The Canadian Mathematical Society La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

le mercredi 19 novembre 2008

Financière Sun Life

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*

   On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $(2x+y)+(x+2y) = 13+11$, ou $3x + 3y = 24$.

   Donc $x + y = \frac{1}{3}(24)$, ou $x + y = 8$.

   Solution 2

   On détermine d'abord la valeur de x, puis celle de y.

   Puisque $2x + y = 13$, alors $4x + 2y = 26$.

   On soustrait la deuxième équation de cette dernière, membre par membre, pour obtenir $(4x + 2y) - (x + 2y) = 26 - 11$, d'où $3x = 15$, ou $x = 5$.

   On reporte $x = 5$ dans la première des équations initiales pour obtenir $2(5) + y = 13$, d'où $y = 3$.

   Donc $x + y = 5 + 3$, ou $x + y = 8$.

   Solution 3

   On détermine d'abord la valeur de y, puis celle de x.

   Puisque $x + 2y = 11$, alors $2x + 4y = 22$.

   On soustrait la première équation de cette dernière, membre par membre, pour obtenir $(2x + 4y) - (2x + y) = 22 - 13$, d'où $3y = 9$, ou $y = 3$.

   On reporte $y = 3$ dans la deuxième des équations initiales pour obtenir $x + 2(3) = 11$, d'où $x = 5$.

   Donc $x + y = 5 + 3$, ou $x + y = 8$.

   Réponse : $x + y = 8$

2. *Solution 1*

   On remarque que $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 = 9(1 + 9^1) + 9^3(1 + 9^1) = (9 + 9^3)(1 + 9) = 10(9 + 9^3)$.

   Donc, l'entier $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4$ est divisible par 10. Son chiffre des unités est donc 0.

   Solution 2

   On calcule chaque terme : $9^2 = 81$, $9^3 = 9^2 9^1 = 81(9) = 729$ et $9^4 = 9^3 9^1 = 729(9) = 6561$.

   Donc $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 = 9 + 81 + 729 + 6561 = 90 + 7290 = 7380$.

   Donc, l'entier qui est égal à $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4$ a un chiffre des unités égal à 0.

   Solution 3

   Puisque $9^2 = 81$, son chiffre des unités est égal à 1.

   Puisque $9^3 = 9^2 9^1$, on peut déterminer le chiffre des unités de 9^3 en multipliant le chiffre des unités de 9^2 et celui de 9^1 et en choisissant le chiffre des unités de ce produit. (Cela est vrai puisque le chiffre des unités d'un produit est déterminé par les chiffres des unités des nombres multipliés.) Donc, le chiffre des unités de 9^3 est égal à 1(9), ou 9.

Puisque $9^4 = 9^2 9^2$ et que le chiffre des unités de 9^2 est 1, alors on procède de façon semblable pour conclure que le chiffre des unités de 9^4 est égal à 1(1), ou 1.

On calcule le chiffre des unités de $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4$ en additionnant les chiffres des unités des quatre termes et en choisissant le chiffre des unités de cette somme.

Donc, l'entier qui est égal à $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4$ a un chiffre des unités égal à 0.

Réponse : 0

3. Soit a, b, c et d les quatre entiers strictement positifs.

   Puisque la moyenne de ces entiers est égale à 8, alors $\dfrac{a+b+c+d}{4} = 8$, d'où $a+b+c+d = 32$.

   Disons qu'on cherche la plus grande valeur possible de d.

   On sait que $d = 32 - a - b - c = 32 - (a + b + c)$.

   Pour que la valeur de d soit aussi grande que possible, il faut que celle de $a + b + c$ soit aussi petite que possible.

   Puisque a, b et c sont des entiers strictement positifs différents, la plus petite valeur possible de $a + b + c$ est égale à $1 + 2 + 3$, ou 6.

   Donc, la plus grande valeur possible de d est égale à $32 - 6$, ou 26.

   Réponse : 26

4. On considère les triangles AED et ACB.

   Ils ont un angle commun en A.

   Puisque DE et BC sont parallèles, alors $\angle AED = \angle ACB$.

   Donc, les triangles AED et ACB sont semblables.

   Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{DE} &= \frac{AC}{BC} \\
\frac{x}{1} &= \frac{x + x^2 + 4}{6} \\
6x &= x^2 + x + 4 \\
0 &= x^2 - 5x + 4 \\
0 &= (x-1)(x-4)
\end{aligned}$$

   Donc $x = 1$ ou $x = 4$.

   (On peut vérifier que chacune de ces deux valeurs de x résulte en un triangle.)

   Réponse : $x = 1$ et $x = 4$

5. Puisque p, q, r et s sont quatre entiers consécutifs et que $p < q < r < s$, alors $r = s - 1$, $q = s - 2$ et $p = s - 3$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{3}q + \tfrac{1}{4}r &= s \\
\tfrac{1}{2}(s-3) + \tfrac{1}{3}(s-2) + \tfrac{1}{4}(s-1) &= s \\
6(s-3) + 4(s-2) + 3(s-1) &= 12s \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par 12)} \\
13s - 18 - 8 - 3 &= 12s \\
s &= 29
\end{aligned}$$

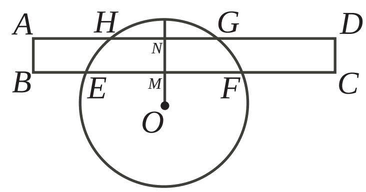
(Vérification : M.G. $= \frac{1}{2}(26) + \frac{1}{3}(27) + \frac{1}{4}(28) = 13 + 9 + 7 = 29 =$ M.D.)

Réponse : $s = 29$

6. *Solution 1*

Soit O le centre du cercle et soit M et N les milieux respectifs des segments EF et HG. On joint O et M, ainsi que M et N.

Puisque O est le centre, alors les points O, M et N sont alignés. De plus, ON est perpendiculaire à EF et à HG.



Puisque N est le milieu du segment HG, Alors $HN = \frac{1}{2}HG$, ou $HN = \frac{5}{2}$.

Donc $AN = AH + HN$, d'où $AN = 4 + \frac{5}{2}$, ou $AN = \frac{13}{2}$.

Puisque ON est perpendiculaire à AN et à BM et que AN est parallèle à BM, alors $ANMB$ est un rectangle.

Donc $BM = AN = \frac{13}{2}$.

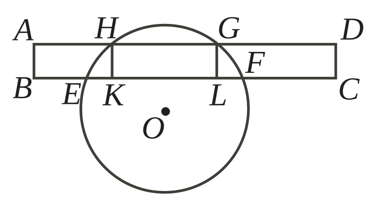
Donc :

$$EF = 2(EM) = 2(BM - BE) = 2(\tfrac{13}{2} - 3) = 2(\tfrac{7}{2}) = 7$$

Solution 2

Soit O le centre du cercle.

Aux points G et H on abaisse des perpendiculaires GL et HK à EF.



Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AHKB$, $HGLK$ et $GDCL$ sont des rectangles.

On cherche la longueur de EF. On remarque que $EF = EK + KL + LF$.

Puisque $HGLK$ est un rectangle, alors $KL = HG = 5$.

Par symétrie, on a $EK = LF$.
Or $EK = BK - BE = AH - BE = 4 - 3 = 1$.
Donc $EF = 1 + 5 + 1$, ou $EF = 7$.

Réponse : $EF = 7$

7. On dresse une liste de tous les chemins que l'étoile peut prendre jusqu'à ce qu'elle atteigne la case supérieure gauche ou qu'elle sorte de la grille. On utilise "G" pour indiquer un déplacement d'une case vers la gauche et "H" pour indiquer un déplacement d'une case vers le haut.

   GGG, GGHG, GGHH, GHGG, GHGH, GHHG, GHHH,
   HHH, HHGH, HHGG, HGHH, HGHG, HGGH, HGGG

   Six de ces chemins mènent à la case supérieure gauche, soit GGHH, GHGH, GHHG, HHGG, HGHG et HGGH.
   À chaque mouvement de l'étoile, il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour qu'elle bouge vers la gauche et une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour qu'elle bouge vers le haut. Donc, la probabilité pour que l'étoile suive un chemin particulier de longueur 3 est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ou $\frac{1}{8}$, et la probabilité pour qu'elle suive un chemin particulier de longueur 4 est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, ou $\frac{1}{16}$.
   (On remarque qu'il y a 2 chemins de longueur 3 et 12 chemins de longueur 4, ce qui confirme que la somme des probabilités est égale à 1 : $2\left(\frac{1}{8}\right) + 12\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.)
   Puisqu'il y a 6 chemins de longueur 4 qui mènent à la case supérieure gauche, alors la probabilité pour que l'étoile se rende dans cette case est égale à $6\left(\frac{1}{16}\right)$, ou $\frac{3}{8}$.

   Réponse : $\frac{3}{8}$

8. Soit x une valeur entière qui vérifie l'équation.
   On a donc :

$$\begin{aligned}
x^3 - rx + r + 11 &= 0 \\
x^3 + 11 &= rx - r \\
r(x-1) &= x^3 + 11 \\
r &= \frac{x^3+11}{x-1} = \frac{x^3-1}{x-1} + \frac{12}{x-1} \\
r &= x^2 + x + 1 + \frac{12}{x-1}
\end{aligned}$$

   On remarque que $x \neq 1$ (ce que l'on peut confirmer à partir de l'équation initiale, car si $x = 1$, l'équation devient $12 = 0$).
   Pour que r soit un entier, il faut que $\frac{12}{x-1}$ soit un entier, car $x^2 + x + 1$ est un entier.
   Donc, $x - 1$ doit être un diviseur de 12 et x doit être strictement positif ($x - 1$ doit donc être non négatif). On remplit un tableau indiquant les valeurs possibles de $x - 1$ et celles de x et

de r qui en découlent :

$x-1$	x	$r = x^2 + x + 1 + \dfrac{12}{x-1}$
12	13	184
6	7	59
4	5	34
3	4	25
2	3	19
1	2	19

La somme des valeurs possibles de r est donc égale à :

$$184 + 59 + 34 + 25 + 19 = 321$$

(Remarquer qu'on n'inclut la valeur de 19 qu'une seule fois dans l'addition.)

Réponse : 321

Partie B

1. (a) Puisque le triangle PSR est rectangle on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$PR^2 = SR^2 + SP^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Donc $PR = \sqrt{225}$, ou $PR = 15$, puisque $PR > 0$.

Puisque le triangle PRQ est rectangle on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$RQ^2 = PQ^2 - PR^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400$$

Donc $RQ = \sqrt{400}$, ou $RQ = 20$, puisque $RQ > 0$.

(b) L'aire de la figure $PQRS$ est égale à la somme de l'aire du triangle PSR et de l'aire du triangle PRQ.

Puisque ces triangles sont respectivement rectangles en S et en R, l'aire est égale à :

$$\tfrac{1}{2}(12)(9) + \tfrac{1}{2}(15)(20) = 54 + 150 = 204$$

(c) *Solution 1*

On connaît la longueur des côtés des triangles RSP et PRQ.

On peut donc calculer des rapports trigonométiques.

Par exemple, on a $\sin(\angle QPR) = \dfrac{RQ}{PQ} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$ et $\sin(\angle PRS) = \dfrac{PS}{PR} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.

Puisque les angles QPR et PRS sont aigus et que $\sin(\angle QPR) = \sin(\angle PRS)$, alors $\angle QPR = \angle PRS$.

(On aurait pu utiliser le cosinus ou la tangente des angles.)

Solution 2

Puisque les triangles RSP et PRQ sont respectivement rectangles en S et en R et que $\dfrac{RS}{SP} = \dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{3}{4}$, alors les triangles sont semblables.

Donc $\angle QPR = \angle SRP = \angle PRS$.

(d) Puisque $\angle QPR = \angle PRS$, alors PQ est parallèle à SR.

Puisque PS est perpendiculaire à SR et que PQ est parallèle à SR, alors PS est perpendiculaire à PQ. Donc $\angle SPQ = 90°$.

D'après le théorème de Pythagore, $SQ^2 = SP^2 + PQ^2$, ou $SQ^2 = 12^2 + 25^2$, d'où $SQ^2 = 769$.

Donc $SQ = \sqrt{769}$, puisque $SQ > 0$.

2. (a) Puisque $(x + 3)(x - 6) = -14$, alors $x^2 - 3x - 18 = -14$, ou $x^2 - 3x - 4 = 0$.

On factorise pour obtenir $(x - 4)(x + 1) = 0$. Donc $x = 4$ ou $x = -1$.

Les solutions sont -1 et 4.

(b) Soit $u = 2^x$. Donc $u^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$ et l'équation devient $u^2 - 3u - 4 = 0$.
D'après (a), $u = 4$ ou $u = -1$. Donc $2^x = 4$ ou $2^x = -1$.
La première de ces équations donne $x = 2$ et la deuxième n'admet aucune solution, puisque pour tout nombre réel x, on a $2^x > 0$.
La solution est 2.

(c) Soit $w = x^2 - 3x$. Donc, léquation devient $w^2 = 4 - 3(-w)$, ou $w^2 - 3w - 4 = 0$.
D'après (a), $w = 4$ ou $w = -1$.
Si $w = 4$, alors $x^2 - 3x = 4$, ou $x^2 - 3x - 4 = 0$, d'où $x = 4$ ou $x = -1$ (selon (a)).
Si $w = -1$, alors $x^2 - 3x = -1$, ou $x^2 - 3x + 1 = 0$. Donc :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Les solutions sont donc 4, -1 et $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. (a) (i) Si on pose $m = n = 0$, l'équation devient

$$a_0 + a_0 = \tfrac{1}{2}a_0 + \tfrac{1}{2}a_0$$

d'où $2a_0 = a_0$, ou $a_0 = 0$.

(ii) Si on pose $m = 1$ et $n = 0$, l'équation devient :

$$a_1 + a_1 = \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{2}a_0$$

Puisque $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on a $1 + 1 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}(0)$, d'où $\frac{1}{2}a_2 = 2$, ou $a_2 = 4$.
Pour obtenir a_3 dans une l'égalité en utilisant des valeurs aussi petites que possibles de m et de n, on peut poser $m = 2$ et $n = 1$. Dans ce cas, l'égalité initiale devient :

$$a_1 + a_3 = \tfrac{1}{2}a_4 + \tfrac{1}{2}a_2 \qquad (*)$$

Puisqu'on connaît déjà la valeur de a_1 et de a_2, alors l'égalité $(*)$ exige que l'on détermine d'abord la valeur de a_4 pour déterminer celle de a_3.
On peut déterminer la valeur de a_4 en posant $m = 2$ et $n = 0$. L'égalité initiale devient

$$a_2 + a_2 = \tfrac{1}{2}a_4 + \tfrac{1}{2}a_0$$

d'où $4 + 4 = \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}(0)$, ou $\frac{1}{2}a_4 = 8$, ou $a_4 = 16$.
On pose $a_4 = 16$ dans $(*)$ et on obtient $1 + a_3 = \frac{1}{2}(16) + \frac{1}{2}(4)$, d'où $1 + a_3 = 8 + 2$, ou $a_3 = 9$.
Donc si $a_1 = 1$, alors $a_2 = 4$ et $a_3 = 9$.
(Si on posait $m = k$ et $n = 0$, l'égalité initiale deviendrait $a_k + a_k = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}a_0$. Puisque $a_0 = 0$, alors $a_{2k} = 4a_k$, ce qui est un énoncé plus général que les énoncés $a_2 = 4a_1$ et $a_4 = 4a_2$ que l'on a développés ci-haut.)

(b) Soit M un entier strictement positif.
En posant $m = n = M$, l'égalité devient

$$b_0 + b_{2M} = b_{2M} + b_{2M}$$

d'où $b_0 + b_{2M} = 2b_{2M}$, ou $b_0 = b_{2M}$.
Donc, tous les termes dont l'indice est pair ont une même valeur.
On pose ensuite $m = 1$ et $n = 0$. L'égalité initiale devient :

$$b_1 + b_1 = b_2 + b_0$$

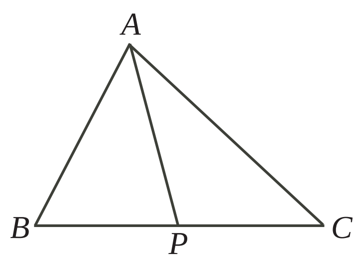
Puisque $b_2 = b_0$, cette égalité devient $2b_1 = 2b_0$, ou $b_1 = b_0$.
On pose ensuite $m = M$ et $n = M - 1$. L'égalité initiale devient :

$$b_1 + b_{2M-1} = b_{2M} + b_{2M-2}$$

Puisque $b_1 = b_0$ (selon ce qui précède) et $b_{2M} = b_{2M-2} = b_0$ (puisque ces termes ont des indices pairs), l'égalité devient $b_0 + b_{2M-1} = b_0 + b_0$, ou $b_{2M-1} = b_0$.
Donc pour tout entier strictement positif M, on a $b_{2M} = b_0$ et $b_{2M-1} = b_0$. Donc, tous les termes qui ont un indice pair ou impair ont la même valeur que b_0.
Donc, tous les termes de la suite ont la même valeur.

4. Avant de résoudre les trois parties du problème, on développe une formule qui permet de déterminer la longueur d'une médiane à partir des longueurs des côtés d'un triangle.

On considère un triangle ABC avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. Soit P, Q et R les milieux respectifs de BC, AC et AB et soit m_a, m_b et m_c les longueurs respectives de AP, BQ et CR.



On détermine d'abord une formule pour m_a.
On considère les triangles ABC et ABP.
D'après la loi du cosinus dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos(\angle ABC) \\
b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos(\angle ABC) \\
2ac\cos(\angle ABC) &= c^2 + a^2 - b^2 \\
\cos(\angle ABC) &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}
\end{aligned}$$

D'après la loi du cosinus dans le triangle ABP et en utilisant $BP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$, on a :

$$\begin{aligned}
AP^2 &= AB^2 + BP^2 - 2(AB)(BP)\cos(\angle ABP) \\
(m_a)^2 &= c^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 - 2c(\tfrac{1}{2}a)\cos(\angle ABC) \\
(m_a)^2 &= c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - ac\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right) \\
(m_a)^2 &= c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 \\
(m_a)^2 &= \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2
\end{aligned}$$

(On peut aussi déterminer cette formule en considérant les triangles APB et APC, utiliser la loi du cosinus dans chacun par rapport à l'angle P et utiliser le fait que $\cos(\angle APB) = -\cos(\angle APC)$ puisque $\angle APB + \angle APC = 180°$.)

On peut reprendre cette démarche (ou permuter les lettres du triangle) pour démontrer que :

$$(m_b)^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2$$

et

$$(m_c)^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

On peut maintenant entreprendre de résoudre les parties (a) et (b).

(a) Étant donné $a = 7$, $b = 13$ et $c = 17$, on obtient, selon les formules précédentes :

$$(m_a)^2 = \tfrac{1}{2}(13^2) + \tfrac{1}{2}(17^2) - \tfrac{1}{4}(7^2) = \tfrac{169}{2} + \tfrac{289}{2} - \tfrac{49}{4} = 229 - \tfrac{49}{4} = \tfrac{867}{4}$$

et

$$(m_b)^2 = \tfrac{1}{2}(7^2) + \tfrac{1}{2}(17^2) - \tfrac{1}{4}(13^2) = \tfrac{49}{2} + \tfrac{289}{2} - \tfrac{169}{4} = 169 - \tfrac{169}{4} = \tfrac{507}{4}$$

et

$$(m_c)^2 = \tfrac{1}{2}(7^2) + \tfrac{1}{2}(13^2) - \tfrac{1}{4}(17^2) = \tfrac{49}{2} + \tfrac{169}{2} - \tfrac{289}{4} = 109 - \tfrac{289}{4} = \tfrac{147}{4}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
m_a &= \sqrt{\tfrac{867}{4}} = \sqrt{\tfrac{3(289)}{4}} = 17\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
m_b &= \sqrt{\tfrac{507}{4}} = \sqrt{\tfrac{3(169)}{4}} = 13\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
m_c &= \sqrt{\tfrac{147}{4}} = \sqrt{\tfrac{3(49)}{4}} = 7\tfrac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Puisque $a : b : c = 7 : 13 : 17$ et $m_c : m_b : m_a = 7 : 13 : 17$, le rapport des longueurs des médianes, m_c, m_b et m_a, est le même que celui des longueurs de côtés a, b et c. Donc les médianes, de longueurs respectives m_c, m_b et m_a, peuvent être utilisées pour former un triangle semblable au triangle initial.

Donc, le triangle qui a des côtés de longueurs 7, 13 et 17 est automédian.

(On remarque que puisque le rapport des longueurs m_c, m_b et m_a est le même que celui des longueurs respectives a, b et c, qui servent déjà à former un triangle, alors les médianes de longueurs m_c, m_b et m_a peuvent elles aussi former un triangle.)

(b) Soit ABC un triangle automédian où $a < b < c$.

Il faut d'abord connaître l'ordre des grandeurs m_a, m_b et m_c. Dans la partie (a), on a vu que $m_c < m_b < m_a$. On vérifie que cette inégalité est vraie lorsque $a < b < c$.

On remarque d'abord que

$$(m_c)^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 < \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2 = (m_b)^2$$

car $b < c$. Donc $m_c < m_b$ puisque $m_c > 0$ et $m_b > 0$.

De même,

$$(m_b)^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2 < \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = (m_a)^2$$

car $a < b$. Donc $m_b < m_a$, ce qui donne $m_c < m_b < m_a$.

Puisque le triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c est semblable au triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives m_c, m_b et m_a, alors $m_c = ka$, $m_b = kb$ et $m_a = kc$, k étant un nombre réel quelconque.

On a donc :

$$\begin{aligned}
(m_c)^2 = k^2a^2 &= \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2 \\
(m_b)^2 = k^2b^2 &= \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2 \\
(m_a)^2 = k^2c^2 &= \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2
\end{aligned}$$

On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir

$$k^2(a^2 + b^2 + c^2) = \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{3}{4}b^2 + \tfrac{3}{4}c^2$$

d'où $k^2 = \frac{3}{4}$, ou $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, puisque $k > 0$.

On peut reporter $k^2 = \frac{3}{4}$ dans n'importe quelle des formules pour les longueurs de médianes. On reporte $k^2 = \frac{3}{4}$ dans la formule de m_c, ce qui donne $\frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$, d'où $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{2}b^2$, ou $a^2 + c^2 = 2b^2$, ce qu'il fallait démontrer.

(Il est intéressant de noter que même si un triangle n'est pas automédian, ses trois médianes peuvent toujours former un triangle et que l'aire de ce triangle est $\frac{3}{4}$ de l'aire du triangle initial. Ce rapport est le carré du rapport de similitude obtenu dans ce problème.)

(c) On tentera d'abord de trouver quelques triplets (a, b, c) (où $a < b < c$) qui vérifient $a^2 + c^2 = 2b^2$. On tentera ensuite de trouver une régularité qui nous permet d'écrire une forme générale permettant de générer une famille infinie qui vérifie $a^2 + c^2 = 2b^2$. Il faudra ensuite prouver que cette famille ne contient pas de triangles semblables. De plus, on ne sait pas encore si un triangle dont les longueurs de côtés vérifient $a^2 + c^2 = 2b^2$ est aussi automédian, mais on le prouvera. (On a démontré la réciproque dans (b).)

On cherche des triplets (a, b, c) qui vérifient $a^2 + c^2 = 2b^2$ ou, ce qui est équivalent, $c^2 - b^2 = b^2 - a^2$. (En d'autres mots, a^2, b^2 et c^2 doivent former une suite arithmétique.)

Après quelques tâtonnements, on peut trouver les triplets $(1, 5, 7)$, $(7, 13, 17)$, $(17, 25, 31)$

qui vérifient la condition. On remarque que le plus grand nombre de chaque triplet devient le premier nombre du triplet suivant et que les différences entre deux nombres consécutifs d'un triplet sont respectivement 2 de plus que celles du triplet précédent. (On remarque que le triplet $(1, 5, 7)$ vérifie $a^2 + c^2 = 2b^2$, mais que trois segments ayant ces longueurs respectives ne peuvent pas former un triangle. On gardera tout de même ce triplet dans notre liste, puisqu'il nous aidera à générer une régularité.)
On tente maintenant de former une famille infinie (a_n, b_n, c_n) à partir de ces triplets.
Si le premier triplet correspond à $n = 1$, le second à $n = 2$ et le troisième à $n = 3$, on peut constater que $7 = 2(2^2) - 1$, $17 = 2(3^2) - 1$ et $31 = 2(4^2) - 1$.
On émet l'hypothèse que $c_n = 2(n + 1)^2 - 1$, ou $c_n = 2n^2 + 4n + 1$.
Dans le premier triplet, b et c ont une différence de 2 ; dans le deuxième, ils ont une différence de 4 ; dans le troisième, ils ont une différence de 6. On révise donc notre hypothèse pour supposer que $b_n = c_n - 2n = 2n^2 + 2n + 1$.
Dans le premier triplet, a et b ont une différence de 4 ; dans le deuxième, ils ont une différence de 6 ; dans le troisième, ils ont une différence de 8. On émet l'hypothèse que $a_n = b_n - 2(n + 1) = 2n^2 - 1$.
On a donc pour hypothèse que $(a_n, b_n, c_n) = (2n^2 - 1, 2n^2 + 2n + 1, 2n^2 + 4n + 1)$, n étant un entier strictement positif. (Les trois triplets ci-haut vérifient cette formule.)
Puisque n est un entier strictement positif, la formule génère des triplets d'entiers strictement positifs. Il faut aussi vérifier que :
– les triplets générés par la formule forment des triangles,
– les triangles formés sont automédians et que
– la formule ne génère aucune paire de triangles semblables.

1^re^ étape : Si $n \geq 2$, alors (a_n, b_n, c_n) sont les longueurs des côtés d'un triangle

Pour que ce soit vrai, il faut que les trois longueurs satisfassent à l'inégalité du triangle, c'est-à-dire que la somme de n'importe quelles deux longueurs doit être supérieure à la troisième. Puisque $a_n < b_n < c_n$, il suffit de vérifier que $a_n + b_n > c_n$ (puisque les inégalités $a_n + c_n > b_n$ et $b_n + c_n > a_n$ sont satisfaites selon les formules ci-haut).
L'inégalité $a_n + b_n > c_n$ devient $(2n^2 - 1) + (2n^2 + 2n + 1) > (2n^2 + 4n + 1)$, qui est équivalente à $4n^2 + 2n > 2n^2 + 4n + 1$, qui est équivalente à $2n^2 - 2n > 1$, qui est équivalente à $2n(n - 1) > 1$. Cette inégalité est vérifiée si $n \geq 2$, puisque le membre de gauche est toujours supérieur ou égal à $2(2)(1)$, ou 4.

2^e^ étape : Si $n \geq 2$, alors (a_n, b_n, c_n) sont les longueurs des côtés d'un triangle automédian

On le démontre en deux étapes : on montre que $(a_n)^2 + (c_n)^2 = 2(b_n)^2$, puis on montre que si les longueurs d'un triangle satisfont à $a^2 + c^2 = 2b^2$, alors le triangle est automédian.
On montre que $(a_n)^2 + (c_n)^2 = 2(b_n)^2$ en montrant que $(c_n)^2 - (b_n)^2 = (b_n)^2 - (a_n)^2$.

On a :

$$(c_n)^2-(b_n)^2=(c_n+b_n)(c_n-b_n)=(4n^2+6n+2)(2n)=4n(2n^2+3n+1)=4n(n+1)(2n+1)$$

et

$$(b_n)^2-(a_n)^2=(b_n+a_n)(b_n-a_n)=(4n^2+2n)(2n+2)=4n(2n+1)(n+1)$$

Donc $(c_n)^2-(b_n)^2=(b_n)^2-(a_n)^2$.
Supposons que les longueurs (a,b,c) des côtés d'un triangle satisfont à $a^2+c^2=2b^2$.
D'après les formules ci-haut :

$$\begin{aligned}(m_c)^2 &= \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2-\tfrac{1}{4}c^2=\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2-\tfrac{1}{4}(2b^2-a^2)=\tfrac{3}{4}a^2\\(m_b)^2 &= \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}c^2-\tfrac{1}{4}b^2=\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}(2b^2-a^2)-\tfrac{1}{4}b^2=\tfrac{3}{4}b^2\\(m_a)^2 &= \tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-\tfrac{1}{4}a^2=\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2-\tfrac{1}{4}(2b^2-c^2)=\tfrac{3}{4}c^2\end{aligned}$$

Donc $m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $m_b=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ et $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.
Donc si $a^2+c^2=2b^2$, alors le triangle est automédian.
Donc si $n\geq 2$, alors (a_n,b_n,c_n) sont les longueurs des côtés d'un triangle automédian.

3^e étape : Deux triplets (a_n,b_n,c_n) (où $n\geq 2$) ne peuvent former des triangles semblables

Supposons que (a_n,b_n,c_n) et (a_m,b_m,c_m) sont deux triangles semblables de manière que $a_m=da_n$, $b_m=db_n$ et $c_m=dc_n$, d étant un nombre réel quelconque.

$$\begin{aligned}2m^2-1 &= d(2n^2-1)\\2m^2+2m+1 &= d(2n^2+2n+1)\\2m^2+4m+1 &= d(2n^2+4n+1)\end{aligned}$$

On soustrait la deuxième de ces équations de la troisième, membre par membre, pour obtenir $2m=2dn$, ou $m=dn$.
On soustrait la première de ces équations de la deuxième, membre par membre, pour obtenir $2m+2=d(2n+2)$, ou $m+1=d(n+1)$.
Puisque $m=dn$, on obtient $dn+1=dn+d$, ou $d=1$.
Puisque $d=1$, alors $n=m$. Donc si $n\neq m$, les triangles ayant pour longueurs de côtés (a_m,b_m,c_m) et (a_n,b_n,c_n) ne sont pas semblables.

Donc, la famille infinie $(a_n,b_n,c_n)=(2n^2-1,2n^2+2n+1,2n^2+4n+1)$, n étant un entier positif et $n\geq 2$, définit une famille infinie de triangles automédians ayant chacun des côtés de longueurs entières, de manière que la famille ne contienne pas de triangles semblables.
(D'autres familles infinies sont possibles.)