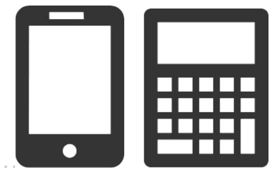
Le Défi ouvert canadien de mathématiques
Financière Sun Life
6-7 novembre 2013

INSTRUCTIONS - ÉLÈVES

Instructions générales



Les calculatrices et les téléphones cellulaires sont INTERDITS.

1) N'ouvrez pas le cahier d'examen avant de recevoir l'autorisation de l'enseignant surveillant.

2) **Prenez les cinq premières minutes pour remplir la page de garde.** Remplissez tous les champs et écrivez lisiblement.

3) Lorsque vous aurez terminé l'examen et l'aurez remis à l'enseignant surveillant, vous pourrez quitter la salle.

4) Vous ne devez pas discuter publiquement (ni clavarder sur le Web) des questions de l'examen du DOCM 2013 ni de vos solutions pendant au moins 24 heures.

Format de l'examen

Vous aurez 2 h 30 pour répondre aux questions du DOCM, qui se divise en trois parties :

PARTIE A : 4 questions de base valant 4 points chacune;

PARTIE B : 4 questions intermédiaires valant 6 points chacune;

PARTIE C : 4 questions de niveau avancé valant 10 points chacune.

Les diagrammes ne sont pas à l'échelle; ils sont fournis à titre informatif seulement.

Démarches et réponses

Toutes vos démarches et vos réponses doivent être présentées dans ce cahier, dans les cases fournies; n'ajoutez pas de feuilles supplémentaires. Des points seront accordés pour les solutions complètes et pour la clarté. Dans les parties A et B, vous n'êtes pas obligé de présenter votre démarche pour obtenir tous vos points. Toutefois, si votre réponse ou votre solution n'est pas bonne, vous pourriez tout de même obtenir une partie des points pour les démarches notées dans le cahier. Dans la partie C, vous devez présenter votre démarche et fournir la bonne réponse ou solution pour obtenir tous les points.

Veuillez exprimer tous vos calculs et fournir vos réponses en nombres exacts comme 4π, $2 + \sqrt{7}$, etc. plutôt que sous la forme 12,566, 4,646, etc.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life 2013

Veuillez écrire clairement en lettres moulées et **fournir toute l'information requise ci-dessous.** *Votre examen pourrait être rejeté si vous n'écrivez pas clairement en lettres moulées ou ne fournissez pas toute l'information requise. Cet examen ne sera pas jugé valide à moins qu'il soit accompagné du formulaire signé de votre superviseur d'examen.*

Prenom :

Nom de famille :

Êtes-vous actuellement un élève/étudiant à temps plein dans une école primaire ou secondaire ou un Cégep ou obtenez-vous votre enseignement à domicile par vos parents, et ce, depuis le 15 septembre de cette année?

☐ Oui ☐ Non

Êtes-vous citoyen canadien ou résident permanent du Canada (quelle que soit votre adresse actuelle)?

☐ Oui ☐ Non

Année scolaire :

☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ Cégep

Autre : ________

Grandeur du t-shirt :

☐ TP ☐ P ☐ M ☐ G ☐ TG ☐ TTG

Date de naissance :

a a a a m m j j

Sexe : (facultatif)

☐ Homme ☐ Femme

Courriel :

Signature : ______________________________

N'écrivez pas dans ces cases :

A1	A2	A3	A4

B1	B2	B3	B4

C1	C2	C3	C4

TOTAL

________ Initiales de la personne qui attribue les points ________ Initiales de la personne qui saisit les données

Partie A : Question 1 (4 points)

Trouvez l'entier positif n qui satisfait l'équation suivante:

$$\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} = \frac{n}{2^{10}}.$$

Votre solution :

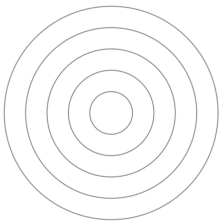
Partie A : Question 2 (4 points)

Trouvez l'entier *positif* k pour lequel la parabole d'équation $y = x^2 - 6$ passe par le point (k, k).

Votre solution :

Partie A : Question 3 (4 points)

Dans la figure suivante, les cercles ont un rayon de 1, 2, 3, 4, et 5. L'aire totale des points contenus dans un nombre *impair* de cercles est $m\pi$ où m est un nombre positif. Quelle est la valeur de m?



Votre solution :

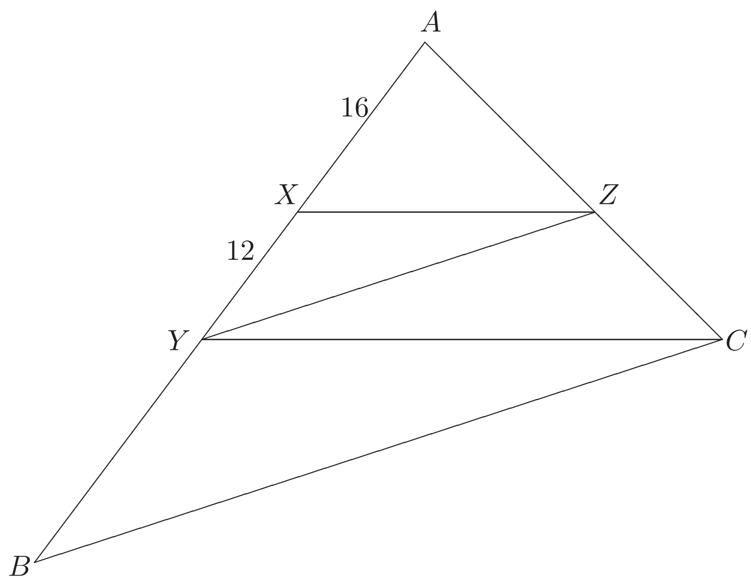
Partie A : Question 4 (4 points)

Un nombre entier positif est dit bi-chiffré s'il s'écrit avec deux chiffres différents et que chacun est utilisé deux fois. Par exemple, 1331 est bi-chiffré tandis que 1113, 1111, 1333 et 303 ne le sont pas. Trouvez le nombre total d'entiers positifs bi-chiffrés.

Votre solution :

Partie B: Question 1 (6 points)

Étant donné un triangle ABC, X et Y des points sur le côté AB tel que X est plus près de A que Y et Z un point sur le côté AC tel que XZ est parallèle à YC et YZ est parallèle à BC. Si $AX = 16$ et $XY = 12$, trouvez la longueur du segment YB.



Votre solution :

Partie B: Question 2 (6 points)

Il y a un unique triplet d'entiers strictement positifs (a, b, c) tel que $a \leq b \leq c$ et

$$\frac{25}{84} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc}.$$

Trouvez la valeur de $a + b + c$.

Votre solution :

Partie B: Question 3 (6 points)

Les équipes A et B jouent au soccer jusqu'à ce que 29 buts soient comptés. Pendant la partie, le pointage est affiché sur un tableau à l'aide de deux nombres: le nombre de buts comptés par l'équipe A et le nombre de buts comptés par l'équipe B. Un adepte de mathématiques et de soccer a remarqué qu'à plus d'une reprise dans la partie, la somme des chiffres écrits sur le tableau était de 10 (un score de 12 : 7 serait un exemple d'une telle somme). À combien de reprises au maximum cette situation a-t-elle pu survenir dans la partie ?

Votre solution :

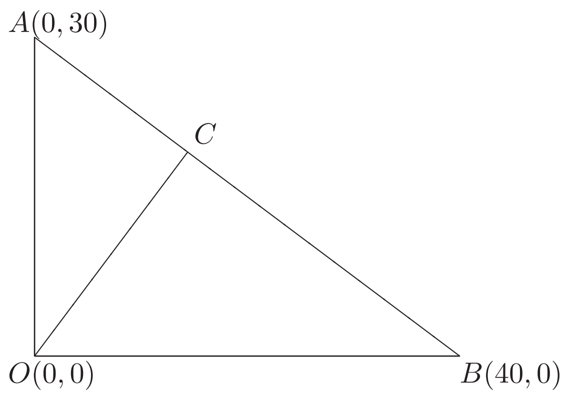
Partie B: Question 4 (6 points)

Soit a la plus grande valeur réelle de x pour laquelle $x^3 - 8x^2 - 2x + 3 = 0$. Trouvez l'entier le plus près de a^2.

Votre solution :

Partie C: Question 1 (10 points)

Dans l'image suivante, $\triangle AOB$ est un triangle avec coordonnées $O = (0,0)$, $A = (0,30)$ et $B = (40,0)$. Soit C le point sur le segment AB pour lequel OC est perpendiculaire à AB.



(a) Trouvez la longueur de OC.

(b) Trouvez les coordonnées du point C.

(c) Soit M le centre du cercle passant par O, A et B. Trouvez la longueur de CM.

Votre solution :

Partie C: Question 2 (10 points)

(a) Trouvez toutes les solutions réelles à l'équation $a^2 + 10 = a + 10^2$.

(b) Trouvez deux nombres réels strictement positifs $a, b > 0$ tel que $a \neq b$ et $a^2 + b = b^2 + a$.

(c) Trouvez tous les triplets de nombres réels (a, b, c) tel que $a^2 + b^2 + c = b^2 + c^2 + a = c^2 + a^2 + b$.

Votre solution :

Partie C: Question 3 (10 points)

Alphonse et Bernard jouent au jeu suivant. Deux entiers strictement positifs m et n sont écrits sur un tableau. À chaque tour, un joueur choisit un nombre sur le tableau, l'efface et le remplace par n'importe lequel de ses diviseurs à l'exception des diviseurs qui sont déjà apparu sur le tableau depuis le début de la partie . Par exemple, si 10 et 17 sont écrits sur le tableau, un joueur peut effacer le 10 et le remplacer par un 2. Le premier joueur qui ne peut plus modifier le tableau à son tour perd la partie. C'est Alphonse qui débute la partie.

(a) Supposons que $m = 2^{40}$ et $n = 3^{51}$. Quel joueur est toujours capable de remporter la partie? Expliquez sa stratégie gagnante.

(b) Supposons que $m = 2^{40}$ et $n = 2^{51}$. Quel joueur est toujours capable de remporter la partie? Expliquez sa stratégie gagnante.

Votre solution :

Partie C: Question 4 (10 points)

Pour tout nombre réel x, on définit $[x]$ comme le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $[5] = 5$, $[7,9] = 7$ et $[-2,4] = -3$. Une *progression arithmétique* de longueur k est une séquence $a_1, a_2, ..., a_k$ avec la propriété qu'il existe un nombre réel b tel que $a_{i+1} - a_i = b$ pour toute valeur de $1 \leq i \leq k - 1$.

Soit $\alpha > 2$ un nombre irrationnel. Alors $S = \{[n \cdot \alpha] : n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des entiers qui peuvent être écrits comme $[n \cdot \alpha]$ pour un certain entier n..

(a) Montrez que pour tout entier $m \geq 3$, il existe m nombres distincts dans S qui ensemble forment une progression arithmétique de longueur m.

(b) Montrez qu'il n'y a aucune progression arithmétique de longueur infinie dans S.

Votre solution :

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

Financière Sun Life

Défi ouvert canadien de mathématiques