 < m_5$ À chaque étape, le cinquième étudiant donnera 1 dollar au premier jusqu'à ce qu'un de ceux-ci ait le même montant que les étudiants 2 à 4. À ce moment, on se retrouve dans le premier scénario.
- $m_1 = m_2 = m_3 < m_4 \leq m_5$ Si à une certaine étape les étudiants 1 à 3 ne sont ni des donneurs ou des receveurs, le jeu se terminera avec tous les joueurs au même montant puisqu'il s'agit du scénario précédent. Puisqu'il n'y a que deux autres joueurs, les étudiants 1 à 3 peuvent gagner ou perdre au plus 2 dollars à chaque étape. Afin que ces trois joueurs ne soient jamais donneurs ou receveurs, ils ne doivent jamais avoir m dollars. Éventuellement, ils doivent avoir chacun $m - 1$ dollars et traverser entre $m - 1$ et $m + 1$. Par contre, s'ils ont chacun $m - 1$ dollars et sont des receveurs, les deux autre étudiants ne peuvent pas avoir le même montant d'argent. Les étudiants 1 à 3 gagneront donc 1 seul dollar pour atteindre m. Ainsi, le jeu doit se terminer avec tous les joueurs au même montant.
- $m_1 = m_2 < m_3 < m_4 = m_5$ Si $k = \min(m_3 - m_2, m_4 - m_3)$ est pair, alors après $k/2$ tours, trois joueurs auront le même montant. Tous les joueurs termineront alors avec le même montant.
  Si k est pair, alors après $(k-1)/2$ étapes, les joueurs auront (SPDG) $n_1 = n_2 < n_3 < n_4 = n_5$ dollars respectivement et $n_3 = n_2 + 1$. Puisque le montant total est divisible par 5, on trouve que $n_4 = n_5 = n_2 + 2p + 2$ pour un certain entier positif p. Si $p > 0$, la distribution des montants au prochain tour est $(n_2 + 2, n_2 + 2, n_2 + 1, n_2 + 2p, n_2 + 2p)$ et alors $(n_2 + 2, n_2 + 2, n_2 + 3, n_2 + 2(p - 1) + 4, n_2 + 2(p - 1) + 4)$ ce qui est pareil à $(q_2, q_2, q_2 + 1, q_2 + 2(p - 1) + 2, q_2 + 2(p - 1) + 2)$. Ainsi, le jeu arrivera à un point où les joueurs auront $(m - 1, m - 1, m, m + 1, m + 1)$ dollars respectivement. Le jeu ne se terminera donc pas avec tous les joueurs au même montant.
- $m_1 = m_2 < m_3 = m_4 < m_5$ Si $k = m_5 - m_4$ est pair, alors après $k/2$ étapes, les joueurs 3 à 5 auront le même montant à moins qu'à une étape précédente, les quatres premiers joueurs aient eu le même montant. Dans chacun de ces cas, tous les étudiants terminent la partie avec le même montant.
  Si k est impair, alors après $(k+1)/2$ étapes nous serons dans le cas impair du scénario précédent. Dans ce cas, les joueurs ne finissent pas tous avec le même montant à moins que $2(m_3 - m_2) < k$. Dans ce cas, nous serons dans le premier scénario et les joueurs termineront avec le même montant.

On veut maintenant réduire tous les cas à un des scénarios précédents. On suppose sans perte de généralité que $m_2 - m_1 \leq m_5 - m_4$. Ceci veut dire qu'au cours des $m_2 - m_1$ premières étapes, le joueur 5 aura donné $m_2 - m_1$ dollars au joueur 1. Après cette étape, la distribution des montants sera m_2, m_2, m_3, m_4, m_5', où $m_5' = m_5 - m_2 + m_1$.

Si $m_5' - m_4 \geq 2(m_3 - m_2)$ alors après les prochaines $m_3 = m_2$ étapes, les trois premiers joueurs auront le même montant et alors la partie se terminera avec tous les joueurs possédant le même montant.

Si $k = m_5' - m_4$ est pair, alors après les prochaines $k/2$ étapes, les joueurs 4 et 5 auront tous deux m_4 dollars et les deux premiers joueurs auront $(m_1 + m_2 + m_5 - m_4)/2$ dollars. Cette partie se terminera avec tous les joueurs au même montant si et seulement si $\min(m_4 - m_3, m_3 - (m_1 + m_2 + m_5 - m_4)/2$ est pair. Remarquons que k est pair si et seulement si $m_1 + m_2 + m_4 + m_5$ est pair.

Si k est impair, le joueur 5 donnera de l'argent aux joueurs 1 et 2 jusqu'à ce qu'ils aient 1 dollar de moins que le joueur 4. Les joueurs 4 et 5 donneront ensuite tour à tour de l'argent aux joueurs 1 et 2 jusqu'à ce que les joueurs 1 et 2 aient le même montant que le joueur 3, ou que l'un des joueurs 4 et 5 ait le même montant que le joueur 3. Si les joueurs 1 et 2 ont le même montant que le joueur 3, La partie se terminera avec tous les joueurs qu même montant. Ceci se produit lorsque $m_5 + m_4 - 2m_3 > 2m_3 - m_2 - m_1$. Si le joueur 4 ou 5 se retrouve au même montant que le joueur 3, la partie ne se terminera pas avec tous les joueurs au même montant.

Ainsi, on peut conclure en disant que la partie se terminera avec tous les joueurs au même montant si $m_2 - m_1 \leq m_5 - m_4$ et qu'une des trois conditions suivantes tient:

- $m_5 - m_4 \geq 2m_3 - m_2 - m_1$
- $m_1 + m_2 + m_4 + m_5$ et $\min(m_4 - m_3, m_3 - (m_1 + m_2 + m_5 - m_4)/2)$ sont pairs
- $m_1 + m_2 + m_4 + m_5$ est impair et $m_5 + m_4 - 2m_3 > 2m_3 - m_2 - m_1$

ou lorsque $m_2 - m_1 > m_5 - m_4$ et l'une des trois conditions suivantes est respectée:

- $m_2 - m_1 \geq m_5 + m_4 - 2m_3$
- $m_1 + m_2 + m_4 + m_5$ et $\min(m_3 - m_2, (m_1 - m_2 + m_4 + m_5)/2 - m_3)$ sont pairs.
- $m_1 + m_2 + m_4 + m_5$ est impair et $2m_3 - m_2 - m_1 > m_5 + m_4 - 2m_1$.

