



Le Défi ouvert canadien de mathématiques
Financière Sun life
5-6 novembre 2015

INSTRUCTION - ÉLÈVES

Instructions générales

- 1) N'ouvrez pas le cahier d'examen avant de recevoir l'autorisation de l'enseignant surveillant.
- 2) Le superviseur vous accordera **cinq minutes avant le début de l'examen** pour remplir la section d'identité de la page de couverture de l'examen. Inutile de vous précipiter. Assurez-vous de remplir tous les champs d'information et d'écrire lisiblement.
- 3) Lorsque vous aurez terminé l'examen et l'aurez remis à l'enseignant surveillant, vous pourrez quitter la salle.
- 4) Vous ne devez pas discuter publiquement (ni sur le Web) des questions de l'examen du DOCM 2015 ni de vos solutions pendant au moins 24 heures.



Format de l'examen

Vous disposez de 2 heures et 30 minutes pour faire le DOCM. L'examen compte trois sections:

- PARTIE A:** Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.
- PARTIE B:** Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.
- PARTIE C:** Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune. Il faut montrer tout son travail. On peut accorder des notes partielles.

Les diagrammes ne sont pas à l'échelle; ils sont fournis à titre informatif seulement.

Démarches et réponses

Toutes vos démarches et vos réponses doivent être présentées dans ce cahier, dans les cases réservées à cet effet; n'ajoutez pas de feuilles supplémentaires. Des points seront accordés pour les solutions complètes et pour la clarté. Dans les parties A et B, vous n'êtes pas obligé de présenter votre démarche pour obtenir tous vos points. Toutefois, si votre réponse ou votre solution n'est pas bonne, vous pourriez tout de même obtenir une partie des points pour les démarches notées dans le cahier. Dans la partie C, vous devez **démontrer** votre démarche et fournir la bonne réponse ou solution pour obtenir tous les points.

Veuillez exprimer tous vos calculs et fournir vos réponses en nombres exacts comme 4π , $2 + \sqrt{7}$, etc., plutôt que sous la forme 12,566, 4,646, etc. Les noms de tous les gagnants seront publiés sur le site web de la Société mathématique du Canada <https://cms.math.ca/Concours/DOCM>.

Partie A: Question 1 (4 points)

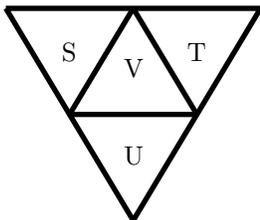
Un palindrome est un nombre dont les chiffres se lisent de la même façon de gauche à droite ou de droite à gauche, comme 4774 ou 505. Quel est le plus petit palindrome supérieur à 2015?

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie A: Question 2 (4 points)

Dans l'image qui suit, il y a quatre triangles qu'on a étiqueté avec les lettres S , T , U et V . On veut colorier deux des triangles en bleu et les deux autres en rouge. De combien de façons différentes peut-on colorier les triangles de façon à ce que les deux triangles bleus aient un côté en commun ?

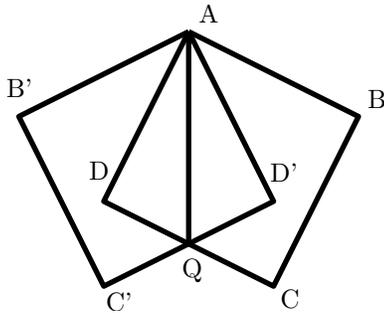


Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie A: Question 3 (4 points)

Dans la figure, $ABCD$ est un carré avec des côtés de longueur 4 chacun, Q est le point milieu de CD . En faisant la réflexion de $ABCD$ par rapport à la droite AQ , on obtient le carré $AB'C'D'$. La superposition des deux carrés forme le quadrilatère $ADQD'$. Trouvez l'aire de ce quadrilatère.



Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie A: Question 4 (4 points)

L'aire d'un rectangle est égale à 180 unités carrées et son périmètre mesure 54 unités. Si la longueur de chaque côté du rectangle est augmentée de 6 unités, quelle est l'aire du rectangle résultant?

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 1 (6 points)

Pour un entier $n \geq 2$, on pose $f(n)$ comme étant le deuxième plus grand diviseur positif de n . Par exemple, $f(12) = 6$ et $f(13) = 1$. Quel est le plus grand entier positif n tel que $f(n) = 35$?

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 2 (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle avec $\angle BCA = 90^\circ$. Un cercle de diamètre AC croise l'hypothénuse AB en K . Si $BK : AK = 1 : 3$, déterminez la mesure de l'angle $\angle BAC$.

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 3 (6 points)

Une suite arithmétique est une suite pour laquelle chacun des termes (sauf le premier) est obtenu en ajoutant une valeur constante au terme précédent. Par exemple, 3, 7, 11, 15, ... est une suite arithmétique.

S est une suite avec les propriétés suivantes:

- Le premier terme de S est positif.
- Les trois premiers termes de S forment une suite arithmétique.
- Si on construit un carré avec une aire égale à un terme de S , alors le prochain terme de S est égal au périmètre de ce carré.

Trouvez toutes les valeurs possibles pour le troisième terme de S .

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 4 (6 points)

Une fermière a un troupeau de n moutons, où $2000 \leq n \leq 2100$. La fermière met une partie de ses moutons dans une première grange et le reste dans une deuxième grange. La fermière réalise alors que si elle pigeait deux moutons de son troupeau de façon aléatoire, la probabilité que ceux-ci se trouvent dans la même grange serait de $\frac{1}{2}$. Déterminez la valeur de n .

Votre Solution:**Votre réponse finale:**

Partie C: Question 1 (10 points)

Un polynôme de degré deux $f(x) = x^2 + px + q$, avec des coefficients réels p et q , est appelé *polynôme doublé* s'il admet deux racines dont une qui est le double de l'autre.

- (a) Si $p = -15$ pour un polynôme doublé $f(x)$, déterminez la valeur de q .
- (b) Si $f(x)$ est un polynôme doublé dont une des racines est 4, déterminez toutes les valeurs possibles de $p + q$.
- (c) Trouvez tous les polynômes doublés pour lesquels $p + q = 9$.

Votre Solution:

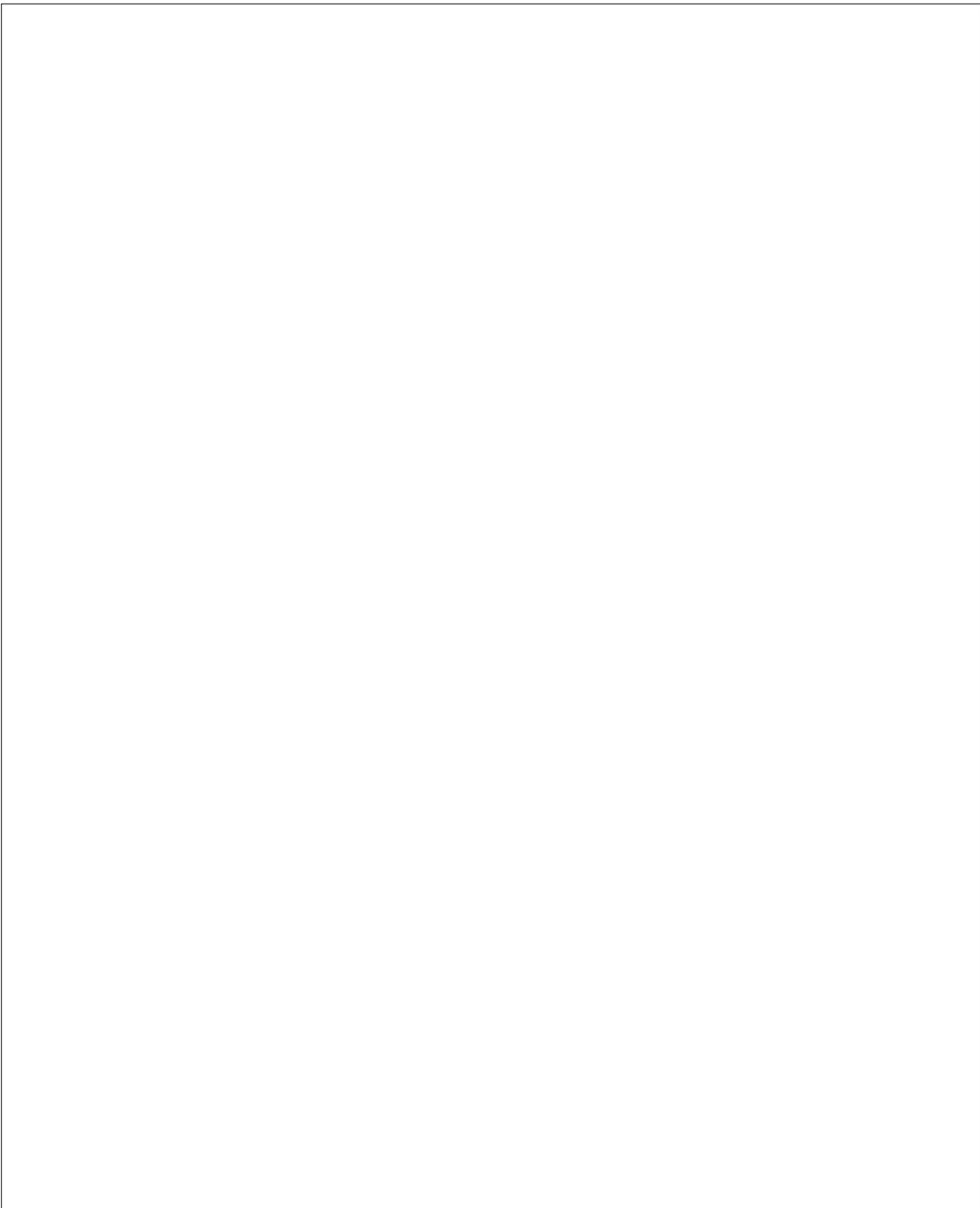


Partie C: Question 2 (10 points)

Soit $O = (0, 0)$, $Q = (13, 4)$, $A = (a, a)$, $B = (b, 0)$, où a et b sont des nombres réels strictement positifs avec $b \geq a$. Le point Q est situé sur le segment de droite AB .

- (a) Déterminez les valeurs de a et b pour lesquelles Q est le point milieu de AB .
- (b) Trouvez toutes les valeurs de a et b pour lesquelles Q est sur le segment AB et le triangle OAB est isocèle et rectangle.
- (c) Il y a une infinité de segments de droite AB qui contiennent le point Q . Pour combien de ces segments a et b sont-ils entiers?

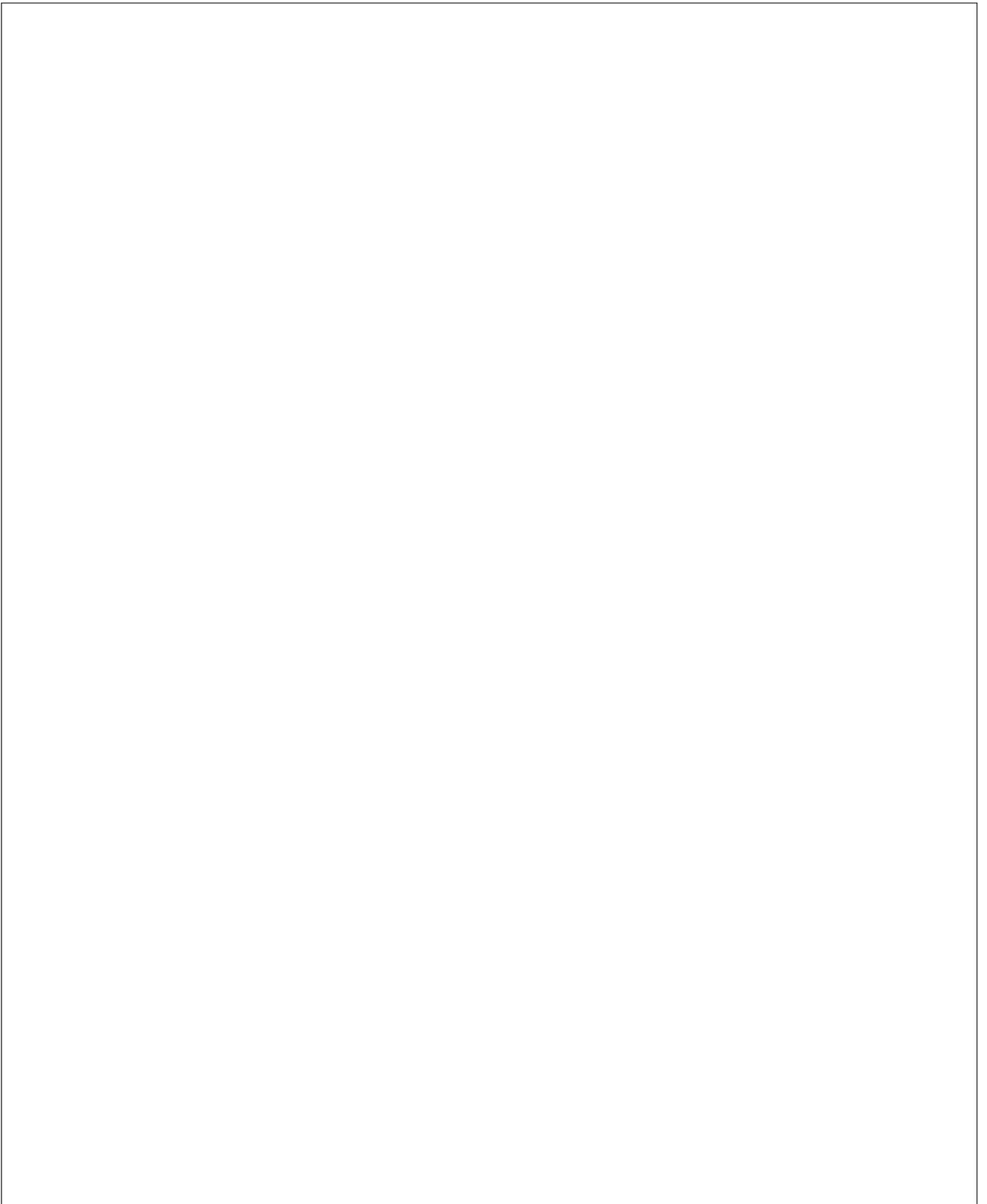
Votre Solution:



Partie C: Question 3 (10 points)

- (a) Si $n = 3$, déterminez toutes les valeurs entières de m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.
- (b) Montrez que pour n'importe quel entier n , il y a toujours au moins une valeur entière m pour laquelle $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.
- (c) Montrez que pour n'importe quel entier n , il y a seulement un nombre fini de valeurs entières m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

Votre Solution:



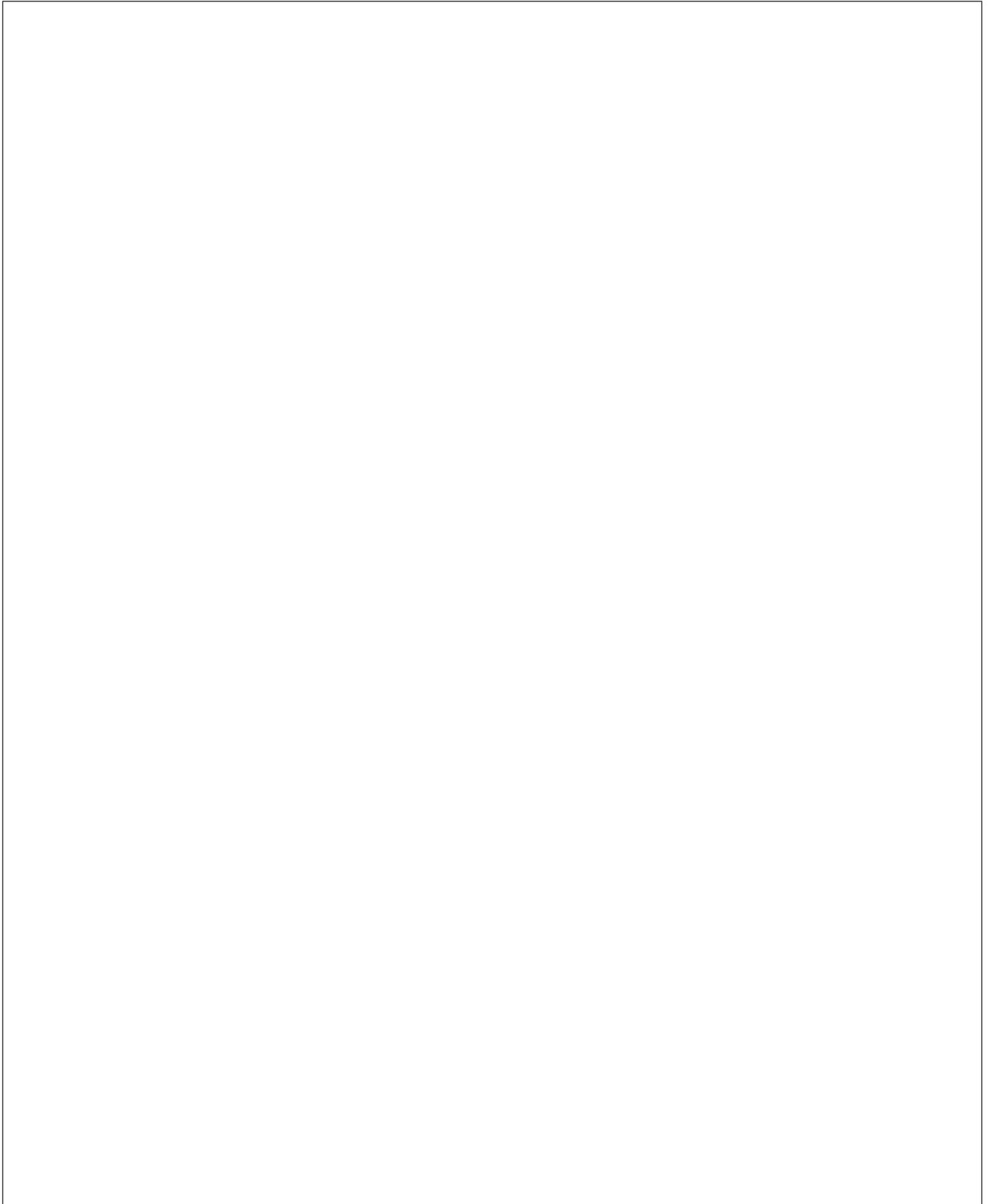
Partie C: Question 4 (10 points)

M. Gingras joue à un jeu avec les étudiants de son cours de mathématiques afin de leur apprendre à gérer l'argent. Dans la classe de M. Gingras, il y a $n \geq 2$ étudiants qui sont numérotés de 1 à n . M. Gingras donne $m_i \geq 0$ dollars à l'étudiant i pour chaque $1 \leq i \leq n$, où m_i est un entier et $m_1 + m_2 + \dots + m_n \geq 1$.

On dit qu'un étudiant est un *donneur* s'il n'y a pas un autre étudiant avec plus d'argent que lui et on dit qu'il est un *receveur* s'il n'y a pas un autre étudiant avec moins d'argent que lui. Une étape du jeu consiste à ce que chaque donneur donne un dollar à chaque receveur (il est possible qu'un étudiant ait un montant négatif après cette étape). Cette étape est répétée jusqu'à ce que tous les étudiants aient le même montant ou que la distribution de l'argent dans la classe soit une distribution déjà obtenue plus tôt dans le jeu.

- (a) Trouvez des valeurs de n, m_1, m_2, \dots, m_n pour lesquelles le jeu se termine avec un étudiant qui a un montant négatif et montrez que le jeu se termine bel et bien de cette façon.
- (b) Supposons qu'il y a n étudiants. Déterminez la plus petite valeur de k_n telle que si $m_1 + m_2 + \dots + m_n \geq k_n$, alors aucun joueur ne peut terminer la partie avec un montant négatif.
- (c) Supposons que $n = 5$. Déterminez tous les quintuples $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ tels que $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4 \leq m_5$ pour lesquels tous les étudiants ont le même montant lorsque le jeu se termine.

Votre Solution:





Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

Financière Sun Life

Défi ouvert canadien de mathématiques

