



Le Défi ouvert canadien de mathématiques
Financière Sun life
6-7 novembre 2014

INSTRUCTION - ÉLÈVES

Instructions générales

- 1) N'ouvrez pas le cahier d'examen avant de recevoir l'autorisation de l'enseignant surveillant.
- 2) Le superviseur vous accordera **cinq minutes avant le début de l'examen** pour remplir la section d'identité de la page de couverture de l'examen. Inutile de vous précipiter. Assurez-vous de remplir tous les champs d'information et d'écrire lisiblement.
- 3) Lorsque vous aurez terminé l'examen et l'aurez remis à l'enseignant surveillant, vous pourrez quitter la salle.
- 4) Vous ne devez pas discuter publiquement (ni sur le Web) des questions de l'examen du DOCM 2014 ni de vos solutions pendant au moins 24 heures.



Format de l'examen

Vous disposez de 2 heures et 30 minutes pour faire le DOCM. L'examen compte trois sections:

- PARTIE A:** Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.
- PARTIE B:** Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.
- PARTIE C:** Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune. Il faut montrer tout son travail. On peut accorder des notes partielles.

Les diagrammes ne sont pas à l'échelle; ils sont fournis à titre informatif seulement.

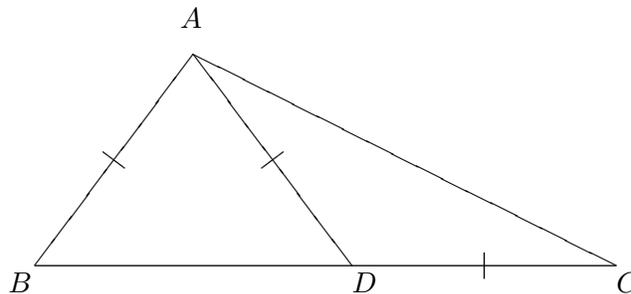
Démarches et réponses

Toutes vos démarches et vos réponses doivent être présentées dans ce cahier, dans les cases réservées à cet effet; n'ajoutez pas de feuilles supplémentaires. Des points seront accordés pour les solutions complètes et pour la clarté. Dans les parties A et B, vous n'êtes pas obligé de présenter votre démarche pour obtenir tous vos points. Toutefois, si votre réponse ou votre solution n'est pas bonne, vous pourriez tout de même obtenir une partie des points pour les démarches notées dans le cahier. Dans la partie C, vous devez **démontrer** votre démarche et fournir la bonne réponse ou solution pour obtenir tous les points.

Veuillez exprimer tous vos calculs et fournir vos réponses en nombres exacts comme 4π , $2 + \sqrt{7}$, etc., plutôt que sous la forme 12,566, 4,646, etc. Les noms de tous les gagnants seront publiés sur le site web de la Société mathématique du Canada <https://cms.math.ca/Concours/DOCM>.

Partie A: Question 1 (4 points)

Dans le triangle ABC , D est un point sur le côté BC tel que $BA = AD = DC$. Sachant que $\angle BAD = 80^\circ$, déterminez la valeur de $\angle ACB$.



Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie A: Question 2 (4 points)

Les équations $x^2 - a = 0$ et $3x^4 - 48 = 0$ ont les mêmes solutions réelles. Quelle est la valeur de a ?

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie A: Question 3 (4 points)

Un entier positif m est tel que lorsqu'il est multiplié par 12, le résultat est un nombre n à quatre chiffres de la forme $20A2$ pour un certain chiffre A . Quel est le nombre à quatre chiffres n ?

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie A: Question 4 (4 points)

Ariane, Béatrice, Céline et Doris ont joué 6 parties de tennis ensemble. À chaque partie, les quatre amies se sont séparées en deux équipes de deux joueuses et une des deux équipes a gagné la partie. Si Ariane était dans l'équipe gagnante lors de 5 parties, Béatrice lors de 2 parties et Céline lors d'une partie, dans combien de parties Doris a-t-elle fait partie de l'équipe gagnante?

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 1 (6 points)

L'aire du cercle qui passe par les points $(1, 1)$, $(1, 7)$, et $(9, 1)$ est exprimée par $k\pi$. Quelle est la valeur de k ?

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 2 (6 points)

Trouvez toutes les valeurs entières de n pour lesquelles $n^2 + 6n + 24$ est un carré parfait.

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 3 (6 points)

5 «X» et 4 «O» sont disposés dans la grille ci-dessous de façon à ce que chaque nombre soit couvert par un symbole. Il y a 126 façons différentes de disposer les symboles dans la grille. De ces 126 configurations, combien contiennent une ligne de 3 «O» et aucune ligne de 3 «X»?

Une ligne de 3 symboles peut être une ligne horizontale, une ligne verticale ou une diagonale:
1 – 5 – 9 ou 7 – 5 – 3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie B: Question 4 (6 points)

Soit $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$. Trouvez le plus petit entier positif n tel que

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) > \frac{503}{2014}.$$

Votre Solution:

Votre réponse finale:

Partie C: Question 1 (10 points)

Une suite de la forme $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ est appelée *géométrique* si $t_1 = a$, $t_2 = ar$, $t_3 = ar^2$, \dots , $t_n = ar^{n-1}$. Par exemple, $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ et $\{1, -3, 9, -27\}$ sont deux suites géométriques. Pour chacune des trois questions suivantes, on suppose que $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ est une suite géométrique de nombres réels.

- (a) Si $t_1 = 3$ et $t_2 = 6$, déterminez la valeur de t_5 .
- (b) Si $t_2 = 2$ et $t_4 = 8$, déterminez toutes les valeurs possibles pour t_5 .
- (c) Si $t_1 = 32$ et $t_5 = 2$, déterminez toutes les valeurs possibles pour t_4 .

Votre Solution:

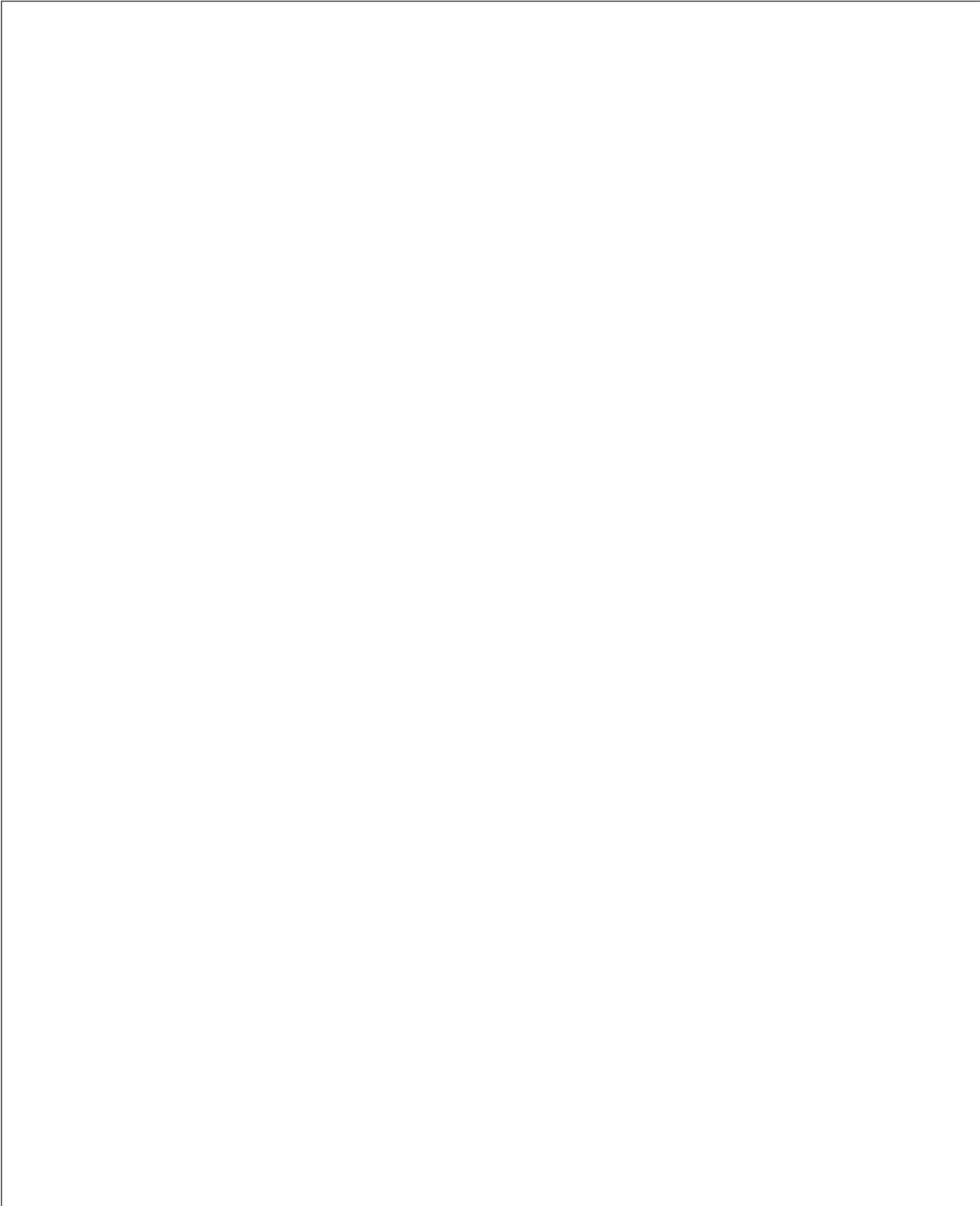


Partie C: Question 2 (10 points)

La droite L décrite par l'équation $5y + (2m - 4)x - 10m = 0$ dans le plan xy croise le rectangle de sommets $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(10, 6)$, $C(10, 0)$ en D sur le segment OA et en E sur le segment BC .

- (a) Montrez que $1 \leq m \leq 3$.
- (b) Montrez que l'aire du quadrilatère $ADEB$ vaut $\frac{1}{3}$ de l'aire du rectangle $OABC$.
- (c) Déterminez, en fonction de m , l'équation de la droite parallèle à L qui croise OA en F et BC en G de façon à ce que les quadrilatères $ADEB$, $DEGF$ et $FGCO$ aient tous la même aire.

Votre Solution:

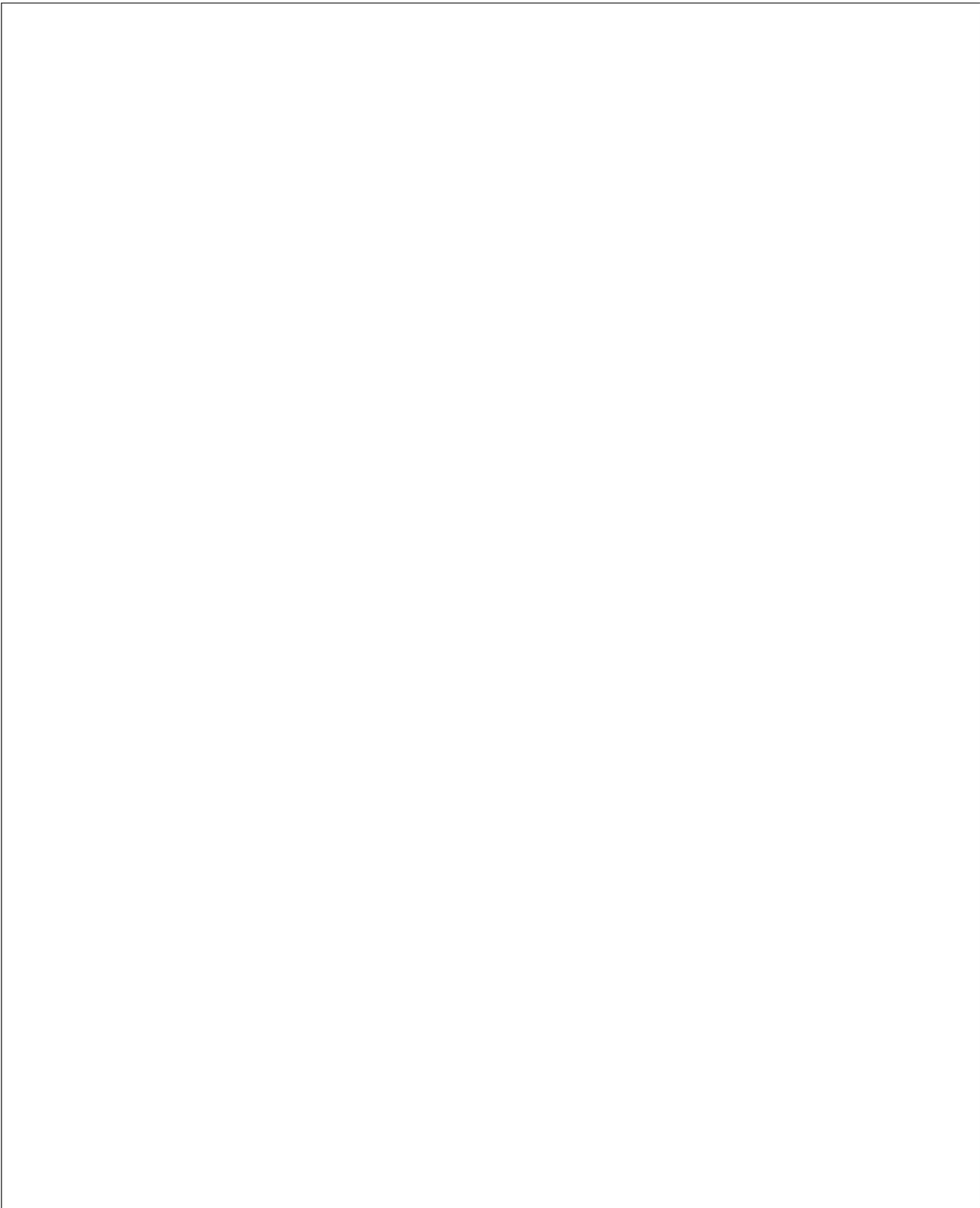


Partie C: Question 3 (10 points)

Le club mathématique d'une école compte 12 étudiants. Chaque semaine, 6 des 12 étudiants font une sortie éducative.

- (a) Jean, un des étudiants du club, a fait une sortie avec chaque autre étudiant du club. Au minimum, combien de sorties Jean a-t-il fait?
- (b) Si chaque paire d'étudiants du club a fait au moins une sortie ensemble, combien de sorties ont eu lieu au minimum?

Votre Solution:



Partie C: Question 4 (10 points)

Un polynôme $f(x)$ à coefficients réels est appelé *somme de carrés* s'il existe des polynômes $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ à coefficients réels pour lesquels

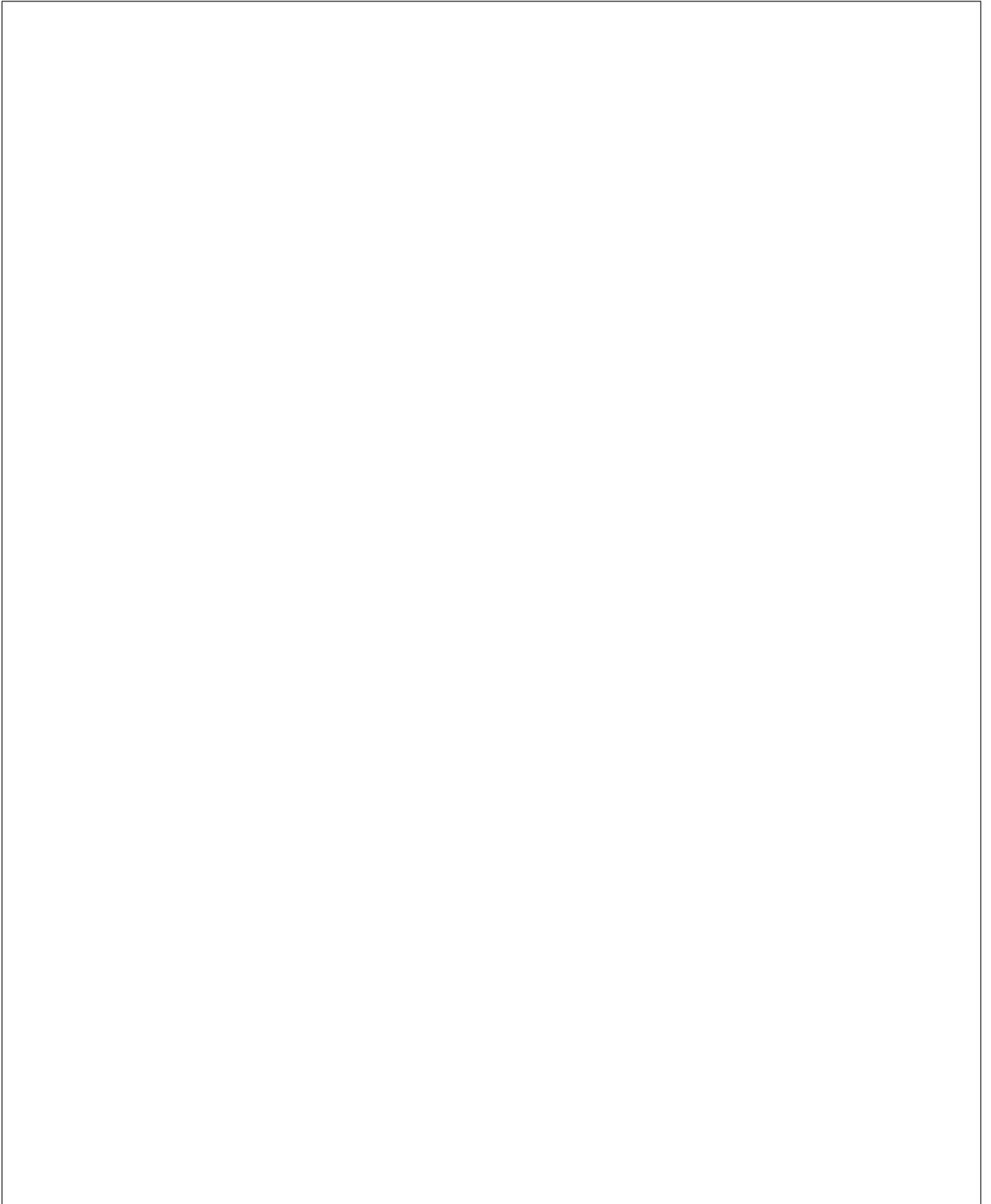
$$f(x) = p_1^2(x) + p_2^2(x) + \dots + p_n^2(x)$$

Par exemple, $2x^4 + 6x^2 - 4x + 5$ est une somme de carrés puisque

$$2x^4 + 6x^2 - 4x + 5 = (x^2)^2 + (x^2 + 1)^2 + (2x - 1)^2 + (\sqrt{3})^2$$

- (a) Trouvez toutes les valeurs de a pour lesquelles $f(x) = x^2 + 4x + a$ est une somme de carrés.
- (b) Trouvez toutes les valeurs de a pour lesquelles $f(x) = x^4 + 2x^3 + (a - 7)x^2 + (4 - 2a)x + a$ est une somme de carrés. Pour chacune de ces valeurs, écrivez $f(x)$ comme une somme de carrés.
- (c) Supposons que $f(x)$ est une somme de carrés. Montrez qu'il existe des polynômes $u(x), v(x)$ à coefficients réels tels que $f(x) = u^2(x) + v^2(x)$.

Votre Solution:





Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

Financière 
Sun Life

Défi ouvert canadien de mathématiques



**UNIVERSITY OF
TORONTO**



**UNIVERSITY OF
CALGARY**



**DALHOUSIE
UNIVERSITY**



UPEI
UNIVERSITY
of Prince Edward
ISLAND



uOttawa



**UNIVERSITY
OF MANITOBA**



**UNIVERSITY OF
SASKATCHEWAN**



**Carleton
UNIVERSITY**

