Solutions officielles du COMC 2012

par Adrian Tang (adrian.l.tang@gmail.com)

A1 Trouvez l'entier positif n such tel que $8^4 = 4^n$.

Solution: La réponse est $n = 6$.

Solution 1: Remarquons que $8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} = 4^6$. Ainsi, $n = 6$. $\square$

Solution 2: Écrivons 8^4 et 4^n comme exposants en base 2.

$$\begin{array}{lcl} 8^4 & = & 4^n \\ (2^3)^4 & = & (2^2)^n \\ 2^{12} & = & 2^{2n} \end{array}$$

Ainsi, $2n = 12$. Alors, $n = 6$. $\square$

Solution 3: Remarquons que $8^4 = (8^2)^2 = 64^2 = 4096$. Alors, $4^n = 4096$. Nous vérifions chaque entier positif n en partant de 1.

n	4^n
1	4
2	16
3	64
4	256
5	1024
6	4096

Tous les entiers positifs $n > 6$ nous donnent une valeur de 4^n supérieure à 4096. Ainsi, $n = 6$. $\square$

A2 Soit x, la *moyenne* des six nombres suivants: $\{12, 412, 812, 1212, 1612, 2012\}$. Trouver la valeur de x x.

Solution: La réponse est $x = 1012$.

Solution 1: La somme du premier et du sixième terme est 2024. La somme du deuxième et du cinquième terme est 2024 et la somme du troisième et du quatrième terme est 2024. Ainsi, la somme des six termes est 2024×3. La moyenne des six termes est donc

$$\frac{2024 \times 3}{6} = \frac{2024}{2} = 1012. \quad \square$$

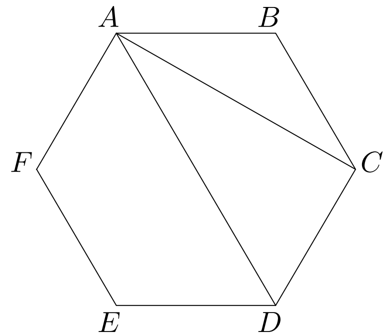
Solution 2: La moyenne des six nombres est

$$\frac{12 + 412 + 812 + 1212 + 1612 + 2012}{6}$$
$$= \frac{0 + 400 + 800 + 1200 + 1600 + 2000}{6} + \frac{12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12}{6}$$
$$= \frac{100(4 + 8 + 12 + 16 + 20)}{6} + 12 = \frac{100 \times 60}{6} + 12 = 1000 + 12 = 1012. \quad \square$$

Solution 3: Remarquons que c'est une séquence arithmétique.[1] Ainsi, la moyenne des six nombres est la moyenne entre le troisième et le quatrième terme, soit le point milieu entre 812 et 1212. La réponse est donc 1012. $\square$

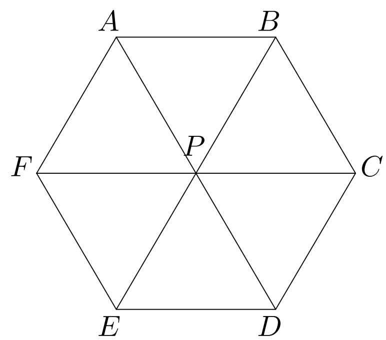
[1]Une séquence est dite arithmétique si deux termes consécutifs de la séquence ont toujours la même différence.

A3 Soit $ABCDEF$ un hexagone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles sont égaux. L'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est exactement r fois l'aire du triangle ACD. Trouvez la valeur de r.



Solution 1: La réponse est $r = 3$.

Séparer l'hexagone en six régions comme exécuté plus bas avec le point central P.



Ceci est possible puisque l'hexagone est régulier. Par symétrie, on remarque que $PA = PB = PC = PD = PE = PF$ et que les six angles intérieurs autour de P sont égaux. Comme la somme de la mesure des six angles intérieurs autour de P est $360°$,

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPE = \angle EPF = \angle FPA = 60°.$$

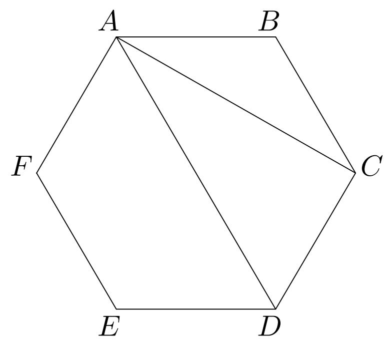
Ainsi, les six triangles $\Delta PAB, \Delta PBC, \Delta PCD, \Delta PDE, \Delta PEF, \Delta PFA$ sont tous équilatéraux et de même aire. Soit K l'aire d'un de ces triangles. L'hexagone doit avoir une aire totale de $6K$.

Remarquons que l'aire de ΔACD est égale à l'aire de ΔPCD additionnée à l'aire de ΔPAC. Comme $\Delta PAB, \Delta PBC$ sont tous deux équilatéraux, $PA = AB$ et $PC = CB$. Ainsi, les triangles ΔBAC et ΔPAC sont congrus et ont donc la même aire. Remarquons que l'aire de ΔPAC additionnée à l'aire ΔBAC est la somme des aires des triangles équilatéraux ΔPAB et ΔPBC, qui est $2K$. Ainsi, ΔPAC a une aire de K. Nous avions déjà trouvé que l'aire de

ΔACD est égale à l'aire de ΔPCD plus celle de ΔPAC. Cette quantité est $K + K = 2K$. Donc l'aire de $ABCDEF$ est $6K/2K = 3$ fois l'aire de ΔACD. La réponse est 3. $\square$

Solution 2: Divisons l'hexagone en six régions et définissons K comme dans la Solution 1. Remarquons que ΔAPC et ΔDPC ont une hauteur commune, celle allant de C à AD. Puisque $PA = PD$, ΔAPC et ΔDPC ont la même aire, K. Ainsi, l'aire de ΔACD est la somme des aires de ΔAPC et de ΔDPC, ce qui donne $K + K = 2K$. De plus le ratio de l'aire de $ABCDEF$ sur l'aire de ΔACD est $6K/2K = 3$. $\square$

Solution 3: La somme des angles d'un hexagone est $180° \times (6 - 2) = 720°$. Ainsi, $\angle ABC = 120°$. Puisque $BA = BC$, $\angle BAC = \angle BCA$. Ensuite, puisque la somme des angles de ΔABC est $180°$ et $\angle ABC = 120°$, $\angle BAC = \angle BCA = 30°$. Puisque $\angle BCA = 30°$ et $\angle BCD = 120°$, $\angle ACD = 90°$.



Supposons que chaque côté de l'hexaone a une longueur de 1. Nous trouvons maintenant la longueur de AC afin de déterminer l'aire de ΔACD. Par la loi des cosinus,

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = 2 - 2 \cdot (-1/2) = 3.$$

Ainsi, $AC = \sqrt{3}$. De plus, l'aire de ΔACD de $1/2 \cdot CD \cdot CA = 1/2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}/2$.

Nous calculons l'aire de l'hexagone. Comme dans la Solution 1, l'hexaone est constitué de six triangles équilatéraux de côté 1. L'aire de chacun de ces triangles équilatéraux est $\sqrt{3}/4$. Ainsi, l'aire de l'hexagone est $6 \cdot \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/2$. Le ratio de l'aire de l'hexagone sur l'aire de ΔACD est

$$\frac{3\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = 3.$$

La réponse est donc 3. $\square$

Solution 4: Comme dans la Solution 3, supposons que chaque côté de l'hexagone est de longueur 1. Alors l'aire de ΔACD de $\sqrt{3}/2$. Remarquons que l'aire de ΔABC est

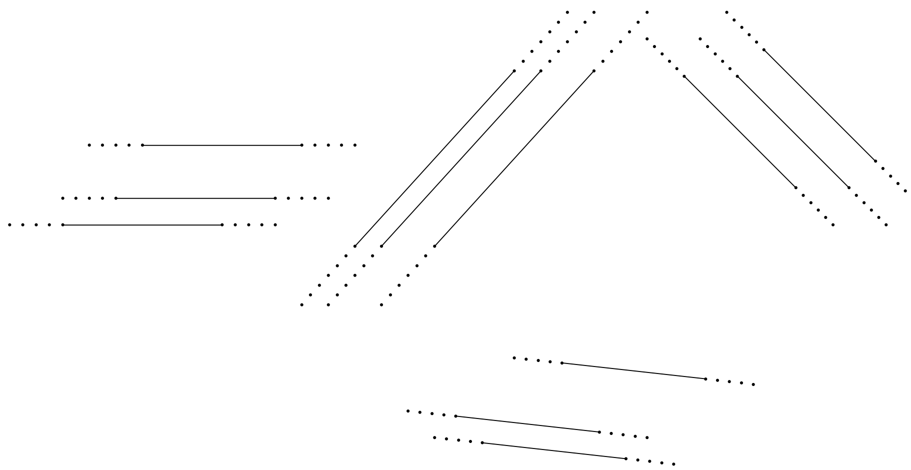
$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ainsi, ΔACD a une aire du double de ΔABC et donc ΔACD a $2/3$ de l'aire du quadrilatère $ABCD$. Mais la droite AD sépare l'hexagone $ABCDEF$ en deux. Donc ΔACD est $1/3$ de l'aire de l'hexagone complet. Ainsi, le ratio de l'aire de l'hexagone sur l'aire de ΔACD est 3. $\square$

Solution 5: On suit la Solution 4 mais on propose une différente façon de montrer que l'aire de ΔACD est le double de celle de ΔABC. Remarquons que ces deux triangles ont une hauteur commune de base respectivement AD et BC. Comme AD a le double de la longueur de BC, ΔACD a le double de l'aire de ΔABC. Donc comme dans la Solution 4, on peut conclure que le ratio de l'aire de l'hexagone sur l'aire de ΔACD est 3. $\square$

Solution 6: On trace le segment DF. L'hexagone est maintenant divisé en quatre triangles. Par symétrie ΔACD et ΔAFB sont congrus, tout comme ΔABC et ΔDEF. On remarque que $AD||BC$ et $FC||BF$. Soit P le point de rencontre de AD et FC. Alors ΔAPC et ΔABC sont congrus (parallélogramme coupé par une diagonale). ΔAPC a la maoitié de la hauteur de ΔABC par rapport à la base ΔAC (par symétrie) donc $[ACD] = 2[ABC]$, où $[\cdots]$ désigne l'aire. De la même façon, $[AFD] = 2[ABC]$ Ainsi, l'aire de l'hexagone est $[ACD] + [ADF] + [ABC] + [DEF] = 6[ABC] = 3[ACD]$. La réponse est donc 3. $\square$

A4 Douze droites distinctes sont tracées dans un plan cartésien de façon à ce que chacune de ces droites soit parallèle à exactement deux autres droites. De plus, aucun ensemble de trois droites ne s'intersectent en un point commun. Déterminer le nombre total d'intersections entre les douze droites.



Solution: La réponse est 54.

Solution 1: Comme aucun point ne se trouve sur plus de trois lignes, le nombres de points d'intersection est égal au nombre de paires de droites qui s'intersectent. Le nombre total de paires de droites est $12 \times 11/2 = 6 \times 11 = 66$. Chaque droite est parallèle à deux autres. Ainsi, chaque droite fait partie de deux paires de droites qui ne s'intersectent pas. Puisqu'il y a douze droites, il y a $12 \times 2/2 = 12$ paires de droites qui ne s'intersectent pas. Donc il y a $66 - 12 = 54$ paires de droites qui s'intersectent. Ainsi, la réponse est 54. $\square$

Solution 2: Comme chaque droite est parallèle à exactement deux autres droites, chacune des droites n'est pas parallèle à neuf autres droites. Ainsi, chaque droite croise neuf autres droites.

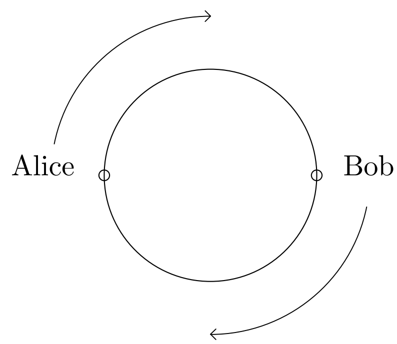
Comme aucun point ne se trouve sur plus de deux droites, chaque point d'interection se trouve sur exactement 2 droites. En utilisant ces deux oservations, on déduit que le nombre total de points d'intersection est

$$\frac{12 \times 9}{2} = 54. \quad \square$$

Solution 3: On remarque que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente. On considère l'ensemble des pentes des douze droites; comme chacune est parallèle à exactement deux autres, chaque pente correspond à trois droites parmi les douze. Ainsi, il y a quatre pente différentes parmi les douze droites.

Comme chaque pente représente trois droites, chaque paire de pentes donne lieu à $3 \times 3 = 9$ points d'intersection. Il y a quatre pentes distinctes. Donc le nombre de paires de pentes distinctes est $4 \times 3/2 = 6$. Puisque trois droites n'ont aucun point de croisement commun, le nombre de points d'intersection est $9 \times 6 = 54$. $\square$

B1 Alice et Bob courent autour d'une piste circulaire dans le sens des aiguilles d'une montre, chacun à une vitesse constante. Alice peut compléter un tour en t secondes tandis que Bob peut faire de même en 60 secondes. Les deux commencent en des des points opposés de la piste.



Quand ils se rencontrent pour la première fois, Alice a complété 30 tours. Trouver toutes les valeurs possibles pour t.

Solution: La réponse est $t = 59$ or $t = 61$.

Comme Alice a fait exactement 30 tours, Bob rencontre Alice au point où Alice a commencé à courir. Comme Bob a commencé à l'opposé d'Alice, Bob a couru $n + \frac{1}{2}$ tours pour un entier positif n. Puisque Alice et Bob se rencontrent pour la première fois après que Alice ait couru 30 tours, le nombre de tours qu'Alice et Bob ont couru ne peut différer de plus de 1. Ainsi, Bob a couru soit 29.5 ou 30.5 tours.

On remarque qu'Alice et Bob ont couru pendant la même période de temps. De plus, le nombre de secondes que chacun a couru est égal au nombre de tours que chacun a fait multiplié au nombre de secondes nécessaires pour compléter un tour.

Si Bob a couru 29.5 tours, alors $30t = 29.5 \times 60$. Alors, $t = 29.5 \times 2 = 59$.

Si Bob a couru 30.5 tours, alors $30t = 30.5 \times 60$. Alors, $t = 30.5 \times 2 = 61$.

Ainsi, $t = 59$ ou $t = 61$. $\square$

B2 Pour chaque entier positif n, définissons $\varphi(n)$ comme le nombre d'entiers positifs divisant n. Par exemple, $\varphi(10) = 4$, puisque 10 a 4 diviseurs positifs, soit $\{1, 2, 5, 10\}$.

Soit n un entier positif tel que $\varphi(2n) = 6$. Trouver la valeur minimale possible pour $\varphi(6n)$.

Solution: La réponse est 8.

Solution 1: Rappelons-nous que si entier positif m se factorise en produit de nombres premiers $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\dots p_t^{e_t}$, où $p_1, \dots, p_t$ sont des premiers distincts, alors le nombre de diviseurs positifs de m est $\varphi(m) = (e_1+1)(e_2+1)\dots(e_t+1)$ (*). On remarque que chaque terme dans le produit est au moins 2.

Puisque $2n$ est un nombre entier positif et pair avec 6 diviseurs positifs, $2n = 2^5, 2^2\cdot p$ ou $2\cdot p^2$, où p est un nombre premier impair. Ainsi, $n = 2^4 = 16, 2p$ ou p^2. Donc, $6n = 6\times 16 = 96, 12p$ or $6p^2$.

On remarque que $\varphi(96) = \varphi(2^5 \times 3^1) = 6 \times 2 = 12$.

Si $p = 3$, alors $\varphi(12p) = \varphi(36) = \varphi(2^2 \times 3^2) = 3 \times 3 = 9$ et $\varphi(6p^2) = \varphi(54) = \varphi(2^1 \times 3^3) = 2 \times 4 = 8$.

Il reste à montrer le cas $p > 3$. Jusqu'à maintenant, la valeur minimale obtenue est $\varphi(6n) = 8$. Si $p > 3$, alors $6n$ possède au moins 3 différents diviseurs premiers. Donc par (*), le nombre de diviseurs positifs de $6n$ est au moins $2 \times 2 \times 2 = 8$. Ainsi, $\varphi(6n) \geq 8$ pour tous les entiers positifs n. Comme nous l'avons déjà montré, $n = 9$ mène à $\varphi(6n) = 8$. La réponse est donc 8. $\square$

Solution 2: On remarque que quatre diviseurs premiers de $2n$ sont $1, 2, n$ and $2n$. On remarque aussi que $n = 2$ ne satisfait pas $\varphi(2n) = 6$. Ainsi, $n \geq 2$ et donc, $1, 2, n$ et $2n$ sont tous distincts.

Comme $2n$ a 6 diviseurs positifs, il y a deux autres diviseurs a, b de $2, n$, avec $a, b > 2$. Donc l'ensemble des diviseurs positifs de $2n$ est $\{1, 2, a, b, n, 2n\}$.

On s'intéresse maintenant aux diviseurs positifs de $6n$. Remarquons que ceux-ci $6n$ contiennent les diviseurs positifs de $2n$. De plus, remarquons que $3n$ et $6n$ sont des diviseurs positifs de $6n$ qui ne sont pas des diviseurs de $2n$. Ainsi, l'ensemble de diviseurs positifs de $6n$ contient $\{1, 2, a, b, n, 2n, 3n, 6n\}$. Donc, $\varphi(6n) \geq 8$.

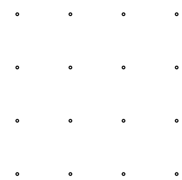
Nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir ce minimum. Comme $\{1, 2, a, b, n, 2n, 3n, 6n\}$ sont des diviseurs positifs de $6n$ apparaîssant en ordre croissant, $a \cdot 2n = 6n$ et $bn = 6n$. En multipliant les deux équations et en divisant de chaque côté par $2n^2$ on obtient $ab = 18$. Mais puisque $\{1, 2, a, b, n, 2n\}$ sont les diviseurs positifs de $2n$, $ab = 2n$. Ainsi, $2n = 18$, ce qui nous permet de conclure que $n = 9$ est un candidat pour obtenir $\varphi(2n) = 6$ et $\varphi(6n) = 8$.

Ceci peut être facilement vérifié puisque les diviseurs positifs de 18 sont $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. De plus, les diviseurs positifs de 54 sont $\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$, $\varphi(54) = 8$. $\square$

B3 Étant donnée la grille de points 4 par 4 suivante, trouver le nombre de façons possibles d'étiquetter les 10 sommets $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ tel que la longueur des 9 segments

$$AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ$$

est en ordre strictement croissant.



Solution: La réponse est 24.

Pour commencer, nous trouvons les longueurs possibles de segments. Par le théorème de Pythagore, les différentes longueurs sont $\sqrt{0^2+1^2} = 1$, $\sqrt{0^2+2^2} = 2$, $\sqrt{0^2+3^2} = 3$, $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$, $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$, $\sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$. Ces deux longeurs sont toutes différentes. Ainsi, toutes ces longueurs doivent faire partie de la suite $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ$. De plus, ces 9 longueurs en ordre croissant sont:

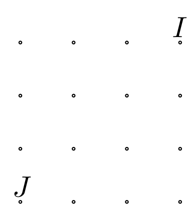
$$\sqrt{0^2+1^2} < \sqrt{1^2+1^2} < \sqrt{0^2+2^2} < \sqrt{1^2+2^2} < \sqrt{2^2+2^2}$$
$$< \sqrt{0^2+3^2} < \sqrt{1^2+3^2} < \sqrt{2^2+3^2} < \sqrt{3^2+3^2}.$$

La plus grande longueur doit être un segment qui relie 2 coins opposés.

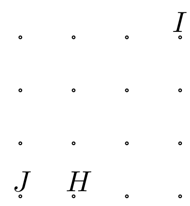
Nous trouverons les dix points dans l'ordre suivant: $J, I, H, G, F, E, D, C, B, A$.

Par soucis de simplicité, plaçons-nous dans le plan cartésien avec le coin inférieur gauche en $(0, 0)$ et le coin supérieur droit en $(3, 3)$.

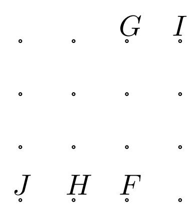
Remarquons que J doit être placé sur un coin de la grille et qu'il y a quatres coins. De plus, I doit être situé sur le coin diamétralement opposé à J. Sans perte de généralité, supposons $J = (0, 0)$. Alors $I = (3, 3)$.



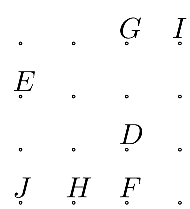
Le point H a la propriété que $HI = \sqrt{3^2+2^2}$, i.e. H est à une distance verticale de trois de I et une distance verticale 2 de I, ou vice versa. Par la symétrie autour de la diagonale JI, il y a deux possibilités pour H, soit $(0,1)$ ou $(1,0)$. Sans perte de généralité, suppososons $H = (1,0)$.



Le segment GH a longueur $\sqrt{3^2+1^2}$. Ainsi, G est soit $(0,3)$ ou $(2,3)$. Mais si $G = (0,3)$ alors F est un point tel que $FG = 3 = \sqrt{0^2+3^2}$. Alors $F = (0,0)$ ou $(3,3)$, qui sont déjà occupés respectivement par J, I. Ainsi, G ne peut être situé en $(0,3)$, et doit être en $(2,3)$. Donc, $F = (2,0)$.



EF a longueur $\sqrt{8} = \sqrt{2^2+2^2}$. Donc, $E = (0,2)$. DE a longueur $\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1^2}$. Ainsi, $D = (2,1)$.



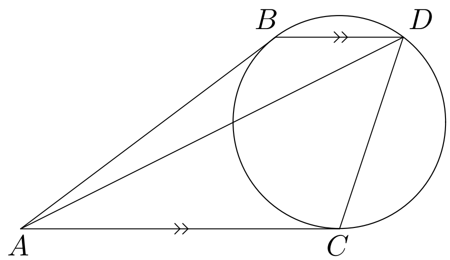
Ainsi $C = (0,1)$ et $B = (1,2)$.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & G & I \\ E & B & \cdot & \cdot \\ C & \cdot & D & \cdot \\ J & H & F & \cdot \end{array}$$

De B, il y a trois points restants A tel que $AB = 1$, soit $(1,1),(1,3),(2,2)$.

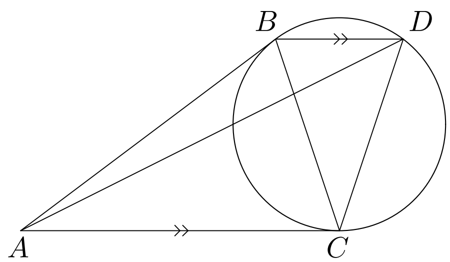
Par notre construction, les points J, H et A étaient les seuls pour lesquels nous avons eu un choix. Chaque autre point était déterminé par notre construction. Il y avait 4 choix pour J, 2 deux choix pour H et 3 choix pour A. Ainsi, le nombre de façons de choisir 10 points qui satisfont la condition est $4 \times 3 \times 2 = 24$. La réponse est 24. $\square$

B4 Dans le diagramme suivant, deux lignes qui se rencontrent à un point A sont tangentes à un cercle en B et C. La parallèle à AC passant par B rencontre le cercle une deuxième fois en D. On ajoute les segments CD et AD. Supposons $AB = 49$ et $CD = 28$. Trouver la longueur de AD.



Solution 1: La réponse est $AD = 63$.

Ajoutons le segment BC. Puisque AB et AC sont tangents au cercle, $AB = AC$. Ainsi, $\angle ABC = \angle ACB$.



De plus, comme BD est parallèle à AC, $\angle ACB = \angle DBC$. Puisque AC est tangente au cercle en C, par le théorème des arcs sous-tendus par des angles inscrits $\angle BDC = \angle ACB$. Ainsi, nous avons les égalités d'angles suivants:

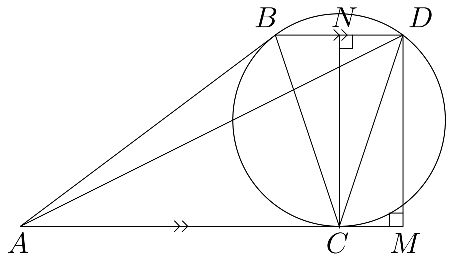
$$\angle ABC = \angle ACB = \angle CBD = \angle CDB.$$

De plus, $AB = AC$ et $CB = CD$. Donc ΔABC est congruent à ΔCBD. Ainsi

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CB}{BD}.$$

Puisque $AB = 49$ et $BC = CD = 28$, $BD = BC^2/AB = 28^2/49 = 4^2 = 16$.

Soit M le pied de la perpendiculaire à AC par D et N le pied de la perpendiculaire de BD par C.



Comme $CB = CD$, N est le point milieu de BD. Puisque BD est parallèle à CM, $NDMC$ est un rectangle. Ainsi, $CM = ND = \frac{1}{2} \cdot BD = 8$. On trouve maintenant la longueur DM.

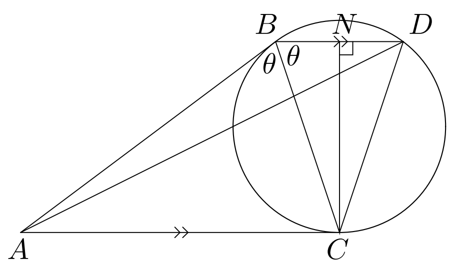
$$DM = NC = \sqrt{DC^2 - DN^2} = \sqrt{28^2 - 8^2} = \sqrt{784 - 64} = \sqrt{720}.$$

Ainsi,

$$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = \sqrt{(AC + CM)^2 + MD^2} = \sqrt{(49+8)^2 + 720} = \sqrt{3969} = 63.$$

Donc la réponse est 63. □

Solution 2: Comme dans la Solution 1, on forme le segment BC et on conclut $BC = 28$ et $BD = 16$. Encore comme dans la Solution 1, $\angle ABC = \angle ACB = \angle CBD = \angle CDB$. Soit θ cet angle.



Soit N le pied de la perpendiculaire à BD par C. Comme dans la Solution 1, N est le point milieu de BD. Ainsi, $BN = 8$. On peut maintenant trouver $\cos\theta$ de ΔCBN, qui est

$$\cos\theta = \frac{BN}{BC} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

(On pourrait ausssi utiliser ΔABC pour trouver $\cos\theta$.) Remarquons que $\angle ABD = 2\theta$. On utilise maintenant la loi des cosinus sur ΔABD pour trouver AD. Par cette loi, on trouve

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 - BA \cdot BD \cdot \cos(2\theta).$$

On trouve tout d'abord $\cos(2\theta)$ par la formule de multiplication:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \cdot (2/7)^2 - 1 = -41/49.$$

Ainsi,

$$AD^2 = 49^2 + 16^2 - 2(49)(16)(-41/49) = 2401 + 256 + 2 \cdot 16 \cdot 41 = 3969.$$

Donc $AD = \sqrt{3969} = 63$. $\Box$

Solution 3: Soit θ défini comme dans la Solution 2. Comme montré dans la Solution 2, $\cos\theta = 2/7$. Remarquons maintenant que

$$\angle BCD = 180 - \angle CBD - \angle CDB = 180 - 2\theta.$$

Ainsi, $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \theta + (180 - 2\theta) = 180 - \theta$. On applique maintenant la loi des cosinus à ΔACD.

$$AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2 \cdot CA \cdot CD \cdot \cos\angle ACD = 49^2 + 28^2 - 2 \cdot 49 \cdot 28 \cdot \cos(180 - \theta)$$

$$= 2401 + 784 + 2 \cdot 49 \cdot 28 \cdot \cos\theta = 3185 + 2 \cdot 49 \cdot 28 \cdot \frac{2}{7} = 3185 + 4 \cdot 7 \cdot 28 = 3969.$$

Ainsi, $AD = \sqrt{3969} = 63$.

1 Problèmes à solution complète

Partie C

C1 Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x - 8$.

(a) (2 points) Trouver les valeurs de $f(2)$ et $g(f(2))$.

(b) (4 points) Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(g(x)) = g(f(x))$.

(c) (4 points) Soit $h(x) = 3x - r$. Trouver toutes les valeurs de r pour lesquelles $f(h(2)) = h(f(2))$.

Solution:

(a) Les réponses sont $f(2) = 4$ et $g(f(2)) = 4$.

En substituant $x = 2$ dans $f(x)$ on trouve $f(2) = 2^2 = 4$.

En substituant $x = 2$ dans $g(f(x))$ et en remarquant que $f(2) = 4$, on obtient $g(f(2)) = g(4) = 3 \cdot 4 - 8 = 4$. $\square$

(b) Les réponses sont $x = 2$ et $x = 6$.

Remarquons que

$$f(g(x)) = f(3x - 8) = (3x - 8)^2 = 9x^2 - 48x + 64$$

et

$$g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 - 8.$$

Ainsi, nous voulons résoudre

$$9x^2 - 48x + 64 = 3x^2 - 8.$$

Nous réarrangeons les termes en une équation quadratique

$$6x^2 - 48x + 72 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 8x + 12) = 0.$$

Cette équation peut être factorisée: $6(x - 6)(x - 2) = 0$. Ainsi, $x = 2$ ou $x = 6$. On vérifie finalement qu'il s'agit bel et bien de solutions.

Si $x = 2$, alors $f(g(2)) = f(3(2) - 8) = f(-2) = (-2)^2 = 4$ et $g(f(2)) = 4$ par la partie (a). Donc $f(g(2)) = g(f(2))$ et $x = 2$ est une solution.

Si $x = 6$, alors $f(g(6)) = f(3 \cdot 6 - 8) = f(10) = 10^2 = 100$ et $g(f(6)) = g(6^2) = g(36) = 3 \cdot 36 - 8 = 108 - 8 = 100$. Donc $f(g(6)) = g(f(6))$ et $x = 6$ est aussi une solution. $\square$

(c) Les réponses sont $r = 3$ et $r = 8$.

Nous calculons tout d'abord $f(h(2))$ et $h(f(2))$ en terme de r.

$$f(h(2)) = f(3 \cdot 2 - r) = f(6 - r) = (6 - r)^2$$

et

$$h(f(2)) = h(2^2) = h(4) = 3 \cdot 4 - r = 12 - r.$$

Ainsi, $(6 - r)^2 = 12 - r \Rightarrow r^2 - 12r + 36 = 12 - r$. On réarrange le tout pour trouver

$$r^2 - 11r + 24 = 0,$$

qui se factorise comme

$$(r - 8)(r - 3) = 0.$$

Donc $r = 3$ ou $r = 8$. On vérifie finalement qu'il s'agit bel et bien de solutions.

Si $r = 3$, alors $h(x) = 3x - 3$. Ainsi $f(h(2)) = f(3 \cdot 2 - 3) = f(3) = 9$ et $h(f(2)) = h(2^2) = h(4) = 3 \cdot 4 - 3 = 9$. Donc $f(h(2)) = h(f(2))$ et $r = 3$ est une solution. En utilisant la partie (b), on sait déjà que $r = 8$ est une solution. $\square$

C2 On remplit une grille 3×3 avec des 0 et des 1. On compte un point pour chaque rangée, colonne et diagonale dont la somme des entrées est *impaire*.

1	1	0
1	0	1
0	1	1

1	1	1
1	0	1
0	1	1

Par exemple, la grille de gauche vaut 0 points et la grille sur la droite vaut 3 points.

(a) (2 points) Remplissez la grille suivante pour que celle-ci est une valeur d' exactement 1 point. Aucun travail supplémentaire n'est demandé. Plusieurs réponses sont possibles. Une seule est suffisante.

Solution: N'importe quelle grille parmi les suivantes est une solution:

0	0	0
1	1	0
1	1	0

1	1	0
1	1	0
0	0	0

0	1	1
0	1	1
0	0	0

0	0	0
0	1	1
0	1	1

0	1	1
1	1	0
1	0	1

1	0	1
1	1	0
0	1	1

1	0	1
0	1	1
1	1	0

1	1	0
0	1	1
1	0	1

(b) (4 points) Trouvez toutes les grilles qui ont une valeur d' exactement 8 points.

Solution: Remarquons qu'il y a trois lignes, trois colonnes et deux diagonales. Ainsi, chaque ligne, colonne et diagonale doit avoir une somme des entrées impaire.

Nous considérons deux cas; le cas où la case centrale vaut 0 et le cas où la case centrale vaut 1.

Cas 1: Si le nombre central est 0, alors soit A, B, C, D les valeurs des carrés suivants:

A	B	C
	0	D

Comme chaque ligne, colonne et diagonale a une somme impaire, chacun des termes opposés à A, B, C, D doit respectivement avoir une valeur différente de A, B, C, D. Écrivons $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$. On a donc la grille suivante:

A	B	C
$\overline{D}$	0	D
$\overline{C}$	$\overline{B}$	$\overline{A}$

Remarquons que $X + \overline{X} = 1$ pour toute valeur X. Remarquons de plus que $A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ est $1 + 1 + 1 = 3$. Ainsi, soit $A + B + C$ ou $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ est pair. Donc soit la rangée du haut ou la rangée du bas a une valeur paire. Ainsi, il n'y a aucune grille valant 8 points dans ce cas.

Cas 2: Si le nombre central est 1, alors encore une fois soit A, B, C, D la valeur de chacune des cases suivantes.

A	B	C
	1	D

Comme la somme de toutes les lignes, colonnes et diagonales est impaire, chaque terme opposé à A, B, C, D a respectivement la même valeur que A, B, C, D. Nous avons donc la grille suivante:

A	B	C
D	1	D
C	B	A

Comme $A + B + C$ et $A + D + C$ sont tous deux impairs, $B = D$.

A	B	C
B	1	B
C	B	A

Ainsi, la dernière restriction est que $A + B + C$ soit impair. Comme $A, B, C = 0$ ou 1, $A + B + C = 1$ ou 3. Les seuls triplets (A, B, C) qui donnent ces résultats sont $(A, B, C) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ ou $(1, 1, 1)$. Les grilles suivantes sont celles qui correspondent à ces résultats, ce qui complète le problème. $\square$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

0	0	1
0	1	0
1	0	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

(c) (4 points)Soit E le nombre de grilles avec un nombre pair de points et O le nombre de grilles avec un nombre impair de points. Montrez que $E = O$.

Solution 1: On considère l'ensemble de toutes les grilles. On rassemble les grilles en paires pour que G soit reliée à la grille G^* formée en changeant le nombre supérieur gauche de G. (Par changer, nous voulons dire que si le nombre supérieur gauche de G est 0, nous le changeons pour un 1. Si le nombre supérieur gauche de G est 1, nous le changeons pour un 0.) Voici un exemple pour le changement de G à G^*.

$$G = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad G^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

On remarque que la somme des éléments dans la ligne supérieure, la colonne de gauche et la diagonale du coin supérieur gauche au coin inférieur droit changent de parité, i.e. change soit de impair à pair ou de pair à impair et que la somme des éléments des autres lignes / colonnes / diagonales est inchangée. Ainsi, le nombre total de rangées/colonness/diagonales qui ont une somme impaire G et G^* diffère par un nombre impair. Donc exactement une grille entre G et G^* a un nombre pair de points et l'autre a un nombre impair de points. Comme chaque grille apparait dans une seule paire, il y a autant de grilles avec un nombre impair de points que de grilles avec un nombre pair de points, i.e. $E = O$. $\square$

Remarque: La solution est semblable si on fait le changement pour n'importe quel point de la grille.
Solution 2: On remarque que la grille remplie de zéros ne compte aucun point. On remarque aussi que changer la valeur du centre d'une grille préserve la parité du nombre de points. De même, modifier les des quatre cases extérieures qui ne sont pas dans les coins préserve la parité du nombre de points. Par contre, modifier les coins change la parité..

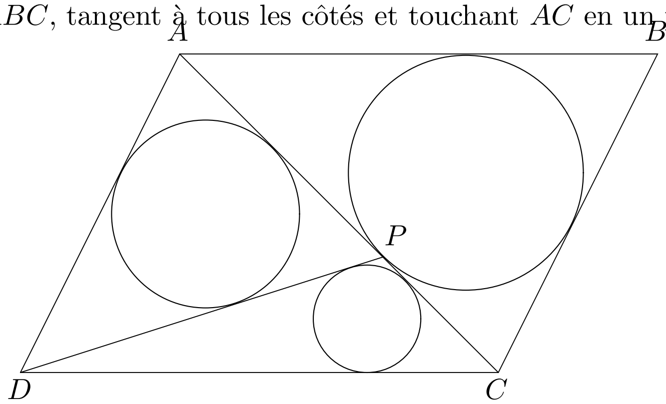
Ainsi, si une grille a $0, 2$ ou 4 de ses coins qui sont des 1, alors la grille a un pointage pair. Si la grille a 1 ou 3 de ses coins qui sont des 1, alors le pointage est impair. Nous allons donc compter les grilles suivant cette observation.

Il y a cinq cases ne se trouvant pas dans des coins. Ainsi, il y a 2^5 grilles avec des coins tous 0.

Il y a $\binom{4}{1} = 4$ façons de choisir un seul coin valant 1. Ainsi, il y a 4×2^5 grilles avec un seul coin non nul. De la même manière, il y a $\binom{4}{2} \times 2^5 = 6 \times 2^5$ grilles avec deux coins valant 1, $\binom{4}{3} \times 2^5 = 4 \times 2^5$ grilles avec trois coins valant 1 et 2^5 grilles dont tous les coins sont 1.

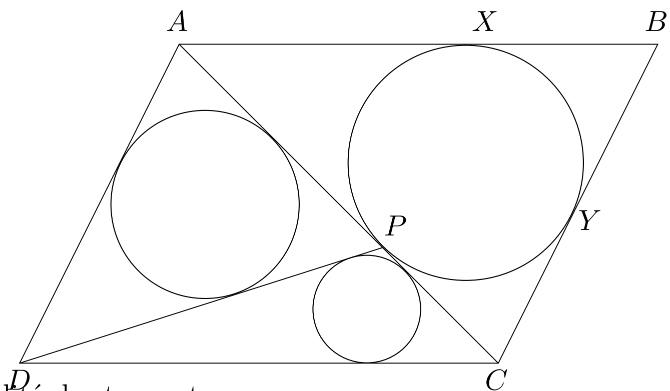
Finalement, on additionne pour trouver qu'il y a $2^5(1 + 6 + 1) = 8 \times 2^5$ grilles qui comptent un nombre pair de points et $2^5(4 + 4) = 8 \times 2^5$ grilles qui en comptent un nombre impair. Ainsi, $E = O$. $\square$

C3 Soit $ABCD$ un parallélogramme. On trace la diagonale AC.Un cercle est dessiné à l'intérieur de ΔABC, tangent à tous les côtés et touchant AC en un point P.



(a) (2 points) Montrez que $DA + AP = DC + CP$.

Solution: Soit le cerle à l'intérieur de ΔABC touchant respectivement AB et BC en X, Y.



Ainsi, par l'égalité des tangentes, nous avons

$$DA + AP = DA + AX = DA + AB - BX$$

et

$$DC + CP = DC + CY = DC + CB - BY.$$

Encore par l'égalité de tangentes, nous avons $BX = BY$. Comme les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur, $AB = DC$ et $DA = CB$. Ainsi, $DA + AB - BX = DC + CB - BY$. Donc $DA + AP = DC + CP$, qui est la conclusion désirée. $\square$

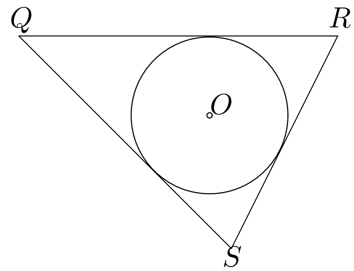
(b) (4 points) Dessinons la droite DP. Un cercle de rayon r_1 est tracé à l'intérieur de ΔDAP tangent aux trois autres côtés. Un cercle de rayon r_2 est tracé à l'intérieur de ΔDCP tangent aux trois côtés. Montrez que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{AP}{PC}.$$

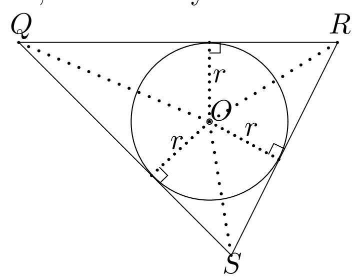
Solution: Considérons les triangles ΔAPD et ΔCPD et remarquons que la hauteur de ces triangles par rapport aux côtés AP, PC est la même. Ainsi,

$$\frac{AP}{PC} = \frac{[APD]}{[CPD]},$$

où $[\cdots]$ désigne l'aire.



Pour n'importe quel triangle QRS avec un cercle à l'intérieur touchant aux trois côtés, soit O le centre du cercle et r le rayon du cercle. La distance de O à chacun des côtés QR, RS, SQ est la même, et est le rayon du cercle. Rejoignons OQ, OR, OS.



Alors

$$[QRS] = [OQR] + [ORS] + [OSQ] = \frac{r \cdot QR}{2} + \frac{r \cdot RS}{2} + \frac{r \cdot SQ}{2}$$
$$= \frac{r}{2} \cdot (QR + RS + SQ) = \frac{r}{2} \cdot (\text{Périmètre de } \Delta QRS)\,.$$

Alors

$$[APD] = \frac{r_1}{2} \cdot (\text{Perimètre de } \Delta APD)$$

et

$$[CPD] = \frac{r_2}{2} \cdot (\text{Perimètre de } \Delta CPD)$$

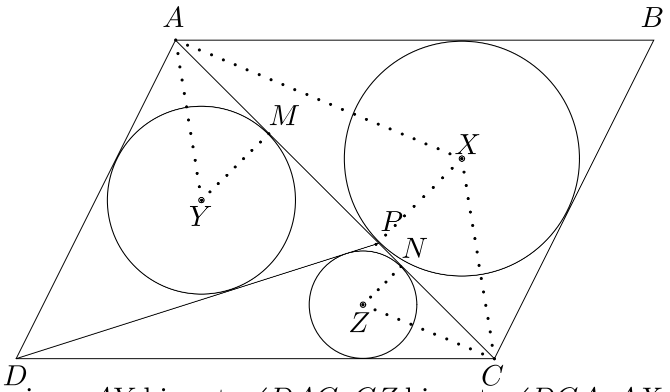
Ainsi

$$\frac{AP}{PC} = \frac{[APD]}{[CPD]} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\text{Perimètre de } \Delta APD}{\text{Perimètre de } \Delta CPD}.$$

Ainsi, pour montrer que $AP/PC = r_1/r_2$, il suffit de montrer que $\Delta APD, \Delta CPD$ ont le mêmê périmètre.

Par la partie (a), nous avons $DA + AP = DC + CP$. Le périmètre de ΔAPD est $DA + AP + PD = DC + CP + PD$, qui est le périmètre de ΔCPD. Ceci résout le problème. $\square$

Solution 2: Soit respectivement X, Y, Z les centres des cercles inscrits à ΔABC, ΔAPD et ΔCPD. Soit M le point où le cercle inscrit à ΔADP touche AC et N le point où le cercle inscrit à ΔCDP touche AC. Remarquons que XP, YM et ZN sont tous perpendiculaires à AC.



Remarquons aussi que AY bissecte $\angle DAC$, CZ bissecte $\angle DCA$, AX bissecte $\angle BAC$ et que CX bissecte $\angle BCA$. Puisque AD est parallèle à BC, $\angle DAC = \angle BCA$. Ainsi, $\angle CAY = \angle ACX$, ce qui implique que $\angle MAY = \angle PCX$. Puisque ΔAYM et ΔCXP sont des triangles rectangles, $\Delta AYM \sim \Delta CXP$. De la même manière, $\Delta CZN \sim \Delta AXP$. Donc

$$\frac{AM}{MY} = \frac{CP}{PX}, \quad \text{and} \quad \frac{CN}{NZ} = \frac{AP}{PX}.$$

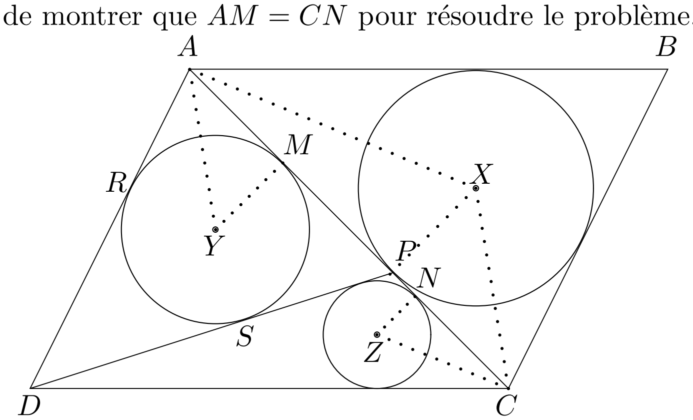
Remarquons que $MY = r_1$ et $NZ = r_2$. Ceci implique que

$$\frac{AM}{r_1} = \frac{CP}{PX}, \quad \text{and} \quad \frac{CN}{r_2} = \frac{AP}{PX}.$$

En divisant la deuxième équation par la première, on trouve que

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{CN} \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Ainsi, il suffit de montrer que $AM = CN$ pour résoudre le problème.



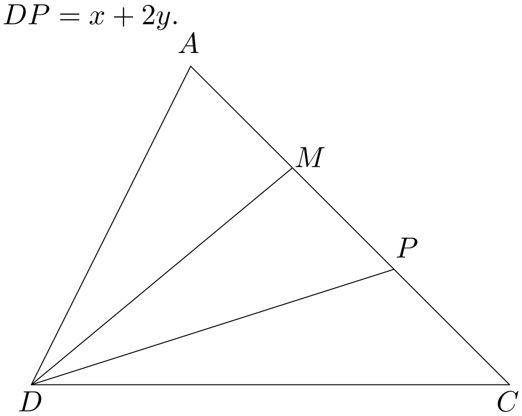
Soient R et S les points de rencontre du cercle inscrit à ΔDAP avec AD, DP. On remarque ensuite que $AR = AM, DR = DS$ et $PM = PS$. Ainsi, $DA + AP = DR + RA + AM + MP = DS + AM + AM + SP = 2AM + DP$. De la même manière, $DC + CP = 2CN + DP$. Par la partie (a), $DA + AP = DC + CP$. Donc $2AM + DP = 2CN + DP$ et on peut conclure que $AM = CN$. $\square$

(c) (4 points) Supposons que $DA + DC = 3AC$ et $DA = DP$. Soit r_1, r_2 les deux rayons définis en (b). Trouvez le ratio r_1/r_2.

Solution: La réponse est $r_1/r_2 = 4/3$.

Solution 1: Par la partie (b). $r_1/r_2 = AP/PC$. Soit $x = AP$ et $y = PC$. La réponse est le ratio x/y.

Par la partie (a), $DA + AP = DC + CP$. Soit $s = DA + AP = DC + CP$. Alors $DA = s - x$ et $DC = s - y$. Puisque $DA + DC = 3AC$, $(s - x) + (s - y) = 3(x + y)$. Ainsi, $2s = 4(x + y)$. Donc $s = 2(x + y)$. Donc $DA = x + 2y$ et $DC = 2x + y$. Puisque $DP = DA$, $DP = x + 2y$.



On trace la parpendiculaire à AC passant par D et on note le point d'intersection avec AC par M. Puisque $DA = DP$, M est le point milieu de AP. Ainsi, $MP = x/2$. Par le théorème de Pythagore, nous avons $MD^2 + MC^2 = DC^2$ et $MD^2 + MP^2 = DP^2$. Ainsi, $DC^2 - MC^2 = DP^2 - MP^2$. Donc

$$(2x + y)^2 - (x/2 + y)^2 = (x + 2y)^2 - (x/2)^2.$$

On simplifie pour trouver

$$4x^2 + 4xy + y^2 - \frac{x^2}{4} - xy - y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Ainsi, $3x^2 - xy - 4y^2 = 0$. On factorise pour trouver $(3x - 4y)(x + y) = 0$. Puisque x, y sont des longueurs, $x + y \neq 0$. Donc $3x - 4y = 0$. Ainsi, $x/y = 4/3$. $\square$

Solution 2: On définit x, y comme dans la Solution 1. Ensuite, nous avons $DA = x + 2y$ et $DC = 2x + y$ et $DP = x + 2y$. On considère les triangles ΔADP et ΔCDP. Ainsi,

$$\cos \angle APD = \frac{PA^2 + PD^2 - AD^2}{2 \cdot PA \cdot PD} = \frac{x^2 + (x+2y)^2 - (x+2y)^2}{2 \cdot x \cdot (x+2y)} = \frac{x^2}{2x(x+2y)} = \frac{x}{2(x+2y)}$$

et

$$\cos \angle CPD = \frac{PC^2 + PD^2 - CD^2}{2 \cdot PC \cdot PD} = \frac{y^2 + (x+2y)^2 - (2x+y)^2}{2 \cdot y \cdot (x+2y)} = \frac{-3x^2 + 4y^2}{2y(x+2y)}.$$

Puisque $\angle APD$ et $\angle CPD$ ont comme somme $180°$, le signe de leur cosinus est diffèrent. Ainsi,

$$\frac{-x}{2(x+2y)} = \frac{-3x^2 + 4y^2}{2y(x+2y)} \Rightarrow -x = \frac{-3x^2 + 4y^2}{y}.$$

L'expression se simplifie à $3x^2 - xy - 4y^2 = 0$. On factorise pour trouver $(3x - 4y)(x + y) = 0$. Comme dans la Solution 1, on trouve $x/y = 4/3$. $\square$

Solution 3: On définit x, y comme dans la Solution 1. Ainsi, nous avons $DA = x + 2y$ et $DC = 2x + y$ et $DP = x + 2y$. On trouve maintenant $\cos \angle DAP$ en utilisant la loi des cosinus pour ΔDAP et ΔDAC.

$$\cos \angle DAP = \frac{AD^2 + AP^2 - DP^2}{2 \cdot AD \cdot AP}$$

$$= \frac{(x+2y)^2 + x^2 - (x+2y)^2}{2 \cdot (x+2y) \cdot x} = \frac{x^2}{2x(x+2y)} = \frac{x}{2(x+2y)}$$

and

$$\cos \angle DAC = \frac{AD^2 + AC^2 - DC^2}{2 \cdot AD \cdot AC}$$

$$= \frac{(x+2y)^2 + (x+y)^2 - (2x+y)^2}{2 \cdot (x+2y)(x+y)} = \frac{-2x^2 + 2xy + 4y^2}{2(x+2y)(x+y)} = \frac{-(x-2y)(x+y)}{(x+2y)(x+y)} = \frac{-x+2y}{x+2y}.$$

Ainsi,

$$\frac{x}{2(x+2y)} = \frac{-x+2y}{x+2y}.$$

Dons $x = 2(-x + 2y)$. Ceci se simplifie à $x/y = 4/3$. $\square$

C4 Pour un entier positif quelconque n, un n-tuplet d'entiers positifs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est dit *super-carré* s'il satisfait les propriétés suivantes:

(1) $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n$.

(2) La somme $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ est un carré parfait pour chaque $1 \leq k \leq n$.

Par exemple, $(12, 9, 8)$ est un super-carré, puisque $12 > 9 > 8$, et que chacun des 12^2, $12^2 + 9^2$, et $12^2 + 9^2 + 8^2$ est un carré parfait.

(a) (2 points) Trouvez toutes les valeurs de t telles que $(32, t, 9)$ est un super-carré.

Solution: La seule solution est $t = 24$.

Remarquons que $32^2 + t^2 = 1024 + t^2$ et $32^2 + t^2 + 9^2 = 1105 + t^2$ sont des carrés parfaits. Ainsi il existe des entiers positifs a, b tel que

$$\begin{aligned} 1024 + t^2 &= a^2 \\ 1105 + t^2 &= b^2. \end{aligned}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on trouve

$$b^2 - a^2 = 81 \Rightarrow (b - a)(b + a) = 81.$$

La seule façon pour 81 d'être écrit comme un produit de deux entiers positifs distincts est $81 = 1 \times 81$ and $81 = 3 \times 27$.

Si $(b - a, b + a) = (1, 81)$, alors $b - a = 1$ et $b + a = 81$. En additionnant ces deux équations on obtient $2b = 82$. Donc $b = 41$ et $a = 40$. Ainsi, $t^2 = a^2 - 32^2 = 40^2 - 32^2 = 8^2(5^2 - 4^2) = 8^2 \cdot 3^2$. Donc $t = 24$.

On vérifie maintenant que $(32, 24, 9)$ est bel et bien un super-carré. Le triplet est clairement décroissant donc il satisfait la condition (1). Pour terminer, $32^2 + 24^2 = 8^2(4^2 + 3^2) = 8^2 \cdot 5^2 = 40^2$ et $32^2 + 24^2 + 9^2 = 40^2 + 9^2 = 1681 = 41^2$. Ainsi, le triplet satisfait donc aussi la condition (2).

Si $(b - a, b + a) = (3, 27)$, alors $b - a = 3$ et $b + a = 27$. On additionne les deux équations pour trouver $2b = 30$. Ainsi, $b = 15$ et $a = 12$. Donc $t^2 = a^2 - 32^2 = 12^2 - 32^2 < 0$. Il n'y a donc aucune solution pour t dans ce cas.

Ainsi, $t = 24$ est la seule solution.

(b) (2 points) Trouvez un 4-tuplet super-carré (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 < 200$.

Solution: Remarquons que si $(x_1, \cdots, x_n)$ est un super-carré, alors $(ax_1, \cdots, ax_n)$ est aussi un super-carré pour tout entier positif a. Nous allons montrer que ce

tuplet satisfait (1) et (2) pour s'assurer que c'est un super-carré. Comme $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$, $ax_1 > ax_2 > \cdots ax_n$. Puisque $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ est un carré parfait, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = m^2$ pour un entier positif m. Ainsi, $(ax_1)^2 + \cdots + (ax_k)^2 = (am)^2$. Donc $(ax_1, \cdots, ax_n)$ est un super-carré.
est un super-carré. Ainsi, $12(12, 9, 8) = (144, 108, 96)$ est aussi un super-carré. Remarquons que $12^2 + 9^2 + 8^2 = 17^2$. Ainsi, $144^2 + 108^2 + 96^2 = 204^2 = 12^2 \cdot 17^2$.

On remarque que $13^2 \cdot 17^2 = (12^2 + 5^2) \cdot 17^2 = 12^2 \cdot 17^2 + 5^2 \cdot 17^2 = 12^2 \cdot 17^2 + 85^2$. Donc $221^2 = 13^2 \times 17^2 = 144^2 + 108^2 + 96^2 + 85^2$. Ainsi, on peut conclure que $(144, 108, 96, 85)$ est un super-carré.

Remarque: La liste des 4-tuplets super-carré (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 < 200$ est

$$(132, 99, 88, 84), (144, 108, 75, 28), (144, 108, 96, 85), (156, 117, 104, 60), (180, 96, 85, 60),$$

$$(180, 135, 120, 32), \quad \text{et} \quad (192, 144, 100, 69).$$

(c) (6 points) Dire s'il existe un 2012-tuplet super-carré.

Solution: Il existe un 2012-tuplet super-carré.

Nous allons montrer qu'il existe un n-tuplet super-carré pour tout entier positif $n \geq 3$. Nous allons le montrer par induction sur n. Par l'énoncé du problème et la partie (b), nous avons déjà montré le résultat pour $n = 3, 4$.

Supposons qu'il existe un k-tuplet super-carré $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ pour un entier positif $k \geq 3$. À partir de ce k-tuplet super-carré, nous allons montrer qu'il existe un $(k+1)$-tuplet super-carré.

Soit a, b, c un triplet d'entiers positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Nous allons donner des conditions supplémentaires sur (a, b, c) dans un instant.

Soit r un entier positif tel que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = r^2$. Comme dans la partie (b), on remarque que si $(x_1, \cdots, x_k)$ est un super-carré, alors $(ax_1, \cdots, ax_k)$ est aussi un super-carré et $(ax_1)^2 + \cdots + (ax_k)^2 = (ar)^2$. On affirme que $(ax_1, \cdots, ax_k, br)$ satisfait la propriété (2) des super-carrés. Clairement $(ax_1)^2 + \cdots + (ax_t)^2$ est un carré parfait puisque $(ax_1, \cdots, ax_k)$ est un carré parfait, pour tout $1 \leq t \leq k$. Pour montrer l'affirmation, il reste à montrer que $(ax_1)^2 + \cdots + (ax_k)^2 + (br)^2$ est un carré parfait. Ceci est vrai puisque cette quantité est égale à $(ar)^2 + (br)^2 = r^2(a^2 + b^2) = (cr)^2$. Ceci complète la démonstration de l'affirmation.

Pour que le n-tuplet $(ax_1, \cdots, ax_k, br)$ soit un super-carré, on doit avoir que $ax_k > br$, ou de façon équivalente que $a/b > r/x_k$. Remarquons que r, x_k sont déterminés par le k-tuplet $(x_1, \cdots, x_k)$. Ainsi, il suffit de montrer qu'il existe un triplet Pythagoricien (a, b, c), avec $a^2 + b^2 = c^2$ tel que $a/b > r/x_k$. Nous devons montre que a/b peut être arbitrairement grand.

Remarquons que $(a, b, c) = (m^2 - 1, 2m, m^2 + 1)$ est un triplet Pythagoricien pour tout entier positif m. Ceci est vrai puisque $(m^2-1)^2+(2m)^2 = m^4-2m^2+1+4m^2 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2$. Dans un tel cas,

$$\frac{a}{b} = \frac{m^2 - 1}{2m} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2m} > \frac{m}{2} - 1,$$

qui peut être pris arbitrairement grand. La preuve par indiction est donc complète. $\square$