The Canadian Mathematical Society

La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

le mercredi 25 novembre 2009

Solutions

Partie A

1.
$$\begin{aligned}
&-1+2-3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16-17+18\\
&= (2-1)+(4-3)+(6-5)+(8-7)+(10-9)+(12-11)+\\
&\qquad (14-13)+(16-15)+(18-17)\\
&= 1+1+1+1+1+1+1+1+1\\
&= 9
\end{aligned}$$

Réponse : 9

2. On utilise la valeur positionnelle des chiffres pour représenter 5073 :
$5 \times 1000 + 7 \times 10 + 3$ ou $5 \times 10^3 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$
Si $a = 0$, $b = 3$ et $c = 1$, alors le membre de gauche de l'équation donnée
(c.-à-d. $3 \times 10^a + 5 \times 10^b + 7 \times 10^c$) est égal à 5073.
Aucune autre combinaison des valeurs de a, b et c ne peut donner 5073.
Donc $a + b + c = 0 + 3 + 1$, ou $a + b + c = 4$.

(On peut démontrer que la seule possibilité est $a = 0$, $b = 3$ et $c = 1$. On remarque d'abord que si on divise le membre de droite par 10, il y a un reste de 3. Donc, si on divise le membre de gauche par 10, il doit y avoir un reste de 3. Si $a = 0$ et si b et c sont supérieurs à 0, alors dans le membre de gauche, le reste sera égal à 3. Si, en plus de $a = 0$, on a $b = 0$ et/ou $c = 0$, on peut vérifier toutes les possibilités pour conclure que le reste ne peut être égal à 3.
Donc, on doit avoir $a = 0$ et b et c doivent être strictement positifs.
On peut ensuite soustraire 3 de chaque membre de l'équation et diviser chaque membre par 10 pour obtenir la nouvelle équation

$$5 \times 10^{b-1} + 7 \times 10^{c-1} = 507$$

et répéter le même argument pour obtenir $c = 1$, puis $b = 3$.)

Réponse : 4

3. *Solution 1*
Supposons que Santo a d pièces de 10 ¢.
Puisqu'il a 10 pièces de monnaie en tout, il a $10 - d$ pièces de 25 ¢.
Les pièces de 10 ¢ valent $10d$ cents et les pièces de 25 ¢ valent $25(10 - d)$ cents.
On veut que la valeur des pièces de 10 ¢ soit plus grande que la valeur des pièces de 25 ¢. Donc :

$$\begin{aligned}
10d &> 25(10-d)\\
10d &> 250-25d\\
35d &> 250\\
7d &> 50\\
d &> \tfrac{50}{7} = 7\tfrac{1}{7}
\end{aligned}$$

Puisque d est un entier, alors $d \geq 8$. Donc, le plus petit nombre possible de pièces de 10 ¢ qu'il pourrait avoir est 8.

Solution 2

On procède par tâtonnements de façon systématique.

Si Santo a 4 pièces de 25 ¢ et 6 pièces de 10 ¢, les pièces de 25 ¢ ont une valeur de 100 cents (4×25) et les pièces de 10 ¢ ont une valeur de 60 cents (6×10). (Un plus petit nombre de pièces de 10 ¢ réduirait leur valeur totale et augmenterait la valeur totale des pièces de 25 ¢. Donc, le nombre de pièces de 10 ¢ doit être supérieur à 6.)

Si Santo a 3 pièces de 25 ¢ et 7 pièces de 10 ¢, les pièces de 25 ¢ ont une valeur de 75 cents (3×25) et les pièces de 10 ¢ ont une valeur de 70 cents (7×10).

Si Santo a 2 pièces de 25 ¢ et 8 pièces de 10 ¢, les pièces de 25 ¢ ont une valeur de 50 cents (2×25) et les pièces de 10 ¢ ont une valeur de 80 cents (8×10).

Donc, le plus petit nombre possible de pièces de 10 ¢ qu'il pourrait avoir est 8.

Réponse : 8

4. *Solution 1*

D'après la condition donnée, on veut que 15×12 (c.-à-d. 180) soit divisible par n, que $15n$ soit divisible par 12 et que $12n$ soit divisible par 15.

$15n$ est divisible par 12 si $15n$ est un multiple de 12, c'est-à-dire s'il existe un entier strictement positif m tel que $15n = 12m$, ou $5n = 4m$.

Dans cette équation, le membre de droite est divisible par 4. Le membre de gauche doit l'être aussi. Donc, n doit être divisible par 4.

$12n$ est divisible par 15 s'il existe un entier strictement positif k tel que $12n = 15k$, ou $4n = 5k$.

Dans cette équation, le membre de droite est divisible par 5. Le membre de gauche doit l'être aussi. Donc, n doit être divisible par 5.

Donc, n doit être un multiple de 4 et de 5. Il doit donc être un multiple de 20.

Puisqu'on cherche la plus petite valeur positive possible de n, on choisit provisoirement $n = 20$. On doit vérifier.

Si $n = 20$, 15×12 (c.-à-d. 180) est bien divisible par 20, 15×20 (c.-à-d. 300) est bien divisible par 12 et 12×20 (c.-à-d. 240) est bien divisible par 15.

Donc, la plus petite valeur possible de n est 20.

(On aurait pu, à la place, commencer par la condition que 180 doit être divisible par n, écrire tous les diviseurs positifs de 180, puis vérifier chacun, en commençant par le plus petit et en procédant en ordre croissant, jusqu'à ce que l'on trouve un diviseur qui vérifie les deux autres conditions.)

Solution 2

On écrit d'abord 12 et 15 en factorisation première : $12 = 2^2 \cdot 3$ et $15 = 3 \cdot 5$.

Puisque 12 est un diviseur de $15n$, que 12 est divisible par 2^2 et que 15 n'est pas divisible par 2, alors n doit être divisible par 2^2.

Puisque 15 est un diviseur de $12n$, que 15 est divisible par 5 et que 12 ne l'est pas, alors n doit être divisible par 5.

Puisque n est un diviseur de 12×15, c.-à-d. de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, alors n ne peut admettre plus de deux facteurs 2 et un facteur 5 (car 12×15 admet exactement deux facteurs 2 et un facteur 5).

Donc, n doit être égal à $2^2 \cdot 5$, ou 20.

Réponse : 20

5. *Solution 1*

Puisque Maya traverse 20 ponts, elle visite 21 îles en tout. On représente les suites par une suite de 21 lettres en commençant par la lettre A.

Lorsque Maya est sur l'île A ou sur l'île C, elle n'a d'autre choix que de se rendre sur l'île B, puisque c'est la seule île reliée à l'île A et la seule île reliée à l'île C.

Lorsque Maya est sur l'île B, elle a deux choix, soit de se rendre sur l'île A ou de se rendre sur l'île C.

Puisque Maya commence sur l'île A et qu'elle n'a d'autre choix que de se rendre sur l'île B, la deuxième lettre de la suite doit être un B.

La troisième lettre peut être un A ou un C, puisque Maya a deux choix à partir de l'île B.

Une fois rendue sur l'île A ou sur l'île C, elle doit revenir sur l'île B. Donc, la quatrième lettre est un B.

Elle se retrouve dans la même situation qu'au départ. Il y a donc une régularité.

À partir de la troisième lettre, la lettre dans une position impaire peut être un A ou un C, tandis que la lettre dans n'importe quelle position paire doit être un B.

On peut représenter la suite de lettres comme suit :

$$A\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}\ B\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}$$

Il y a 10 positions dans la suite où Maya a 2 choix. Les autres positions sont fixes.

Le nombre de suites possibles des îles que Maya pourrait visiter est égal à 2^{10}, ou 1024.

Solution 2

Soit S_n le nombre de suites qui commencent dans l'île A et qui comprennent n traversées de ponts. On cherche S_{20}.

On remarque que $S_2 = 2$ (les seules suites sont de A à B à A et de A à B à C).

On remarque le nombre de suites d'une longueur particulière qui commencent par A est le même que le nombre de suites de la même longueur qui commencent par C.

Supposons que Maya s'apprête à faire un trajet de t traversées, t étant un nombre pair ($t \geq 4$). Il y a S_t telles suites possibles.
Après 2 traversées, Maya peut se retrouver sur l'île A ou sur l'île C et il lui resterait $t-2$ traversées à faire.
Or, qu'elle commence dans l'île A ou dans l'île C, il y aurait S_{t-2} suites qu'elle pourrait suivre.
Donc $S_t = S_{t-2} + S_{t-2} = 2S_{t-2}$. Or :

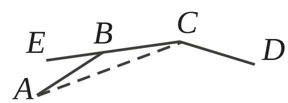
$$S_{20} = 2S_{18} = 2(2S_{16}) = 2^2 S_{16} = 2^3 S_{14} = \cdots = 2^9 S_2 = 2^9(2) = 2^{10} = 1024$$

Le nombre de suites possibles des îles qu'elle pourrait visiter est égal à 2^{10}, ou 1024.

Réponse : 2^{10} ou 1024

6. *Solution 1*

Soit n le nombre de côtés du polygone.
On prolonge le côté CB vers l'extérieur du polygone. Puisque la somme des mesures des angles extérieurs d'un polygone est toujours égale à 360°, alors $\angle ABE = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, puisqu'il y a n angles extérieurs de même mesure.



Donc $\angle ABC = 180° - \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$. Puisque le polygone est régulier, cette mesure est aussi celle de l'angle BCD.
Puisque le polygone est régulier, $AB = BC$ et le triangle ABC est isocèle.
Donc $\angle BAC = \angle BCA$. Donc :

$$\angle BCA = \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = \frac{1}{2}\left(180° - \left(180° - \left(\frac{360}{n}\right)^\circ\right)\right) = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

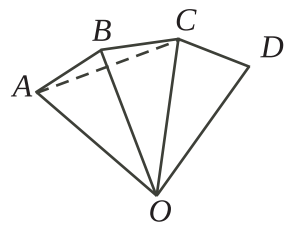
Or $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$. Donc :

$$\begin{aligned} 180° - \left(\frac{360}{n}\right)^\circ &= \left(\frac{180}{n}\right)^\circ + 120° \\ 60 &= \frac{540}{n} \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Le polygone a donc 9 côtés.

Solution 2

Soit n le nombre de côtés du polygone et O le centre du polygone.
On joint O aux sommets A, B, C et D.
Puisque le polygone est régulier, alors les angles au centre interceptés par les n côtés sont congrus et la somme de leur mesure est égale à 360°.



Donc $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$.

Donc $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 2\left(\frac{360}{n}\right)^\circ = \left(\frac{720}{n}\right)^\circ$.

Puisque le polygone est régulier, alors $OA = OC = OD$. Donc, les triangles AOC et COD sont isocèles. Donc :

$$\angle ACO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \left(\frac{720}{n}\right)^\circ\right) = 90^\circ - \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$$

et

$$\angle DCO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle COD) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \left(\frac{360}{n}\right)^\circ\right) = 90^\circ - \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

Or $\angle ACD = \angle ACO + \angle DCO$. Donc :

$$\begin{aligned} 120^\circ &= 90^\circ - \left(\frac{360}{n}\right)^\circ + 90^\circ - \left(\frac{180}{n}\right)^\circ \\ \frac{540}{n} &= 60 \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Le polygone a donc 9 côtés.

Réponse : 9

7. On utilise les lois des logarithmes :

$$\begin{aligned} \log_2(-3\sin\theta) &= 2\log_2(\cos\theta) + 1 \\ \log_2(-3\sin\theta) &= \log_2(\cos^2\theta) + \log_2 2 \\ \log_2(-3\sin\theta) &= \log_2(2\cos^2\theta) \\ 2^{\log_2(-3\sin\theta)} &= 2^{\log_2(2\cos^2\theta)} \\ -3\sin\theta &= 2\cos^2\theta \\ -3\sin\theta &= 2(1-\sin^2\theta) \qquad \text{(selon l'identité de Pythagore)} \\ 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ (2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ ou $\sin\theta = 2$.

La deuxième équation n'admet aucune solution. Donc $\sin\theta = -\frac{1}{2}$.

Puisque $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ et que $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, alors $\theta = 210^\circ$ ou $\theta = 330^\circ$.

Or, il faut que $\cos\theta > 0$, puisque les arguments des logarithmes de l'équation donnée doivent

être positifs.
On rejette $\theta = 210°$ (puisque le le cosinus d'un angle du troisième quadrant est négatif). On admet $\theta = 330°$ (puisque le cosinus d'un angle du quatrième quadrant est positif).
On vérifie : Puisque $\sin(330°) = -\frac{1}{2}$ et $\cos(330°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le membre de gauche de l'équation donnée est égal à $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ et le membre de droite est égal à $2\log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1$, ou $\log_2\left(\frac{3}{4}\right)+\log_2(2)$, ou $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$. Les deux membres ont la même valeur.
Donc $\theta = 330°$.

RÉPONSE : 330°

8. On considère trois cas : $b = c$, $b > c$ et $b < c$
Puisque $a! > 4(b!)$ et $a! > 10(c!)$, alors $a > b$ et $a > c$ (dans chacun des trois cas).

1^er cas : $b = c$
L'équation devient $a! = 14(b!)$, ou $\dfrac{a!}{b!} = 14$, ou $a(a-1)\cdots(b+2)(b+1) = 14$.
L'expression du membre de gauche représente soit un seul facteur, soit un produit de deux entiers consécutifs ou plus. Puisque $14 = 2(7)$, l'expression du membre de gauche ne peut pas représenter un produit de deux entiers consécutifs ou plus. Elle représente donc un seul facteur. Dans le membre de gauche, on a donc $a = b + 1$ (c.-à-d. que le premier facteur et le dernier facteur de l'expression sont identiques).
L'équation devient donc $a = 14$ et $b + 1 = 14$, d'où $b = c = 13$.
Dans ce cas, la solution unique est $(a, b, c) = (14, 13, 13)$.

2^e cas : $b > c$
On divise chaque membre de l'équation par $b!$. On obtient $\dfrac{a!}{b!} = 4 + \dfrac{10(c!)}{b!}$ ou :

$$a(a-1)\cdots(b+2)(b+1) = 4 + \frac{10}{b(b-1)\cdots(c+2)(c+1)}$$

Puisque le membre de gauche est un entier, le membre de droite doit l'être aussi. Donc

$$\frac{10}{b(b-1)\cdots(c+2)(c+1)}$$

est un entier. Donc, 10 est divisible par $b(b-1)\cdots(c+2)(c+1)$, qui représente soit un seul facteur, soit un produit de deux entiers consécutifs ou plus, chacun supérieur ou égal à 2 (puisque $c \geq 1$).
L'expression est donc égale à 10, à 5 ou à 2, c'est-à-dire qu'elle représente un seul facteur.
On a donc $b = c + 1 = 10$ (d'où $b = 10$ et $c = 9$), $b = c + 1 = 5$ (d'où $b = 5$ et $c = 4$) ou $b = c + 1 = 2$ (d'où $b = 2$ et $c = 1$).
Si $b = 10$ et $c = 9$, le membre de droite de l'équation initiale devient $4(10!) + 10(9!)$, ce qui est égal à $5(10!)$. Ce nombre n'est pas une factorielle, puisqu'il est supérieur à $10!$ et inférieur

à 11!. Il n'y a donc aucune valeur correspondante de a.
Si $b = 5$ et $c = 4$, le membre de droite de l'équation initiale devient $4(5!) + 10(4!)$, ce qui est égal à $600 + 120$, ou 720, ou 6!. Donc $a = 6$.
Si $b = 2$ et $c = 1$, le membre de droite de l'équation initiale devient $4(2!) + 10(1!)$, ce qui est égal à 18. Ce nombre n'est pas une factorielle, puisqu'il est supérieur à 3! et inférieur à 4!. Il n'y a donc aucune valeur correspondante de a.
Dans ce cas, la solution unique est $(a, b, c) = (6, 5, 4)$.

<u>3^e cas : $b < c$</u>
On divise chaque membre de l'équation par $c!$. On obtient $\frac{a!}{c!} = \frac{4(b!)}{c!} + 10$ ou :

$$a(a-1)\cdots(c+2)(c+1) = \frac{4}{c(c-1)\cdots(b+2)(b+1)} + 10$$

Puisque le membre de gauche est un entier, le membre de droite doit l'être aussi. Donc

$$\frac{4}{c(c-1)\cdots(b+2)(b+1)}$$

est un entier. Donc, 4 est divisible par $c(c-1)\cdots(b+2)(b+1)$, qui représente soit un seul facteur, soit un produit de deux entiers consécutifs ou plus, chacun supérieur ou égal à 2 (puisque $b \geq 1$).
L'expression est donc égale à 4 ou à 2, c'est-à-dire qu'elle représente un seul facteur.
On a donc $c = b + 1 = 4$ (d'où $c = 4$ et $b = 3$) ou $c = b + 1 = 2$ (d'où $c = 2$ et $b = 1$).
Si $c = 4$ et $b = 3$, le membre de droite de l'équation initiale devient $4(3!)+10(4!)$, ce qui est égal à $4! + 10(4!)$, ou $11(4!)$. Ce nombre n'est pas une factorielle, puisqu'il est supérieur à $5! = 5(4!)$ et inférieur à $6! = 30(4!)$. Il n'y a donc aucune valeur correspondante de a.
Si $c = 2$ et $b = 1$, le membre de droite de l'équation initiale devient $4(1!) + 10(2!)$, ce qui est égal à 24, ou 4!. Donc $a = 4$. Dans ce cas, la solution unique est $(a, b, c) = (4, 1, 2)$.

Les trois solutions sont donc $(14, 13, 13)$, $(6, 5, 4)$ et $(4, 1, 2)$.

Réponse : $(14, 13, 13)$, $(6, 5, 4)$ et $(4, 1, 2)$

Partie B

1. (a) *Solution 1*

   D'après le théorème de Pythagore, puisque $AC > 0$,

   $$AC = \sqrt{CB^2 - AB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$$

   Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AB)(AC)$, ou $\frac{1}{2}(9)(12)$, ou 54.

   Solution 2

   Puisque le triangle ABC est rectangle en A et que $AB : CB = 9 : 15 = 3 : 5$, alors le triangle ABC est semblable au triangle remarquable $3 : 4 : 5$.
   Donc $AC = \frac{4}{3}AB$, d'où $AC = \frac{4}{3}(9)$, ou $AC = 12$.
   Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(AB)(AC)$, ou $\frac{1}{2}(9)(12)$, ou 54.

   (b) D'après la partie (a), $AC = 12$.
   Puisque le triangle CDB a une aire de 84, alors $\frac{1}{2}(DB)(AC) = 84$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(DB)(12) = 84$, d'où $6(DB) = 84$, ou $DB = 14$.
   Donc $DA = DB - AB$, d'où $DA = 14 - 9$, ou $DA = 5$.
   D'après le théorème de Pythagore, puisque $CD > 0$:

   $$CD = \sqrt{DA^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

   (c) Puisque le triangle PQR a une aire de 300, alors $\frac{1}{2}(QR)(PT) = 300$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(25)(PT) = 300$, d'où $25(PT) = 600$, ou $PT = 24$.
   D'après le théorème de Pythagore, puisque $QT > 0$:

   $$QT = \sqrt{PQ^2 - PT^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$$

   Donc $TR = QR - QT$, d'où $TR = 25 - 7$, ou $TR = 18$.
   Dans le triangle PTR, on a $PT = 24$, $\angle PTR = 90°$ et $TR = 18$.
   D'après le théorème de Pythagore, puisque $PR > 0$:

   $$PR = \sqrt{PT^2 + TR^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30$$

2. (a) La droite qui passe aux points Q et M a une pente égale à $\dfrac{7-1}{4-19}$, ou $\dfrac{6}{-15}$, ou $-\dfrac{2}{5}$.
   Elle a donc pour équation $y - 7 = -\frac{2}{5}(x - 4)$, ou $y = -\frac{2}{5}x + \frac{43}{5}$.

   (b) *Solution 1*

   Le milieu N du côté PQ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(7 + 19), \frac{1}{2}(13 + 1)\right)$, ou $(13, 7)$.
   La droite qui passe aux points R et N a une pente égale à $\dfrac{7-1}{13-1}$, ou $\dfrac{6}{12}$, ou $\dfrac{1}{2}$.
   Elle a donc pour équation $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$, ou $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
   Au point d'intersection de ces droites, les valeurs de y sont égales. Donc :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2} &= -\tfrac{2}{5}x+\tfrac{43}{5}\\ \tfrac{5}{10}x+\tfrac{4}{10}x &= \tfrac{86}{10}-\tfrac{5}{10}\\ \tfrac{9}{10}x &= \tfrac{81}{10}\\ x &= 9\end{aligned}$$

Puisque l'abscisse de G est égale à 9, l'ordonnée est égale à $\frac{1}{2}(9)+\frac{1}{2}$, ou $\frac{10}{2}$, ou 5.
G a donc pour coordonnées $(9,5)$.

Solution 2
Puisque G est le point d'intersection de deux médianes du triangle PQR, il est le centre de gravité du triangle PQR. (Les trois médianes sont concourantes en G.)
Les coordonnées du centre de gravité sont égales aux moyennes des coordonnées relatives des sommets. G a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}(7+1+19), \frac{1}{3}(13+1+1)\right)$, ou $(9,5)$.

(c) *Solution 1*
La pente de PR est égale à $\dfrac{13-1}{7-1}$, ou $\dfrac{12}{6}$, ou 2.
Puisque QF est perpendiculaire à PR, sa pente est l'opposé de la réciproque de 2, soit $-\frac{1}{2}$.
La droite qui passe aux points Q et F a donc pour équation $y-1=-\frac{1}{2}(x-19)$, ou $y=-\frac{1}{2}x+\frac{21}{2}$.
La pente de PQ est égale à $\dfrac{13-1}{7-19}$, ou $\dfrac{12}{-12}$, ou -1.
Puisque RT est perpendiculaire à PQ, sa pente est l'opposé de la réciproque de -1, soit 1.
La droite qui passe aux points R et T a donc pour équation $y-1=1(x-1)$, ou $y=x$.
Au point d'intersection de ces droites, les valeurs de y sont égales. Donc :

$$\begin{aligned}x &= -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{21}{2}\\ \tfrac{3}{2}x &= \tfrac{21}{2}\\ x &= 7\end{aligned}$$

Puisque l'abscisse de H est égale à 7, son ordonnée est égale à 7, puisque H est situé sur la droite d'équation $y=x$.
Donc, H a pour coordonnées $(7,7)$.

Solution 2
Les trois hauteurs du triangle PQR sont concourantes en H.
Puisque le côté QR du triangle PQR est horizontal, alors la hauteur au sommet P doit être verticale.
Puisque Q a une abscisse de 7, la hauteur au sommet P a donc pour équation $x=7$.
Comme dans la solution 1, on détermine l'équation d'une deuxième hauteur, par exemple, celle qui passe aux points R et T. On obtient $y=x$.
Le point H est le point d'intersection des droites d'équations $y=x$ et $x=7$. Ses coordonnées sont $(7,7)$.

(d) La distance du point $O(0,0)$ au point G est égale à $\sqrt{(9-0)^2+(5-0)^2}$, ou $\sqrt{81+25}$, ou $\sqrt{106}$.
La distance du point O au point H est égale à $\sqrt{(7-0)^2+(7-0)^2}$, ou $\sqrt{49+49}$, ou $\sqrt{98}$.
Puisque $\sqrt{98} < \sqrt{106}$, alors H est plus près de l'origine que ne l'est G.

3. (a) On cherche les nombres réels c tels que $f(c)=c$, c'est-à-dire $c^2-2=c$, ou $c^2-c-2=0$, ou $(c-2)(c+1)=0$.
Donc $c=2$ ou $c=-1$. Les points fixes réels sont 2 et -1.

(b) *Solution 1*
Soit $g(x)=ax^3+bx^2+dx+e$, a, b, c et d étant des coefficients réels et $a \neq 0$ (puisque $g(x)$ est un polynôme du 3ᵉ degré). Supposons que f et g sont commutables (c'est-à-dire que $f(g(x))=g(f(x))$ pour tous les nombres réels x). Or :

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= f(ax^3+bx^2+dx+e)\\
&= (ax^3+bx^2+dx+e)^2-2\\
&= a^2x^6+b^2x^4+d^2x^2+e^2+2abx^5+2adx^4+2aex^3+2bdx^3+2bex^2+2dex-2\\
&= a^2x^6+2abx^5+(b^2+2ad)x^4+(2ae+2bd)x^3+(d^2+2be)x^2+2dex+(e^2-2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(x^2-2)\\
&= a(x^2-2)^3+b(x^2-2)^2+d(x^2-2)+e\\
&= a(x^6-6x^4+12x^2-8)+b(x^4-4x^2+4)+d(x^2-2)+e\\
&= ax^6+(-6a+b)x^4+(12a-4b+d)x^2+(-8a+4b-2d+e)
\end{aligned}$$

Puisque $f(g(x))=g(f(x))$ pour tous les nombres réels x, les coefficients correspondants doivent être identiques. Donc :

$$\begin{aligned}
a^2 &= a && (1)\\
2ab &= 0 && (2)\\
b^2+2ad &= -6a+b && (3)\\
2ae+2bd &= 0 && (4)\\
d^2+2be &= 12a-4b+d && (5)\\
2de &= 0 && (6)\\
e^2-2 &= -8a+4b-2d+e && (7)
\end{aligned}$$

D'après (1), $a^2-a=0$, ou $a(a-1)=0$, d'où $a=1$ ou $a=0$. Puisque $a \neq 0$, alors $a=1$.
On reporte $a=1$ dans (2). On obtient $2b=0$, ou $b=0$.
On reporte $a=1$ et $b=0$ dans (3). On obtient $0+2(1)d=-6(1)+0$, d'où $2d=-6$, ou $d=-3$.

On reporte $d = -3$ dans (6). On obtient $-6e = 0$, ou $e = 0$.
On peut vérifier que $a = 1$, $b = 0$, $d = -3$ et $e = 0$ satisfont aux équations (4), (5) et (7).
Donc $g(x) = 1x^3 + 0x^2 + (-3)x + 0$, ou $g(x) = x^3 - 3x$ est le seul polynôme du 3e degré pour lequel f et g sont commutables.
(On peut vérifier que $(x^3 - 3x)^2 - 2 = (x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2)$ en développant et en réduisant.)

Solution 2
Soit $g(x) = ax^3 + bx^2 + dx + e$, a, b, c et d étant des coefficients réels et $a \neq 0$ (puisque $g(x)$ est un polynôme du 3e degré). Supposons que f et g sont commutables (c'est-à-dire que $f(g(x)) = g(f(x))$ pour tous les nombres réels x). Or :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(ax^3 + bx^2 + dx + e) \\ &= (ax^3 + bx^2 + dx + e)^2 - 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2 - 2) \\ &= a(x^2 - 2)^3 + b(x^2 - 2)^2 + d(x^2 - 2) + e \end{aligned}$$

Puisque $f(g(x)) = g(f(x))$ pour tous les nombres réels x, les coefficients correspondants doivent être identiques lorsque les expressions sont développées et réduites.
Dans le membre de gauche, le seul terme qui comporte x^6 provient du carré du terme ax^3. Le coefficient de x^6 est donc a^2.
Dans le membre de droite, le seul terme qui comporte x^6 provient de $a(x^2 - 2)^3$. Puisque le coefficient de x^6 dans le développement de $(x^2 - 2)^3$ est 1, le coefficient de x^6 dans le membre de droite est égal à a.
On a donc $a^2 = a$, ou $a^2 - a = 0$, ou $a(a - 1) = 0$, d'où $a = 1$ ou $a = 0$. Puisque $a \neq 0$, alors $a = 1$.
Le développement du membre de droite ne contient que des puissances paires de x.
Donc, le développement du membre de gauche ne contiendra aucune puissance impaire de x. Or, le déloppement du membre de gauche contient le terme $2abx^5$.
Donc $2ab = 0$. Puisque $a = 1$, alors $b = 0$. On a donc :

$$(x^3 + dx + e)^2 - 2 = (x^2 - 2)^3 + d(x^2 - 2) + e$$

Dans le membre de gauche, le terme qui comporte x^4 provient du produit de x^3 et de dx. Ce terme est donc égal à $2dx^4$. Dans le membre de droite, le terme qui comporte x^4 provient du développement de $(x^2 - 2)^3$. Il est donc égal à $3(-2)(x^2)^2$, ou $-6x^4$.
On compare les coefficients pour obtenir $2d = -6$, ou $d = -3$.
Puisque le membre de droite ne contient aucun terme comportant x^1, le coefficient de x dans le membre de gauche est égal à 0.
Lorsqu'on aura développé et réduit l'expression $(x^3 - 3x + e)^2 - 2$, le terme qui comporte

x^1 sera égal à $2(-3x)e$, ou $-6ex$. Donc $-6e = 0$, ou $e = 0$.
Donc $g(x) = 1x^3 + 0x^2 + (-3)x + 0$, ou $g(x) = x^3 - 3x$ est le seul polynôme du 3$^{\text{e}}$ degré pour lequel f et g sont commutables.
(On peut vérifier que $(x^3-3x)^2-2 = (x^2-2)^3-3(x^2-2)$ en développant et en réduisant.)

(c) On cherche un point fixe réel c de la fonction q, c'est-à-dire un nombre réel c tel que $q(c) = c$.
Puisque p et q sont commutables, alors $p(q(x)) = q(p(x))$ pour tous les nombres réels x.
Donc $p(q(c)) = q(p(c))$. Puisque $q(c) = c$, cette équation devient $p(c) = q(p(c))$.
Puisque l'identité donnée est vérifiée par toutes les valeurs possibles de x, elle est vérifiée par $x = c$. Donc :

$$\begin{aligned}
2\,[q(p(c))]^4 + 2 &= [p(c)]^4 + [p(c)]^3 \\
2\,[p(c)]^4 + 2 &= [p(c)]^4 + [p(c)]^3 \qquad \text{(d'après l'équation ci-haut)} \\
[p(c)]^4 - [p(c)]^3 &= -2
\end{aligned}$$

Soit $u = p(c)$. On remarque que u est un nombre réel, puisque c est un nombre réel et que les coefficients de $p(x)$ sont réels.
Pour obtenir une contradiction, on démontre que l'équation $u^4 - u^3 = -2$ n'admet aucune solution réelle.
On considère trois cas, soit $u \geq 1$, $u \leq 0$ et $0 < u < 1$.
Si $u \geq 1$, alors $u^4 = u(u^3) \geq 1(u^3) = u^3$. Donc $u^4 - u^3 \geq 0$, d'où $u^4 - u^3 \neq -2$.
Si $u \leq 0$, alors $u^3 \leq 0$. Donc $u^4 - u^3 \geq u^4 \geq 0$, d'où $u^4 - u^3 \neq -2$.
Si $0 < u < 1$, alors $u^4 > 0$ et $u^3 < 1$, d'où $-u^3 > -1$. Donc $u^4 - u^3 > 0 + (-1) = -1$, d'où $u^4 - u^3 \neq -2$.
Dans chaque cas, on a $u^4 - u^3 \neq -2$.
L'équation $q(c) = c$ n'admet donc aucune solution réelle.
Donc, la fonction q n'admet aucun point fixe.

4. (a) On cherche tous les entiers strictement positifs a pour lequel $s = 8$ est le plus petit entier strictement positif s tel que a est un diviseur de $1 + 2 + 3 + \cdots + s$.
On remarque que $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$. (Les nombres obtenus en additionnant une expression de la forme $1 + 2 + 3 + \cdots + s$ sont appelés *nombres triangulaires*.) Les sept premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15, 21 et 28. On cherche donc tous les entiers strictement positifs a qui sont des diviseurs de 36, mais qui ne sont pas des diviseurs de 1, 3, 6, 10, 15, 21 ou 28.
Or, les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.
Les diviseurs 1, 2, 3, 4 et 6 de 36 sont des diviseurs de 6 ou de 28. Donc $f(1) \neq 8$, $f(2) \neq 8$, $f(3) \neq 8$, $f(4) \neq 8$ et $f(6) \neq 8$.
Les diviseurs 9, 12, 18 et 36 de 36 ne sont pas des diviseurs d'un nombre triangulaire

inférieur à 36.

Donc, les entiers strictement positifs a pour lesquels $f(a) = 8$ sont 9, 12, 18 et 36.

(b) Soit un entier strictement positif m et soit $T(m)$ le $m^{\text{ième}}$ nombre triangulaire. On a donc $T(m) = 1 + 2 + \cdots + m = \frac{1}{2}m(m+1)$.

On montre d'abord que si $T(z)$ est un multiple de w, alors $f(w) \leq z$:

On sait que $f(w)$ est le plus petit entier m pour lequel $T(m)$ est un multiple de w. Supposons que $T(z)$ est un multiple de w. Si z est le plus petit entier pour lequel $T(z)$ est un multiple de w, on a $f(w) = z$. Si z n'est pas ce plus petit entier, alors $f(w) < z$.

Dans les deux cas, $f(w) \leq z$.

Ensuite, on démontre que si y est un entier positif impair et que $y > 1$, alors $f(y) \leq y-1$:

Soit $y = 2Y + 1$, Y étant un entier strictement positif.

Donc $T(y-1) = \frac{1}{2}(y-1)y = \frac{1}{2}(2Y)(2Y+1) = Y(2Y+1) = Yy$.

Donc, $T(y-1)$ est un multiple de y et selon ce qui précède, $f(y) \leq y - 1$.

Enfin, on démontre que pour tout entier strictement positif a, $f(2^a) = 2^{a+1} - 1$:

Soit $f(2^a) = m$.

Par définition, $\frac{1}{2}m(m+1)$ est un multiple de 2^a. Donc $\frac{1}{2}m(m+1) = q2^a$, q étant un entier strictement positif quelconque. Donc $2^{a+1}q = m(m+1)$.

Or, l'un des nombres m et $m+1$ est pair et l'autre est impair. Le nombre pair doit admettre au moins $a+1$ facteurs 2 et doit donc être supérieur ou égal à 2^{a+1}.

La plus petite valeur de m pour laquelle cela est possible est $m = 2^{a+1} - 1$, d'où $m + 1 = 2^{a+1}$.

On sait donc que $f(2^a) \geq 2^{a+1} - 1$.

Or, $T(2^{a+1}-1) = \frac{1}{2}(2^{a+1}-1)2^{a+1} = 2^a(2^{a+1}-1)$, ce qui est divisible par 2^a. Donc $f(2^a) \leq 2^{a+1} - 1$.

Donc $f(2^a) = 2^{a+1} - 1$.

On considère maintenant l'expression $f(b+1) - f(b)$, où $b = 2^a - 1$, a étant un entier strictement positif quelconque. On remarque que b est impair.

On a donc :

$$f(b+1) - f(b) = f(2^a) - f(2^a - 1) = 2^{a+1} - 1 - f(2^a - 1) \geq 2^{a+1} - 1 - (2^a - 2) = 2^a + 1$$

Si $a \geq 11$, alors $2^a + 1 \geq 2049 > 2009$.

Donc étant donné $b = 2^a - 1$, a étant un entier strictement positif tel que $a \geq 11$, alors $f(b+1) - f(b) > 2009$. Il existe donc une infinité d'entiers positifs impairs b pour lesquels $f(b+1) - f(b) > 2009$.

(c) D'après la partie (a), on sait que l'équation $f(c) = f(c+3)$ admet au moins une solution, soit $c = 9$, puisque $f(9) = 8$ et $f(12) = 8$.

On démontre que $k = 3$ est la plus petite valeur de k pour laquelle $f(c) = f(c + k)$ en montrant que les équations

$$f(c) = f(c+1) \qquad \text{et} \qquad f(c) = f(c+2)$$

n'admettent aucune solution entière positive impaire.

Soit a et b des entiers strictement positifs. On utilise la notation « $a \mid b$ » pour indiquer que b est divisible par a (c.-à-d. que b est un multiple de a ou que a est un diviseur de b).

<u>1^{er} cas : $f(c) = f(c+1)$</u>

Soit $f(c) = f(c+1) = m$, c étant un entier positif impair.

Donc $c \mid T(m)$. Or $T(m) = \frac{1}{2}m(m+1)$. On a donc $\frac{1}{2}m(m+1) = qc$, q étant un entier strictement positif.

Puisque c est impair, alors $m \leq c-1$ selon la partie (b). Donc $qc = \frac{1}{2}m(m+1) \leq \frac{1}{2}(c-1)(c)$, d'où $q \leq \frac{1}{2}(c-1)$.

Puisque $f(c+1) = m$, alors $c+1 \mid T(m)$ et $T(m) = qc$, d'où $c+1 \mid qc$.

Puisque c et $c+1$ sont des entiers consécutifs, alors leur PGCD est égal à 1.

(En effet, si d est un diviseur commun positif de c et de $c+1$, alors d est un diviseur de leur différence (qui est égale à 1) et d doit donc être égal à 1.)

Puisque $c+1 \mid qc$, que q et c sont des entiers strictement positifs et que le PGCD de c et de $c+1$ est égal à 1, alors $c+1 \mid q$, d'où $q \geq c+1$.

Or $q \leq \frac{1}{2}(c-1)$. On a une contradiction, puisqu'on ne peut avoir $q \geq c+1 > \frac{1}{2}(c-1) \geq q$.

Donc, $f(c) = f(c+1)$ n'admet aucune solution impaire.

<u>2^e cas : $f(c) = f(c+2)$</u>

Soit $f(c) = f(c+2) = m$, c étant un entier positif impair quelconque.

Donc $c \mid T(m)$, d'où $\frac{1}{2}m(m+1) = qc$, q étant un entier positif quelconque.

Puisque $m \leq c-1$ selon la section (c), alors $qc \leq \frac{1}{2}(c-1)(c)$, d'où $q \leq \frac{1}{2}(c-1)$.

Puisque $f(c+2) = m$, alors $c+2 \mid T(m)$ et $T(m) = qc$, d'où $c+2 \mid qc$.

Puisque c et $c+2$ sont des des entiers impairs, leur PGCD est égal à 1.

(En effet, si d est un diviseur commun positif de c et de $c+2$, alors c est un diviseur de leur différence (qui est égale à 2) et d doit donc être égal à 1 ou à 2. Puisque c et $c+2$ sont tous les deux impairs, d doit être impair. Donc $d = 1$.)

Puisque $c+2 \mid qc$, que q et c sont des entiers positifs et que le PGCD de c et de $c+2$ est égal à 1, alors $c+2 \mid q$, d'où $q \geq c+2$.

Or $q \leq \frac{1}{2}(c-1)$, ce qui crée une contradiction.

Donc, $f(c) = f(c+2)$ n'admet aucune solution impaire.

Donc, $k = 3$ est la plus petite valeur strictement positive de l'entier k pour laquelle $f(c) = f(c+k)$ admet une solution, puisque pour $k = 1$ ou $k = 2$, il n'y a aucune solution et qu'il y a au moins une solution lorsque $k = 3$.