The Canadian Mathematical Society La Société mathématique du Canada

CMS
SMC

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

le mercredi 24 novembre 2010

Financière Sun Life

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*

   On a $\dfrac{(9+5)^2-(9-5)^2}{(9)(5)} = \dfrac{14^2-4^2}{45} = \dfrac{196-16}{45} = \dfrac{180}{45} = 4.$

   Solution 2

   Soit x et y n'importe quels nombres non nuls. On a :

   $$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = \frac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{xy} = \frac{4xy}{xy} = 4$$

   Puisque cette expression est égale à 4, quelles que soient les valeurs de x et de y, alors $\dfrac{(9+5)^2-(9-5)^2}{(9)(5)} = 4.$

   Solution 3

   Soit x et y n'importe quels nombres non nuls. On factorise les différences de carrés :

   $$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = \frac{[(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)]}{xy} = \frac{(2x)(2y)}{xy} = 4$$

   Puisque cette expression est égale à 4, quelles que soient les valeurs de x et de y, alors $\dfrac{(9+5)^2-(9-5)^2}{(9)(5)} = 4.$

   Réponse : 4

2. On résout en simplifiant d'abord chaque membre de l'équation :

   $$\begin{aligned} x-(8-x) &= 8-(x-8) \\ x-8+x &= 8-x+8 \\ 3x &= 24 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

   Donc $x = 8$.

   Réponse : $x = 8$

3. *Solution 1*

   On appelle *anneau intérieur* l'anneau entre le petit cercle et le cercle du milieu.

   On fait subir à la portion ombrée de l'anneau intérieur une réflexion par rapport au segment CD. L'aire de la portion ombrée ne change pas.

   La région ombrée forme maintenant un grand demi-disque à la droite du diamètre CD. Son aire est donc égale à la moitié de l'aire du grand disque.

   Puisque $OC = 6$, le grand disque a un rayon de 6 et son aire est égale à $\pi 6^2$, ou 36π.

   Donc, la région ombrée a une aire de $\frac{1}{2}(36\pi)$, ou 18π.

Solution 2

On appelle *anneau extérieur* l'anneau entre le grand cercle et le cercle du milieu et *anneau intérieur* l'anneau entre le petit cercle et le cercle du milieu.

Puisque $OC = 6$, le grand disque a un rayon de 6 et son aire est égale à $\pi 6^2$, ou 36π.

Puisque $OB = 4$, le disque moyen a un rayon de 4 et son aire est égale à $\pi 4^2$, ou 16π.

Puisque $OA = 2$, le petit disque a un rayon de 2 et son aire est égale à $\pi 2^2$, ou 4π.

Puisque le grand disque a une aire de 36π et que le disque moyen a une aire de 16π, alors l'anneau extérieur a une aire de $36\pi - 16\pi$, ou 20π.

Puisque le diamètre CD divise chaque anneau en deux parties égales, alors la portion ombrée de l'anneau extérieur a une aire de $\frac{1}{2}(20\pi)$, ou 10π.

Puisque le disque moyen a une aire de 16π et que le petit disque a une aire de 4π, alors l'anneau intérieur a une aire de $16\pi - 4\pi$, ou 12π.

Puisque le diamètre CD divise chaque anneau en deux parties de même aire, alors la portion ombrée de l'anneau intérieur a une aire de $\frac{1}{2}(12\pi)$, ou 6π.

Puisque le petit disque a une aire de 4π et que le segment CD passe au centre du cercle, alors la portion ombrée du disque a une aire de $\frac{1}{2}(4\pi)$, ou 2π.

Donc, la région ombrée a une aire de $10\pi + 6\pi + 2\pi$, ou 18π.

Réponse : 18π

4. On simplifie d'abord l'expression :

$$\frac{(3{,}1 \times 10^7)(8 \times 10^8)}{2 \times 10^3} = \frac{3{,}1 \times 8}{2} \times \frac{10^7 \times 10^8}{10^3} = 3{,}1 \times 4 \times 10^{7+8-3} = 12{,}4 \times 10^{12} = 124 \times 10^{11}$$

L'entier et composé des chiffres 124 suivis de 11 zéros. Il a 14 chiffres.

Réponse : 14

5. *Solution 1*

Soit Q le point le plus près de $P(-3, 9)$ sur la droite d'équation $y = x$.

Alors PQ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$.

Puisque cette droite a une pente de 1 et que PQ lui est perpendiculaire, alors PQ a une pente de -1.

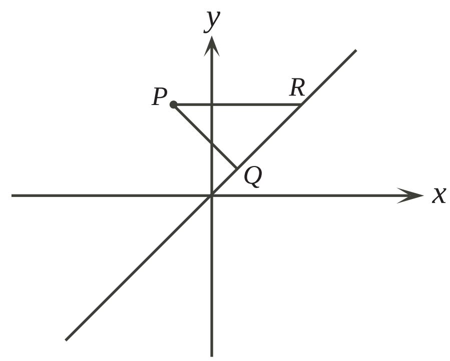
On rappelle qu'un point Q sur la droite d'équation $y = x$ a pour coordonnées (t, t), t étant un nombre réel quelconque.

PQ a une pente de -1 si $\dfrac{t-9}{t-(-3)} = -1$, c'est-à-dire si $t - 9 = -(t + 3)$, ou $2t = 6$, ou $t = 3$.

Donc, le point le plus près de $P(-3, 9)$, sur la droite d'équation $y = x$, est le point $(3, 3)$.

Solution 2

Soit Q le point le plus près de $P(-3, 9)$ sur la droite d'équation $y = x$.
Alors PQ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$.
Soit R le point sur la droite d'équation $y = x$ pour lequel PR est horizontal, comme dans la figure suivante.



Puisque PR est horizontal et que P a une ordonnée de 9, alors R a une ordonnée de 9.
Puisque R est situé sur la droite d'équation $y = x$, ses coordonnées sont $(9, 9)$.
Puisque PR est horizontal et que QR a une pente de 1 (le segment est situé sur la droite d'équation $y = x$), alors $\angle PRQ = 45°$.
Puisque $\angle PQR = 90°$ et que $\angle PRQ = 45°$, le triangle PQR est isocèle et rectangle.
Soit M le milieu de PR. Puisque P et R ont pour coordonnées respectives $(-3, 9)$ et $(9, 9)$, alors M a pour coordonnées $(3, 9)$.
Puisque le triangle PQR est isocèle et que M est le milieu de PR, alors QM est perpendiculaire à PR. Donc, QM est vertical et Q a pour abscisse 3.
Puisque Q est situé sur la droite d'équation $y = x$, alors Q a pour coordonnées $(3, 3)$.

Solution 3

On rappelle qu'un point Q sur la droite d'équation $y = x$ a pour coordonnées (t, t), t étant un nombre réel quelconque..
Donc $PQ = \sqrt{(t - (-3))^2 + (t - 9)^2}$, ou $PQ^2 = (t + 3)^2 + (t - 9)^2$.
Puisqu'on cherche le point le plus près de P, sur la droite d'équation $y = x$, on veut minimiser la valeur de PQ ou, ce qui est équivalent, minimiser la valeur de PQ^2.
On cherche donc la valeur de t qui minimise la valeur de :

$$PQ^2 = t^2 + 6t + 9 + t^2 - 18t + 81 = 2t^2 - 12t + 90$$

Une équation de la forme $y = 2x^2 - 12x + 90$ représente une parabole ouverte vers le haut. La valeur minimale de y est obtenue au sommet de la parabole, soit lorsque $x = -\frac{-12}{2(2)}$, ou $x = 3$.
Donc, la valeur de PQ (ou PQ^2) est minimisée lorsque $t = 3$.
Donc, le point le plus près de P, sur la droite d'équation $y = x$, est le point $(3, 3)$.

Réponse : $(3, 3)$

6. Soit x le nombre d'élèves qui ont étudié et y le nombre d'élèves qui n'ont pas étudié.

   On peut supposer que l'examen compte 100 points, sans perte de généralité.

   Puisque les élèves qui ont étudié ont obtenu une moyenne de 90 %, ils ont obtenu un total de $90x$ points.

   Puisque les élèves qui n'ont pas étudié ont obtenu une moyenne de 40 %, ils ont obtenu un total de $40y$ points.

   Puisque la classe au complet a obtenu une moyenne de 85 %, alors $\dfrac{90x + 40y}{x + y} = 85$.

   Donc $90x + 40y = 85x + 85y$, d'où $5x = 45y$, ou $x = 9y$.

   Donc $x : y = 9 : 1 = 90 : 10$. Donc, 10 % de la classe n'a pas étudié.

   Réponse : 10%

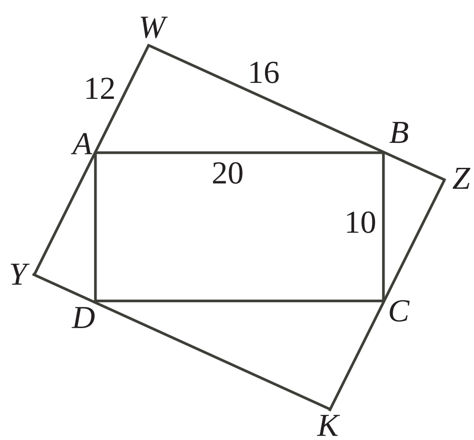
7. *Solution 1*

   Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AD = BC = 10$ et $DC = AB = 20$.

   Puisque $WA = 12$, $WB = 16$, $AB = 20$ et que $12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$, alors $WA^2 + WB^2 = AB^2$. Le triangle AWB est donc rectangle en W.

   On remarque que le triangle CKD est congruent au triangle AWB. Le triangle CKD est donc rectangle en K.

   On prolonge WA et KD jusqu'au point de rencontre Y et on prolonge WB et KC jusqu'au point de rencontre Z.



   Soit $\angle WAB = \angle KCD = \theta$. Donc $\angle WBA = \angle KDC = 90^\circ - \theta$.

   On a $\angle YAD = 180^\circ - \angle WAB - \angle BAD = 180^\circ - \theta - 90^\circ = 90^\circ - \theta$.

   De plus, $\angle YDA = 180^\circ - \angle KDC - \angle ADC = 180^\circ - (90^\circ - \theta) - 90^\circ = \theta$.

   Les triangles YDA et WAB sont donc semblables. Donc $\angle DYA = 90^\circ$.

   Puisque $DA = \frac{1}{2}AB$ et que les triangles YDA et WAB sont semblables, alors $YD = \frac{1}{2}WA$ et $YA = \frac{1}{2}WB$. Donc $YD = 6$ et $YA = 8$.

   De même, $\angle BZC = 90^\circ$. Donc, $WYKZ$ est un rectangle.

   On a $WY = WA + AY$, d'où $WY = 12 + 8$, ou $WY = 20$. De plus, $YK = YD + DK$, d'où $YK = 6 + 16$, ou $YK = 22$.

   D'après le théorème de Pythagore et puisque $WK > 0$, alors :

$$WK = \sqrt{WY^2 + YK^2} = \sqrt{20^2 + 22^2} = \sqrt{400 + 484} = \sqrt{884} = 2\sqrt{221}$$

Donc $WK = 2\sqrt{221}$.

Solution 2

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AD = BC = 10$ et $DC = AB = 20$.

On place la figure dans un plan cartésien de manière que le point D corresponde à l'origine et que les points A, C et B aient pour coordonnées respectives $(0, 10)$, $(20, 0)$ et $(20, 10)$.

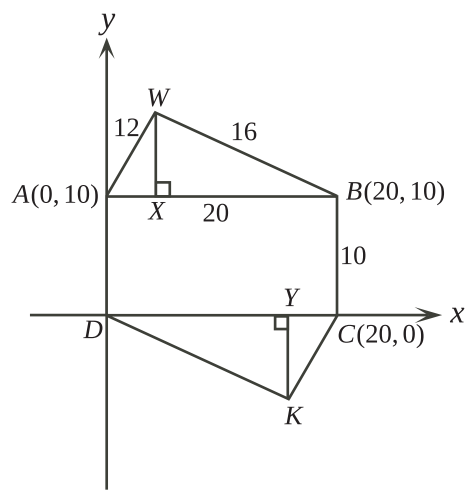
Puisque $WA = 12$, $WB = 16$, $AB = 20$ et que $12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$, alors $WA^2 + WB^2 = AB^2$. Le triangle AWB est donc rectangle en W.

Les triangles CKD et AWB sont congruents. Le triangle CKD est donc rectangle en K.

Le triangle AWB est rectangle et on connaît les longueurs de ses côtés. On peut donc calculer les rapports trigonométriques de ses angles aigus.

On a $\sin(\angle WAB) = \dfrac{WB}{AB} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$ et $\cos(\angle WAB) = \dfrac{WA}{AB} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$.

Au point W, on abaisse une perpendiculaire WX à AB. Au point K, on abaisse une perpendiculaire KY à DC.



Donc $AX = WA\cos(\angle WAB)$, d'où $AX = 12(\frac{3}{5})$, ou $AX = \frac{36}{5}$. De même $WX = WA\sin(\angle WAB)$, d'où $WX = 12(\frac{4}{5})$, ou $WX = \frac{48}{5}$.

Puisque A a pour coordonnées $(0, 10)$, alors W a pour coordonnées $(\frac{36}{5}, 10 + \frac{48}{5})$, ou $(\frac{36}{5}, \frac{98}{5})$.

Puisque les triangles CKD et AWB sont congruents, on utilise une méthode semblable pour montrer que K a pour coordonnées $(20 - \frac{36}{5}, -\frac{48}{5})$, ou $(\frac{64}{5}, -\frac{48}{5})$.

Donc, la distance entre les points W et K est égale à :

$$\begin{aligned} WK &= \sqrt{(\tfrac{64}{5} - \tfrac{36}{5})^2 + (-\tfrac{48}{5} - \tfrac{98}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{28^2}{5^2} + \tfrac{146^2}{5^2}} \\ &= \tfrac{2}{5}\sqrt{14^2 + 73^2} = \tfrac{2}{5}\sqrt{196 + 5329} \\ &= \tfrac{2}{5}\sqrt{5525} = 2\sqrt{\tfrac{5525}{25}} \\ &= 2\sqrt{221} \end{aligned}$$

Donc $WK = 2\sqrt{221}$.

Réponse : $WK = 2\sqrt{221}$

8. On factorise la première et la troisième parenthèse et on complète le carré dans la deuxième. On obtient :

$$(x+1)(x+2)((x-1)^2-2)(x-3)(x-4)+24=0$$

On remarque qu'il y a symétrie par rapport à $(x-1)$. En effet, le facteur $(x+1)$ est 2 de plus que $(x-1)$, tandis que le facteur $(x-3)$ est 2 de moins que $(x-1)$. De même, le facteur $(x+2)$ est 3 de plus que $(x-1)$, tandis que le facteur $(x-4)$ est 3 de moins que $(x-1)$. Pour exploiter la symétrie, on pose $y=x-1$. Donc, $(x-3)$ devient $(y-2)$, $(x+1)$ devient $(y+2)$, $(x+2)$ devient $(y+3)$ et $(x-4)$ devient $(y-3)$. Chaque facteur de la forme $(y-a)$ est ainsi apparié à un facteur de la forme $(y+a)$, ce qui simplifiera le développement du membre de gauche. L'équation devient :

$$(y+2)(y+3)(y^2-2)(y-2)(y-3)+24=0$$

On déplace les facteurs pour obtenir :

$$(y+2)(y-2)(y+3)(y-3)(y^2-2)+24=0$$

On multiplie des paires de facteurs pour obtenir :

$$(y^2-4)(y^2-9)(y^2-2)+24=0$$

On pose $z=y^2$ de manière à simplifier l'équation. On obtient :

$$(z-4)(z-9)(z-2)+24=0$$

Il s'agit d'une équation polynôme du 3$^{\text{e}}$ degré. On développe et on réduit :

$$\begin{aligned}(z^2-13z+36)(z-2)+24 &= 0\\ z^3-15z^2+62z-48 &= 0\end{aligned}$$

On voit que $z=1$ est une racine. Donc, $z-1$ est un facteur du membre de gauche.
Par division ou par comparaison, l'équation devient $(z-1)(z^2-14z+48)=0$, ou $(z-1)(z-6)(z-8)=0$.
L'équation a pour racines $z=1$, $z=6$ et $z=8$.
Puisque $z=y^2$, on a donc $y=\pm1$ ou $y=\pm\sqrt{6}$ ou $y=\pm\sqrt{8}$.
Puisque $y=x-1$, alors $x=y+1$. Les racines de l'équation initiale sont $x=0$, $x=2$, $x=1\pm\sqrt{6}$ et $x=1\pm\sqrt{8}$. (Ces deux dernires racines peuvent être écrites sous la forme $x=1\pm2\sqrt{2}$.)

Réponse : $x=0,2,1\pm\sqrt{6},1\pm2\sqrt{2}$

Partie B

1. (a) *Solution 1*

D'après la 1re rangée, $A + A = 50$, ou $A = 25$.

D'après la 2e colonne, $A + C = 57$. Puisque $A = 25$, alors $C = 32$.

Solution 2

D'après la 1re rangée, $A + A = 50$, ou $A = 25$.

D'après la 1re colonne, $A + B = 37$. Puisque $A = 25$, alors $B = 12$.

D'après la 2e rangée, $B + C = 44$. Puisque $B = 12$, alors $C = 32$.

(b) *Solution 1*

Puisque chaque membre du tableau appartient à une seule colonne, la somme des membres du tableau est égale à la somme des sommes des trois colonnes, soit $50+n+40$, ou $90+n$. De même, la somme des neuf membres du tableau est égale à la somme des sommes des trois rangées, soit $30 + 55 + 50$, ou 135.

Donc $90 + n = 135$, d'où $n = 45$.

Solution 2

Puisque chaque membre du tableau appartient à une seule rangée, la somme des membres du tableau est égale à la somme des sommes des trois rangées, soit $30 + 55 + 50$, ou 135. Puisque les nombres D, E et F paraissent tous trois fois dans le tableau, la somme des neuf membres du tableau est égale à $3D + 3E + 3F$, ou $3(D + E + F)$.

Donc $3(D + E + F) = 135$, ou $D + E + F = 45$.

D'après la 2e colonne, $D + E + F = n$. Donc $n = 45$.

Solution 3

D'après la 1re rangée, $D + D + D = 30$, ou $D = 10$.

D'après la 1re colonne, $D + 2F = 50$. Puisque $D = 10$, alors $2F = 40$, d'où $F = 20$.

D'après la 3e colonne, $D + 2E = 40$. Puisque $D = 10$, alors $2E = 30$, d'où $E = 15$.

Donc $n = D + E + F = 10 + 15 + 20$, ou $n = 45$.

(c) *Solution 1*

D'après la 3e rangée, $3R + T = 33$.

D'après la 4e rangée, $R + 3T = 19$.

On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $4R + 4T = 52$, ou $R + T = 13$.

D'après la 1re rangée, $P + Q + R + T = 20$.

Puisque $R + T = 13$, alors $P + Q = 7$.

Solution 2

Puisque chaque membre du tableau appartient à une seule rangée, la somme des membres du tableau est égale à la somme des sommes des quatre rangées, soit $20 + 20 + 33 + 19$, ou 92. Les nombres P et Q paraissent deux fois chacun dans le tableau, tandis que les nombres R et T paraissent six fois chacun.

On a donc $2P + 2Q + 6R + 6T = 92$.

Dans les deux dernières rangées, les nombres R et T paraissent quatre fois chacun. Donc $4R + 4T = 33 + 19$, ou $4R + 4T = 52$, ou $R + T = 13$.

Donc $2P+2Q = 92-6(R+T)$, d'où $2P+2Q = 92-6(13)$, ou $2P+2Q = 14$. Donc $P+Q = 7$.

Solution 3

D'après la 3e rangée, $3R + T = 33$.

D'après la 4e rangée, $R + 3T = 19$.

On multiplie les membres de la 1re équation par 3 et on soustrait ensuite la 2e équation, membre par membre, pour obtenir $(9R + 3T) - (R + 3T) = 99 - 19$, d'où $8R = 80$, ou $R = 10$.

Puisque $3R + T = 33$, alors $T = 33 - 3(10)$, ou $T = 3$.

D'après la 1re rangée, $P + Q + R + T = 20$.

Puisque $R = 10$ et $T = 3$, alors $P + Q = 7$.

2. (a) Aux points d'intersection A et B, les valeurs de y des équations $y = x^2 - 4x + 12$ et $y = -2x + 20$ sont égales. On obtient :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 12 &= -2x + 20 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x-4)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 4$ ou $x = -2$.

Pour obtenir l'ordonnée des points A and B, on peut utiliser l'équation de la droite.

Lorsque $x = 4$, on a $y = -2(4) + 20$, ou $y = 12$.

Lorsque $x = -2$, on a $y = -2(-2) + 20$, ou $y = 24$.

Les coordonnées de A et de B sont $(4, 12)$ et $(-2, 24)$.

(b) On connaît les coordonnées de A et de B. Le milieu M du segment AB a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(4 + (-2)), \frac{1}{2}(24 + 12))$, ou $(1, 18)$.

(c) *Solution 1*

La droite d'équation $y = -2x + 20$ a une pente de -2.

Donc la droite parallèle, de pente -2, coupe la parabole aux points $P(p, p^2 - 4p + 12)$ et $Q(q, q^2 - 4q + 12)$. Le segment PQ a donc une pente de -2. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{(p^2-4p+12)-(q^2-4q+12)}{p-q} &= -2\\
\frac{p^2-q^2-4p+4q}{p-q} &= -2\\
\frac{(p-q)(p+q)-4(p-q)}{p-q} &= -2\\
(p+q)-4 &= -2 \qquad \text{(puisque } p\neq q\text{)}\\
p+q &= 2
\end{aligned}$$

Donc $p+q=2$.

Solution 2
La droite d'équation $y=-2x+20$ a une pente de -2.
La droite parallèle a donc une pente de -2. Soit $y=-2x+b$ l'équation de la droite parallèle qui coupe la parabole aux points P et Q.
Les coordonnées du point d'intersection P vérifient les équations $y=-2x+b$ et $y=x^2-4x+12$. On a donc $p^2-4p+12=-2p+b$, d'où $p^2-2p+12-b=0$.
Les coordonnées du point d'intersection Q vérifient les équations $y=-2x+b$ et $y=x^2-4x+12$. On a donc $q^2-4q+12=-2q+b$, d'où $q^2-2q+12-b=0$.
Puisque les deux membres de gauche égalent 0, on a :

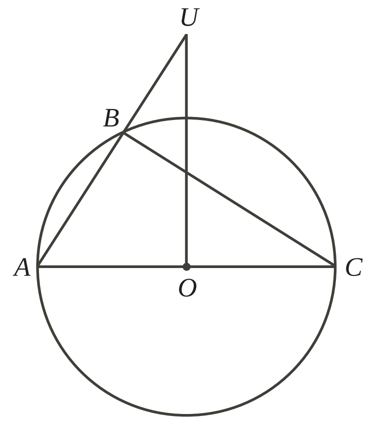
$$\begin{aligned}
p^2-2p+12-b &= q^2-2q+12-b\\
p^2-2p &= q^2-2q\\
p^2-q^2-2p+2q &= 0\\
(p-q)(p+q)-2(p-q) &= 0\\
(p-q)(p+q-2) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $p-q=0$ ou $p+q-2=0$.
Puisque $p\neq q$, alors $p+q=2$.

(d) Puisque P et Q ont pour coordonnées respectives $(p,p^2-4p+12)$ et $(q,q^2-4q+12)$, le milieu N du segment PQ a pour absisse $\frac{1}{2}(p+q)$.
Or d'après la partie (c), $p+q=2$. Donc, l'abscisse de N est égale à 1.
Puisque M et N ont chacun une abscisse de 1, le segment MN est vertical.

3. (a) Soit U le point de l'ensemble $\mathcal{S}$ qui est directement au-dessus de O et soit B le point d'intersection de AU et du cercle. (Il existe un autre point U dans $\mathcal{S}$ pour lequel UO est perpendiculaire à AC ; ce point est situé directement au-dessous de O. Par symétrie, la longueur UO est la même dans les deux cas.)

On trace les segments UO et BC.



Puisque AC est un diamètre, $\angle ABC = 90°$.

Les triangles ABC et AOU sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent l'angle A. Donc $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AO}{AU}$.

Puisque U est dans $\mathcal{S}$, alors $BU = 1$. Donc $AU = AB + BU$, ou $AU = AB + 1$.

De plus, $AO = 1$ et $AC = 2$, puisque le cercle a un rayon de 1.

Donc $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{AB+1}$, d'où $AB^2 + AB - 2 = 0$.

On factorise pour obtenir $(AB-1)(AB+2) = 0$. Puisque $AB > 0$, alors $AB = 1$, d'où $AU = 2$.

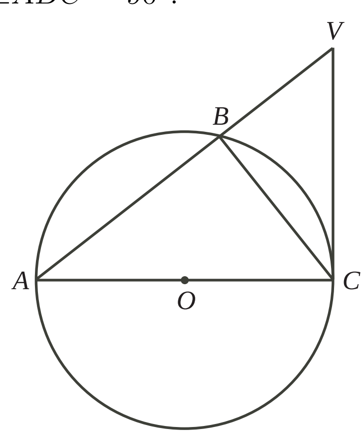
D'après le théorème de Pythagore, puisque $UO > 0$ alors $UO = \sqrt{AU^2 - AO^2}$, d'où $UO = \sqrt{2^2 - 1^2}$, ou $UO = \sqrt{3}$.

(b) Comme dans la partie (a), soit V le point de $\mathcal{S}$ qui est directement au-dessus de C.

Soit B le point d'intersection de AV et du cercle. Par définition, $BV = 1$.

On trace VC et BC.

Puisque AC est un diamètre, $\angle ABC = 90°$.



Soit $VC = x$.
Le triangle VBC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore et puisque $BC > 0$, alors $BC = \sqrt{VC^2 - BV^2}$, d'où $BC = \sqrt{x^2 - 1}$.
Le triangle VCA est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore et puisque $AV > 0$, alors $AV = \sqrt{AC^2 + CV^2}$, d'où $AV = \sqrt{4 + x^2}$.
Les triangles VBC et VCA sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent l'angle V. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{VB}{VC} &= \frac{VC}{VA} \\
\frac{1}{x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \\
\sqrt{x^2+4} &= x^2 \\
x^2 + 4 &= x^4 \\
0 &= x^4 - x^2 - 4 \\
0 &= (x^2)^2 - x^2 - 4
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation bicarrée. Donc :

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Puisque x^2 est positif, alors $x^2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.
Puisque $VC = x$ est positif, alors $VC = x = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$.

(c) On démontre, par contradiction, qu'un tel cercle n'existe pas.
Supposons qu'il existe un cercle Z sur lequel sont situés tous les points de $\mathcal{S}$.
On place la figure dans un plan cartésien de manière que l'origine soit au point O et que C et A aient pour coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.
Pour chaque point X de $\mathcal{S}$ qui est au-dessus de AC, il y a un point correspondant Y, dans $\mathcal{S}$, qui est au-dessous de AC, soit l'image de X par rapport à AC.
Donc, $\mathcal{S}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Donc, Z aussi est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Son centre est donc situé sur l'axe des abscisses.
Soit $(p, 0)$ le centre de Z et r son rayon.
Z a donc pour équation $(x - p)^2 + y^2 = r^2$.
D'après la partie (a), le point $(0, \sqrt{3})$ est situé sur Z. Donc $p^2 + 3 = r^2$.
De plus, le point $W(2, 0)$ est situé sur Z. On a obtenu ce point en choisissant B pour qu'il coïncide avec le point C, puis en prolongeant le segment AB à l'horizontale d'une unité.
Donc $(2 - p)^2 + 0^2 = r^2$, d'où $p^2 - 4p + 4 = r^2$.
On compare les termes de gauche des équations $p^2 + 3 = r^2$ et $p^2 - 4p + 4 = r^2$, puisque

leurs membres de droite sont égaux. On obtient $p^2+3=p^2-4p+4$, d'où $4p=1$, ou $p=\frac{1}{4}$.
Donc $r^2=p^2+3$, d'où $r^2=\frac{1}{16}+3$, ou $r^2=\frac{49}{16}$. Puisque $r>0$, alors $r=\frac{7}{4}$.
Z a donc pour équation $(x-\frac{1}{4})^2+y^2=(\frac{7}{4})^2$.
D'après la partie (b), le point $\left(1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)$ est situé sur le cercle. Donc :

$$\begin{aligned}
(1-\tfrac{1}{4})^2+\left(\sqrt{\tfrac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)^2 &= (\tfrac{7}{4})^2 \\
(\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{1+\sqrt{17}}{2} &= \tfrac{49}{16} \\
\tfrac{9}{16}+\tfrac{8}{16}+\tfrac{\sqrt{17}}{2} &= \tfrac{49}{16} \\
\tfrac{\sqrt{17}}{2} &= 2 \\
\sqrt{17} &= 4
\end{aligned}$$

Puisque ce dernier énoncé est faux, on a une contradiction.
Notre supposition est donc fausse et il n'existe aucun cercle sur lequel sont situés tous les points de $\mathcal{S}$.

4. (a) Puisque $(x-1)^2\geq 0$, alors $x^2+1\geq 2x$, d'où $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$.
Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \\
\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left\lfloor x+\frac{1}{x}\right\rfloor &= x \\
\frac{1}{x} &= \left\lfloor x+\frac{1}{x}\right\rfloor
\end{aligned}$$

D'après le premier énoncé ci-dessus, le membre de droite de l'équation précédente est un entier supérieur ou égal à 2. Donc, le membre de gauche est aussi un entier positif.
Soit $\dfrac{1}{x}=n$, n étant un entier quelconque. Donc $x=\dfrac{1}{n}$.
L'équation $\dfrac{1}{x}=\left\lfloor x+\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ devient donc $n=\left\lfloor \dfrac{1}{n}+n\right\rfloor$.
Or, si $n\geq 2$, alors $\dfrac{1}{n}<1$, d'où $n<n+\dfrac{1}{n}<n+1$. Donc $\left\lfloor \dfrac{1}{n}+n\right\rfloor=n$.
Si $n=1$, alors $n+\dfrac{1}{n}=2$. Donc $\left\lfloor \dfrac{1}{n}+n\right\rfloor\neq n$.
Donc, parmi les entiers strictement positifs n, l'équation $n=\left\lfloor \dfrac{1}{n}+n\right\rfloor$ est vérifiée si et seulement si $n\geq 2$.
Les solutions de l'équation $f(x)=x$ sont donc tous les nombres $x=\dfrac{1}{n}$, n étant un entier supérieur ou égal à 2.

(b) Soit $x = \dfrac{a}{a+1}$, a étant un entier quelconque tel que $a > 1$.

On calcule d'abord $f(x)$.

On remarque que :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a}{a+1} + \frac{a+1}{a} = \frac{a^2 + (a+1)^2}{a(a+1)} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{a^2 + a} = \frac{2(a^2 + a) + 1}{a^2 + a} = 2 + \frac{1}{a^2 + a}$$

Puisque $a > 1$, alors $\dfrac{1}{a^2 + a} < \dfrac{1}{1^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$, d'où $2 < 2 + \dfrac{1}{a^2 + a} < 3$.

Donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \dfrac{1}{a^2 + a} \right\rfloor = 2$.

Puisque $x = \dfrac{a}{a+1}$, alors $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) - \left\lfloor x + \dfrac{1}{x} \right\rfloor = \left(2 + \dfrac{1}{a^2 + a}\right) - 2 = \dfrac{1}{a^2 + a}$.

On montre ensuite que $x \neq f(x)$.

Puisque $x = \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{a^2}{a(a+1)}$ et que $f(x) = \dfrac{1}{a(a+1)}$, alors x est égal à $f(x)$ si et seulement si $\dfrac{a^2}{a(a+1)} = \dfrac{1}{a(a+1)}$, c'est-à-dire si et seulement si $a^2 = 1$.

Puisque $a > 1$, cette dernière équation n'admet aucune solution. Donc $x \neq f(x)$.

On montre enfin que $f(x) = f(f(x))$.

Soit $y = f(x) = \dfrac{1}{a^2 + a}$.

Puisque a est un entier supérieur à 1, alors y est un nombre de la forme $\dfrac{1}{n}$, n étant un entier tel que $n > 2$.

Donc, y est un nombre de la forme obtenue dans la partie (a). Donc $f(y) = y$, c'est-à-dire que $f(f(x)) = f(x)$.

Donc si $x = \dfrac{a}{a+1}$, a étant un entier quelconque tel que $a > 1$, alors $x \neq f(x)$, mais $f(x) = f(f(x))$.

(c) *Solution 1*

On cherche une infinité de nombres rationnels u tels que :

– $0 < u < 1$,

– u, $f(u)$ et $f(f(u))$ sont tous distincts et

– $f(f(u)) = f(f(f(u)))$.

On trouvera une famille infinie de nombres rationnels u tels que $0 < u < 1$ de manière que $f(u) = \dfrac{a}{a+1}$, a étant un nombre entier tel que $a > 1$.

D'après la partie (b), cela fera en sorte que $f(f(u)) = \dfrac{1}{a^2 + a}$ et que $f(f(f(u))) = \dfrac{1}{a^2 + a}$.

On aura alors $f(f(u)) = f(f(f(u)))$ et $f(u) \neq f(f(u))$, ce qui vérifie la 3^e condition de l'énoncé.
Si on obtient $u \neq \dfrac{a}{a+1}$ et $u \neq \dfrac{1}{a^2+a}$, les nombres rationnels u vérifient aussi la 2^e condition de l'énoncé. (Si on avait $u = \dfrac{1}{a^2+a}$, on aurait $f(u) = u$.)

On démontre maintenant l'existence d'une famille infinie de nombres rationnels u tels que $0 < u < 1$ de manière que $f(u) = \dfrac{a}{a+1}$, a étant un nombre entier tel que $a > 1$.

On considère, comme possibilité, des nombres rationnels $u = \dfrac{b}{b+c}$, b et c étant des entiers strictement positifs et $c > 1$.

Puisque $b + c > b$, alors u est un nombre rationnel tel que $0 < u < 1$.
On a $u + \dfrac{1}{u} = \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{b+c}{b} = \dfrac{b^2+(b+c)^2}{b(b+c)} = \dfrac{2b^2+2bc+c^2}{b^2+bc} = 2 + \dfrac{c^2}{b^2+bc}$.
On suppose en plus que $c^2 < b^2 + bc$. Donc $\dfrac{c^2}{b^2+bc} < 1$, d'où $u + \dfrac{1}{u} = 2 + \dfrac{c^2}{b^2+bc} < 3$.
Donc :

$$f(u) = \left(u + \frac{1}{u}\right) - \left\lfloor u + \frac{1}{u} \right\rfloor = 2 + \frac{c^2}{b^2+bc} - 2 = \frac{c^2}{b^2+bc}$$

On veut que $f(u)$ soit de la forme $\dfrac{a}{a+1}$. On veut donc que $\dfrac{c^2}{b^2+bc}$ soit de la forme $\dfrac{a}{a+1}$, ce qui est le cas si $b^2 + bc - c^2 = 1$.

On remarque que si $b^2 + bc - c^2 = 1$, alors $c^2 = b^2 + bc - 1 < b^2 + bc$. Donc, l'équation tient compte de la deuxième supposition ci-dessus. De plus, si $b^2 + bc - c^2 = 1$, alors b et c n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1, ce qui fait que $u = \dfrac{b}{b+c}$ est une fraction irréductible. Si on ajoute le fait que $c \neq 1$, on voit que $\dfrac{b}{b+c}$ ne peut pas être de la forme $\dfrac{a}{a+1}$.
Pour résumer, si l'équation $b^2 + bc - c^2 = 1$ admet une infinité de solutions entières strictement positives (b, c), alors la famille infinie de nombres rationnels $u = \dfrac{b}{b+c}$ vérifie les trois conditions de l'énoncé.

On considère l'équation $b^2 + bc - c^2 = 1$.
Elle est équivalente à l'équation $4b^2 + 4bc - 4c^2 = 4$, ou $4b^2 + 4bc + c^2 - 5c^2 = 4$, ou $(2b + c)^2 - 5c^2 = 4$.
Posons $d = 2b + c$. L'équation devient $d^2 - 5c^2 = 4$.
Il s'agit d'une forme de l'équation de Pell-Fermat. On sait que si une telle équation admet une solution entière strictement positive, elle en admet une infinité.
Puisque l'équation $d^2 - 5c^2 = 4$ admet la solution $(d, c) = (7, 3)$, elle admet une infinité de solutions entières strictement positives (d, c).
Si (d, c) est une solution et que c est impair, alors c^2 est impair. Donc $d^2 = 5c^2 + 4$ est

impair, d'où d est impair.

Si (d, c) est une solution et que c est pair, alors c^2 est pair. Donc $d^2 = 5c^2 + 4$ est pair, d'où d est pair.

Donc si (d, c) satisfait à l'équation $d^2 - 5c^2 = 4$, alors d et c ont la même parité et $b = \frac{1}{2}(d - c)$ est donc un entier.

De plus, puisque $d^2 = 5c^2 + 4 > c^2$, alors $d > c$, d'où $b = \frac{1}{2}(d-c)$ est un entier strictement positif.

Donc, chaque solution entière strictement positive (d, c) de l'équation $d^2 - 5c^2 = 4$ fournit une solution entière strictement positive (b, c) de l'équation $b^2 + bc - c^2 = 1$.

Il existe donc une famille infinie de nombres rationnels $u = \dfrac{b}{b+c}$ qui vérifient les conditions de l'énoncé.

Solution 2

Comme dans la solution 1, on cherche une famille infinie de nombres rationnels u tels que $0 < u < 1$, de manière que $f(u) = \dfrac{a}{a+1}$, a étant un nombre entier tel que $a > 1$.

On considère la suite de Fibonacci dans laquelle $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ lorsque $n \geq 3$.

Soit $u_n = \dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}$ pour chaque entier positif n supérieur ou égal à 2.

On remarque que $0 < F_{2n-1} < F_{2n+1}$. Donc $0 < u_n < 1$.

Par exemple, $u_2 = \dfrac{F_3}{F_5} = \dfrac{2}{5}$.

Dans ce cas, on a $f(u_2) = (\frac{2}{5} + \frac{5}{2}) - \lfloor \frac{2}{5} + \frac{5}{2} \rfloor = \frac{29}{10} - \lfloor \frac{29}{10} \rfloor = \frac{9}{10} = \frac{9}{9+1}$.

On doit démontrer que u_n n'est pas de la forme $\dfrac{a}{a+1}$ ou de la forme $\dfrac{1}{a^2+a}$:

> Si $\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} = \dfrac{a}{a+1}$, alors $aF_{2n-1} + F_{2n-1} = aF_{2n+1}$, ou $F_{2n-1} = a(F_{2n+1} - F_{2n-1})$, ou $F_{2n-1} = aF_{2n}$. Puisque a est un entier strictement positif et que $F_{2n} > F_{2n-1}$, on a une contradiction. Donc $\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} \neq \dfrac{a}{a+1}$.
>
> Si $\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} = \dfrac{1}{a^2+a}$, alors F_{2n+1} est divisible par F_{2n-1}. Or, F_{j+1} et F_{j-1} n'admettent jamais un diviseur commun supérieur à 1. On a donc une contradiction. Donc $\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} \neq \dfrac{1}{a^2+a}$. (Si F_{j+1} et F_{j-1} avaient un diviseur commun supérieur à 1, alors $F_j = F_{j+1} - F_{j-1}$ admettrait aussi ce diviseur. On pourrait utiliser l'équation $F_{j-2} = F_j - F_{j-1}$ pour montrer que F_{j-2} admettrait aussi ce diviseur, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on montre que F_2 et F_1 admettraient aussi ce diviseur. Puisque $F_2 = F_1 = 1$, on a une contradiction.)

De façon générale, on remarque que :

$$\begin{aligned}
u_n + \frac{1}{u_n} &= \frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} \\
&= \frac{(F_{2n-1})^2 + (F_{2n+1})^2}{F_{2n-1}F_{2n+1}} \\
&= \frac{(F_{2n-1})^2 + (F_{2n} + F_{2n-1})^2}{F_{2n-1}(F_{2n} + F_{2n-1})} \\
&= \frac{2(F_{2n-1})^2 + 2F_{2n}F_{2n-1} + (F_{2n})^2}{(F_{2n-1})^2 + F_{2n}F_{2n-1}} \\
&= 2 + \frac{(F_{2n})^2}{(F_{2n-1})^2 + F_{2n}F_{2n-1}} \\
&= 2 + \frac{(F_{2n})^2}{F_{2n-1}F_{2n+1}}
\end{aligned}$$

On sait que $(F_{2n})^2 - F_{2n-1}F_{2n+1} = -1$ pour tous les entiers strictement positifs n. (Une preuve est fournie à la fin.)
Soit $a_n = (F_{2n})^2$, ce qui est un entier strictement positif.
Donc $u_n + \dfrac{1}{u_n} = 2 + \dfrac{a_n}{a_n + 1}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
f(u_n) &= \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - \left\lfloor u_n + \frac{1}{u_n} \right\rfloor \\
&= \left(2 + \frac{a_n}{a_n + 1}\right) - \left\lfloor 2 + \frac{a_n}{a_n + 1} \right\rfloor \\
&= \left(2 + \frac{a_n}{a_n + 1}\right) - 2 \\
&= \frac{a_n}{a_n + 1}
\end{aligned}$$

Donc, la famille infinie de nombres rationnels u_n vérifie les propriétés demandées.

Pour terminer, on prouve que $(F_m)^2 - F_{m-1}F_{m+1} = (-1)^{m+1}$ pour tous les entiers strictement positifs m, $m \geq 2$.
On fait appel au raisonnement par récurrence.
Lorsque $m = 2$, on a $(F_2)^2 - F_1F_3 = 1^2 - 1(2) = -1 = (-1)^{2+1}$. L'identité est donc vérifiée pour $m = 2$.
Supposons qu'elle est vérifiée pour $m = k$, k étant un entier quelconque, $k \geq 2$.
On a donc $(F_k)^2 - F_{k-1}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$.

On considère $m = k + 1$. On a :

$$\begin{aligned}
(F_{k+1})^2 - F_k F_{k+2} &= (F_k + F_{k-1})^2 - F_k(F_k + F_{k+1}) \\
&= (F_k)^2 + 2F_k F_{k-1} + (F_{k-1})^2 - (F_k)^2 - F_k F_{k+1} \\
&= 2F_k F_{k-1} + (F_{k-1})^2 - F_k F_{k+1} \\
&= 2F_k F_{k-1} + (F_{k-1})^2 - F_k(F_k + F_{k-1}) \\
&= 2F_k F_{k-1} + (F_{k-1})^2 - (F_k)^2 - F_k F_{k-1} \\
&= F_k F_{k-1} + (F_{k-1})^2 - (F_k)^2 \\
&= F_{k-1}(F_k + F_{k-1}) - (F_k)^2 \\
&= F_{k-1} F_{k+1} - (F_k)^2 \\
&= (-1)((F_k)^2 - F_{k-1} F_{k+1}) \\
&= (-1)(-1)^{k+1} \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

Donc, l'identité est vérifiée pour $m = k + 1$.
Donc, $(F_m)^2 - F_{m-1}F_{m+1} = (-1)^{m+1}$ est vérifiée pour tous les entiers m, $m \geq 2$.
Donc $(F_{2k})^2 - F_{2k-1}F_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$.