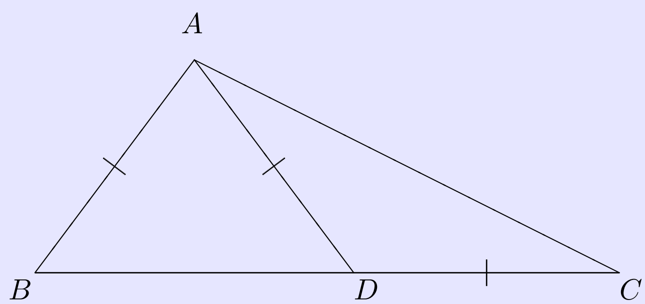
Financière Sun Life
Défi ouvert Canadien
de mathématiques 2014

Solutions officielles

Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante: https://cms.math.ca/Concours/DOCM/2014/practice.html

Section A – 4 points pour chaque question

1. Dans le triangle ABC, D est un point sur le côté BC tel que $BA = AD = DC$. Sachant que $\angle BAD = 80°$, déterminez la valeur de $\angle ACB$.



Solution 1: Soit $x = \angle ADB$. Puisque $AB = AD$, $\angle ABD = x$. En additionnant les angles de $\triangle ABD$, on trouve $2x + 80° = 180°$. Alors $2x = 100°$ et $x = 50°$. Ainsi, $\angle ADB = 50°$. Donc $\angle ADC = 180° - \angle ADB = 180° - 50° = 130°$.

Puisque $AD = DC$, $\angle ACD = \angle DAC$. Posons y comme la mesure de cet angle commun. En additionnant la valeur des angles de $\triangle ACD$, on trouve que $2y + 130° = 180°$. Ainsi, $2y = 50°$ et $y = 25°$. On a donc trouvé que $\angle ACB = \angle ACD = 25°$.

Solution 2: Puisque $AB = AD$, $\angle ABD = \angle ADB$. De la même manière, $DA = DC$, donc $\angle DAC = \angle DCA$. On pose $x = \angle ABD = \angle ADB$ et $y = \angle DAC = \angle DCA$. Comme $\angle DCA = \angle BCA$ on doit déterminer la valeur de y.

Par le théorème de l'angle extérieur appliqué à $\triangle ADC$, $x = 2y$. En additionnant les angles intérieurs de $\triangle ABD$, on trouve l'équation $4y + 80° = 180°$. Ainsi, $4y = 100°$ et $y = 25°$.

2. Les équations $x^2 - a = 0$ et $3x^4 - 48 = 0$ ont les mêmes solutions réelles. Quelle est la valeur de a?

Solution 1: Le côté gauche de l'équation $3x^4-48 = 0$ peut être factorisé comme $3(x^4-16) = 3(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 3(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

Ainsi, les solutions réelles de $3x^4 - 48 = 0$ sont $x = \pm 2$. Donc $x^2 = 4$, et $a = 4$.

Solution 2: Le côté gauche de l'équation $3x^4 - 48 = 0$ peut être factorisé comme $3(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$. Puisque les solutions réelles de cette équation doivent être les mêmes que celles de $x^2 - a$, il est nécessaire que $x^2 - a = x^2 - 4$ et donc que $a = 4$.

3. Un entier positif m est tel que lorsqu'il est multiplié par 12, le résultat est un nombre n à quatre chiffres de la forme $20A2$ pour un certain chiffre A. Quel est le nombre à quatre chiffres n?

Solution 1: Pour qu'un nombre soit divisible par 3, la somme des chiffres qui le composent doit être un multiple de 3. Donc $3|(A + 4)$, ce qui nous indique que $A \in \{2, 5, 8\}$.

Pour qu'un nombre soit divisible par 4, le nombre formé par les deux derniers chiffres du nombre considéré doit être divisible par 4. Donc $4|(10A + 2)$. On trouve alors que $A \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Le seul nombre en commun est $A = 5$, donc $n = 2052$.

Solution 2: Le nombre $n - 12$ est divisible par 5, donc n est de la forme $60k + 12$ pour un certain entier k.

$60 \times 34 + 12 = 2052$, donc $n = 2052$ est une possibilité. Il est ensuite facile de vérifier qu'aucune autre valeur de k ne donne de réponse adéquate.

4. Ariane, Béatrice, Céline et Doris ont joué 6 parties de tennis ensemble. À chaque partie, les quatre amies se sont séparées en deux équipes de deux joueuses et une des deux équipes a gagné la partie. Si Ariane était dans l'équipe gagnante lors de 5 parties, Béatrice lors de 2 parties et Céline lors d'une partie, dans combien de parties Doris a-t-elle fait partie de l'équipe gagnante?

Solution: À chaque partie, il y a deux gagnantes. Il y a donc un total de $6 \times 2 = 12$ gagnantes.

On pose respectivement A, B, C, D comme le nombre de victoires de Ariane, Béatrice, Céline et Doris. On peut ainsi exprimer le nombre de victoires comme $A + B + C + D$. On obtient alors l'équation $A + B + C + D = 12$.

Comme on sait que $A = 5, B = 2, C = 1$, on trouve $D = 12 - 5 - 2 - 1 = 4$.

Section B – 6 points pour chaque question

1. L'aire du cercle qui passe par les points $(1,1),(1,7)$, et $(9,1)$ est exprimée par $k\pi$. Quelle est la valeur de k?

Solution: On considère le triangle formé par les trois points donnés. Comme ce triangle a deux côtés parallèles aux axes, il s'agit d'un triangle rectangle. Ces deux côtés ont respectivement une longueur de $7-1=6$ et $9-1=8$. Par le théorème de Pythagore, la longueur du troisième côté est $\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Puisque le triangle considéré est rectangle, l'hypothénuse est un diamètre du cercle passant par les trois points. Ainsi, l'aire du cercle est $5^2\pi=25\pi$ et $k=25$.

2. Trouvez toutes les valeurs entières de n pour lesquelles $n^2+6n+24$ est un carré parfait.

Solution: Supposons que $n^2+6n+24=a^2$. On peut réécrire cette équation sous la forme $(n+3)^2+15=a^2$. En substituant $x=n+3$, on peut réécrire la précédente équation sous la forme $a^2-x^2=15$ qui se factorise comme $(a-x)(a+x)=15$.

Sans perte de généralité, on suppose que a est positif puisque les valeurs de x obtenues ne dépendent pas du signe de la valeur a. Comme a est supposé positif, au moins une des deux valeurs $a+x, a-x$ est aussi positive. Comme le produit de $a+x$ et $a-x$ est positif, ces deux expressions doivent être positives. On trouve donc que $(a+x,a-x)\in\{(1,15),(3,5),(5,3),(15,1)\}$.

Les couples (a,x) associés sont $(8,7),(4,1),(4,-1)$ et $(8,-7)$. Les valeurs correspondantes pour n sont $4,-2,-4$ et -10.

3. Cinq X et quatre O sont disposés dans la grille ci-dessous de façon à ce que chaque nombre soit couvert par un symbole. Il y a 126 façons différentes de disposer les symboles dans la grille. De ces 126 configurations, combien contiennent une ligne de trois O et aucune ligne de trois X ?
   Une ligne de 3 symboles peut être une ligne horizontale, une ligne verticale ou une diagonale: $1-5-9$ ou $7-5-3$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Solution: S'il y a une ligne horizontale (ou verticale) qui contient seulement des O, alors puisqu'il y a cinq X pour les deux autres lignes, il doit y avoir une ligne horizontale (ou verticale) remplie de X. La ligne de O doit donc être une diagonale.

Lorsqu'une diagonale est remplie de O, aucune autre ligne ne peut être remplie de X puisqu'une diagonale croise chacune des lignes. Chaque configuration avec une diagonale de O est donc une solution.

Lorsque c'est la diagonale $1-5-9$ qui est remplie de O, il y a 6 choix de position pour le quatrième O: $2, 3, 4, 6, 7, 8$. Chacun de ces choix est associé à une solution. De la même façon, il y a 6 solutions pour la diagonale $7-5-3$.

Il n'est pas possible que les deux diagonales soient simultanément remplies de O. Ainsi, nous n'avons pas compté les solutions à plusieurs reprises. Donc 12 des 126 configurations contiennent une ligne de trois O et aucune ligne de trois X.

4. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^3+3x^2+2x}$. Trouvez le plus petit entier positif n tel que

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n) > \frac{503}{2014}.$$

Solution 1: On remarque que $x^3+3x^2+2x = x(x+1)(x+2)$. Pour commencer, on écrit $1/(x^3+3x^2+2x)$ comme

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

où a, b, c sont des nombres réels.

Cette dernière expression peut être réécrite comme

$$\frac{a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{(a+b+c)x^2+(3a+2b+c)x+2a}{x(x+1)(x+2)}.$$

Ainsi, $a+b+c=0, 3a+2b+c=0$ et $2a=1$.

À l'aide de la dernière équation, on trouve que $a = 1/2$. Les deux premières équations se simplifient à $b+c=-1/2$ et $2b+c=-3/2$. En soustrayant la première à la seconde, on trouve $b=-1$. On trouve ensuite que $c = 1/2$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right).$$

On s'intéresse ensuite à la somme $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$. Celle-ci est égale à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+2}\right).$$

À l'exeption de $1, 1/2, 1/(n+1)$ et $1/(n+2)$, tous les termes s'annulent. Le résultat se simplifie ainsi à

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver la première valeur de n pour laquelle

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} > \frac{503}{2014}.$$

On simplifie l'équation à

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{4} - \frac{503}{2014} = \frac{2}{4 \cdot 2014} = \frac{1}{2 \cdot 2014},$$

qui est équivalent à $(n+1)(n+2) > 2014$.

Après quelques essais, on trouve que $44 \cdot 45 = 1980$ et $45 \cdot 46 = 2070$. Ainsi, $n = 44$ est la réponse voulue.

Solution 2: On obtient $(n+1)(n+2) > 2014$ comme dans la Solution 1. On réécrit l'équation sous la forme $n^2 + 3n - 2012 > 0$. Par la formule pour les zéros d'une équation quadratique, on obtient

$$n > \frac{-3 + \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2012}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{8057}}{2}.$$

Le plus grand entier positif inférieur à $\sqrt{8057}$ est 89. Ainsi, $n > (-3 + 89)/2 = 43$. L'entier $n = 44$ est donc la plus petite valeur entière satisfant la condition demandée.

Section C – 10 points pour chaque question

1. Une suite de la forme $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ est appelée *géométrique* si $t_1 = a$, $t_2 = ar$, $t_3 = ar^2$, $\ldots$, $t_n = ar^{n-1}$. Par exemple, $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ et $\{1, -3, 9, -27\}$ sont deux suites géométriques. Pour chacune des trois questions suivantes, on suppose que $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ est une suite géométrique de nombres réels.

   (a) Si $t_1 = 3$ et $t_2 = 6$, déterminez la valeur de t_5.

   (b) Si $t_2 = 2$ et $t_4 = 8$, déterminez toutes les valeurs possibles pour t_5.

   (c) Si $t_1 = 32$ et $t_5 = 2$, déterminez toutes les valeurs possibles pour t_4.

Solution:

(a) $t_1 = 3 = a$ et $t_2 = ar = 6$, donc $r = 6/3 = 2$. .
Ceci nous donne $t_5 = 3 \times 2^4 = 48$.

(b) $t_2 = 2 = ar$ et $t_4 = 8 = ar^3$. En divisant les deux équations, on trouve $r^2 = 4$, donc $r = \pm 2$.
Lorsque $r = 2$, on trouve $a = 1$, donc $t_5 = 2^4 = 16$.
Lorsque $r = -2$, on trouve $a = -1$, donc $t_5 = -1 \times 2^4 = -16$.

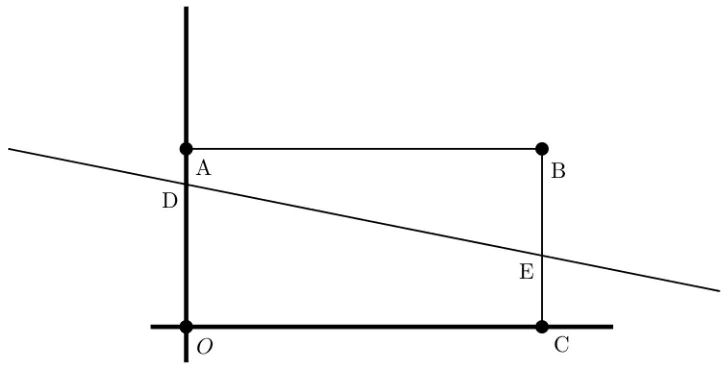
(c) On sait que $t_1 = 32 = a$ et $t_5 = 2 = ar^4$. On trouve donc $a = 32$, et $r^4 = \frac{1}{16}$.
Comme $r^4 = \frac{1}{16}$, $r^2 = \frac{1}{4}$ ou $r^2 = \frac{-1}{4}$.
Lorsque $r^2 = \frac{-1}{4}$, r n'est pas un nombre réel et la séquence n'est pas valide.
Lorsque $r^2 = \frac{1}{4}$ on trouve $r = \pm \frac{1}{2}$.
Ceci nous donne $t_4 = 32 \times \frac{1}{8} = 4$ et $t_4 = 32 \times \frac{-1}{8} = -4$.

2. La droite L décrite par l'équation $5y + (2m - 4)x - 10m = 0$ dans le plan xy croise le rectangle de sommets $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(10,6)$, $C(10,0)$ en D sur le segment OA et en E sur le segment BC.

   (a) Montrez que $1 \leq m \leq 3$.

   (b) Montrez que l'aire du quadrilatère $ADEB$ vaut $\frac{1}{3}$ de l'aire du rectangle $OABC$.

   (c) Déterminez, en fonction de m, l'équation de la droite parallèle à L qui croise OA en F et BC en G de façon à ce que les quadrilatères $ADEB$, $DEGF$ et $FGCO$ aient tous la même aire.



Solution:

(a) Puisque D est sur le segment OA, la coordonnée en x de D est 0. La coordonnée en y de D est donc la solution à l'équation $5y - 10m = 0$, i.e. $y = 2m$. Ainsi, L croise OA en $D(0, 2m)$. Pour que D soit sur le segment OA, $0 \leq 2m \leq 6$, ou de façon équivalente $0 \leq m \leq 3$.

De la même façon, la coordonnée en x de E est 10 et sa coordonnée en y est solution à $5y + (2m - 4)(10) - 10m = 0$, dont la solution sont $y = 8 - 2m$. Ainsi, $0 \leq 8 - 2m \leq 6$ ou de façon équivalente $1 \leq m \leq 4$.

On a trouvé que $0 \leq m \leq 3$ et $1 \leq m \leq 4$, donc $1 \leq m \leq 3$.

(b) Remarquons que $ADEB$ est un trapèze avec base AB et dont les côtés parallèles sont AD et BE. Son aire est donc donnée par

$$\overline{AB} \cdot \frac{\overline{AD} + \overline{BE}}{2} = 10 \cdot \frac{(6 - 2m) + (6 - (8 - 2m))}{2} = 10 \cdot \frac{4}{2} = 20.$$

Puisque l'aire de $OABC$ est $6 \cdot 10$, on a terminé.

(c) Afin de montrer que les quadrilatères ont la même aire, il suffit de s'assurer que l'aire de $FGCO$ est 20 (i.e. $\frac{1}{3}$ de l'aire de $OABC$).

Soit $M(5, b)$ le point milieu entre F et G. Ainsi, la moyenne des coordonnées en y de F et G est b, donc l'aire de $FGCO$ est $b \cdot 10 = 10b$. On trouve alors que $b = 2$. De plus, le point $M(5, 2)$ est sur la droite parallèle à L.

La pente de cette droite est la même que celle de L, elle est donc donnée par $\dfrac{4 - 2m}{5}$.

Ainsi, l'équation de la droite est

$$y = \left(\frac{4 - 2m}{5}\right) x + (2m - 2).$$

3. Le club mathématique d'une école compte 12 étudiants. Chaque semaine, 6 des 12 étudiants font une sortie éducative.

   (a) Jean, un des étudiants du club, a fait une sortie avec chaque autre étudiant du club. Au minimum, combien de sorties Jean a-t-il fait?

   (b) Si chaque paire d'étudiants du club a fait au moins une sortie ensemble, combien de sorties ont eu lieu au minimum?

Solution:

(a) À part Jean, il y a 11 étudiants dans le club **e**t à chaque sortie de Jean, il y avait 5 autres étudiants avec lui. Afin que Jean ait fait une sortie avec chaque étudiant du club, il a du participer à $\lceil \frac{11}{5} \rceil = \lceil 2,2 \rceil = 3$ sorties .

Pour s'assurer que trois sorties sont nécessaires, on note les autres étudiants $\{s_1, s_2, \ldots, s_{11}\}$. Lors de la première sortie, Jean a pu accompagner les étudiants $\{s_1, \ldots, s_5\}$. Lors de la deuxième sortie, il a pu accompagner les étudiants $\{s_6, \ldots, s_{10}\}$. Finalement, il a pu accompagner s_{11} et quatre autres étudiants lors de sa troisième sortie.

(b) De la partie (a), on sait que chaque étudiant a du participer à au moins 3 sorties. Puisqu'il y a 12 étudiants dans le club, si on additionne le nombre de sorties auxquelles chaque étudiant a participé, on obtient $12 \times 3 = 36$. Comme 6 étudiants participent à chaque sortie, il doit donc y avoir au minimum $\frac{36}{6} = 6$ sorties.

On s'assure maintenant que 6 sorties sont nécessaires à ce que chaque étudiant ait accompagné chaque autre étudiant lors d'une sortie. Pour ce faire, on divise les étudiants en 4 groupes de 3 étudiants (groupes A, B, C, D). Il y a 6 différentes paires de groupes (AB, AC, AD, BC, BD, CD). À chacune des 6 sorties, on peut inviter les étudiants associés à une des paires de groupes. De cette façon, chaque groupe a fait une sortie avec chaque autre groupe et ainsi, chaque paire d'étudiants a fait une sortie commune. Le minimum de sorties nécessaires est donc 6.

4. Un polynôme $f(x)$ à coefficients réels est appelé *somme de carrés* s'il existe des polynômes $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ à coefficients réels pour lesquels

$$f(x) = p_1^2(x) + p_2^2(x) + \cdots + p_n^2(x)$$

Par exemple, $2x^4 + 6x^2 - 4x + 5$ est une somme de carrés puisque

$$2x^4 + 6x^2 - 4x + 5 = (x^2)^2 + (x^2+1)^2 + (2x-1)^2 + (\sqrt{3})^2$$

(a) Trouvez toutes les valeurs de a pour lesquelles $f(x) = x^2+4x+a$ est une somme de carrés.

(b) Trouvez toutes les valeurs de a pour lesquelles $f(x) = x^4 + 2x^3 + (a-7)x^2 + (4-2a)x + a$ est une somme de carrés. Pour chacune de ces valeurs, écrivez $f(x)$ comme une somme de carrés.

(c) Supposons que $f(x)$ est une somme de carrés. Montrez qu'il existe des polynômes $u(x), v(x)$ à coefficients réels tels que $f(x) = u^2(x) + v^2(x)$.

Solution:

(a) Si $f(x)$ est une somme de carrés de polynômes, alors $f(x)$ doit prendre une valeur positive pour tout x. En complétant le carré, on trouve $f(x) = (x+2)^2 + (a-4)$.

On voit que $f(x)$ est positive pour toute valeur de x si $a - 4 \geq 0$, i.e. $a \geq 4$. C'est en fait suffisant à ce que $f(x)$ soit une somme de carrés puisque si $a - 4 \geq 0$ alors

$$f(x) = (x+2)^2 + \left(\sqrt{a-4}\right)^2.$$

Donc $f(x)$ est une somme de carrés si et seulement si $a \geq 4$.

(b) La somme des coefficients de $f(x)$ est 0 alors $x - 1$ est un facteur. On factorise pour trouver

$$f(x) = (x-1)[x^3 + 3x^2 + (a-4)x - a].$$

Comme la somme des coefficients de $x^3 + 3x^2 + (a-4)x - a$ est aussi 0, $x - 1$ en est un facteur. On factorise encore une fois pour trouver

$$f(x) = (x-1)^2(x^2 + 4x + a).$$

Si $f(x)$ est une somme de carrés, elle doit toujours prendre des valeurs positives. Puisque $(x-1)^2$ est toujours positive, $x^2 + 4x + a$ doit toujours être positive. Comme dans la partie (a), ceci implique que $a \geq 4$.

Pour une telle valeur de a, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2(x^2+4x+a) \\ &= (x-1)^2\left((x+2)^2 + \left(\sqrt{a-4}\right)^2\right) \\ &= [(x-1)(x+2)]^2 + [\sqrt{a-4}(x-1)]^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)$ est une somme de carrés si et seulement si $a \geq 4$. On a aussi trouvé l'écriture l'écriture explicite de $f(x)$ comme somme de carrés.

(c) Supposons que $f(x)$ est une somme de carrés. Comme $f(x)$ est positive pour toute valeur de x, son coefficient directeur doit être positif et on peut même supposer que le polynôme est unitaire (coefficient directeur vaut 1) en mettant en évidence la racine carrée du terme directeur. Les zéros non réels de $f(x)$ viennent en paires (conjugués complexes) et $f(x)$ peut être factorisé en un produit de polynômes irréductibles de degré 1 et 2 à coefficients réels, chacun élevé à une certaine puissance:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} p_i(x)^{k_i} \prod_{j=1}^{n} q_i(x)^{j_i},$$

où les p_i sont des polynômes de degré 1 distincts, les q_i des polynômes irréductibles distincts de degré 2 et $k_i, j_i \geq 1$ pour chaque i.

Pour chaque i, on pose $q_i(x) = x^2 + a_i x + b_i$. Comme $q_i(x)$ est irréductible sur les réels, $a_i^2 - 4b_i < 0$, et $q_i(x)$ peut être écrit comme une somme de carrés de la façon suivante:

$$q_i(x) = \left(x + \frac{a_i}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_i - \frac{a_i^2}{4}}\right)^2.$$

Pour chaque i, on pose $p_i(x) = x - c_i$.

On affirme que k_i est pair pour toute valeur de i. Supposons le contraire et que les nombres impairs parmi $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sont $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_l}$ où $c_{i_1} < c_{i_2} < \cdots < c_{i_l}$ sans perte de généralité. Ainsi,

$$f(x) = (x - c_{i_1})(x - c_{i_2}) \cdots (x - c_{i_l}) g(x),$$

où $g(x)$ est positif pour toute valeur de x ($g(x)$ est un produit de polynômes de degré 2 qui sont des sommes de carrés et de puissances paires de polynômes de degré 1). Ainsi, $f\left(\frac{c_{i_l} + c_{i_{l-1}}}{2}\right) < 0$, ce qui est impossible puisque $f(x)$ est une somme de carrés.

On déduit ensuite que

$$f(x) = h(x)^2 \prod_{j=1}^{n} \left(r_j^2(x) + s_j^2(x)\right), \tag{1}$$

où $h(x)$ et $r_j(x), s_j(x)$ sont des polynômes pour toute valeur de j ($h(x) = \prod_{i=1}^{m} p_i(x)^{\frac{k_i}{2}}$, $r_j(x) = x + \frac{a_j}{2}$, et $s_j(x) = \sqrt{b_j - \frac{a_j^2}{4}}$.)

On remarque que pour tout i, j,

$$(r_i^2 + s_i^2)(r_j^2 + s_j^2) = (r_i r_j + s_i s_j)^2 + (r_i s_j - r_j s_i)^2.$$

En appliquant à répétition l'identité à l'équation (5), on trouve des polynômes $P(x), Q(x)$ pour lesquels $P^2(x) + Q^2(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(r_j^2(x) + s_j^2(x)\right)$. Ainsi,

$$f(x) = (h(x)P(x))^2 + (h(x)Q(x))^2.$$

