The Canadian Mathematical Society La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

le mercredi 21 novembre 2007

Financière Sun Life

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*
   Si $a = 15$ et $b = -9$, alors :
   $$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (15 + (-9))^2 = 6^2 = 36$$
   Solution 2
   Si $a = 15$ et $b = -9$, alors :
   $$a^2 + 2ab + b^2 = 15^2 + 2(15)(-9) + (-9)^2 = 225 - 270 + 81 = 36$$
   Réponse : 36

2. Puisqu'il y a 60 secondes dans une minute, l'hélice fait $\frac{30}{60}$ d'une révolution, soit $\frac{1}{2}$ révolution, à chaque seconde.
   Une révolution correspond à un angle de 360°. L'hélice balaie donc un angle de $\frac{1}{2}(360°)$, soit 180° en une seconde.
   (Ou encore, l'hélice balaie un angle de $30 \times 360°$ en une minute. En une seconde, elle balaie donc un angle de $30 \times 360° \div 60$, soit 180°.)
   Réponse : 180

3. Puisque $AD = 4$ et que AD est perpendiculaire à l'axe des abscisses, A a une ordonnée de 4.
   Soit $(a, 4)$ les coordonnées de A. (D a donc pour coordonnées $(a, 0)$.)
   Puisque A est situé sur la droite d'équation $y = x + 10$, alors $4 = a + 10$, d'où $a = -6$.
   A a donc pour coordonnées $(-6, 4)$ et D a pour coordonnées $(-6, 0)$.
   Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors AB est parallèle à l'axe des abscisses. Donc, B a une ordonnée de 4.
   Soit $(b, 4)$ les coordonnées de B. (C a donc pour coordonnées $(b, 0)$, puisque BC est perpendiculaire à l'axe des abscisses.)
   Puisque B est situé sur la droite d'équation $y = -2x + 10$, alors $4 = -2b + 10$, d'où $2b = 6$, ou $b = 3$.
   Donc, B a pour coordonnées $(3, 4)$ et C a pour coordonnées $(3, 0)$.
   La hauteur du rectangle $ABCD$ est égale à la longueur AD, soit 4.
   La largeur du rectangle $ABCD$ est égale à la longueur CD, soit $3 - (-6)$, ou 9.
   L'aire du rectangle est égale à 9×4, ou 36.
   Réponse : 36

4. *Solution 1*
   Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles était de 3 : 2 en juin, il y avait $3k$ garçons et $2k$ filles en juin, k étant un entier positif quelconque.

En septembre, il y avait donc $3k - 80$ garçons et $2k - 20$ filles dans l'école. Puisque le rapport de ces nombres était égal à $7:5$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{3k-80}{2k-20} &= \frac{7}{5} \\ 5(3k-80) &= 7(2k-20) \\ 15k - 400 &= 14k - 140 \\ k &= 260 \end{aligned}$$

En juin, le nombre d'élèves était égal à $3k + 2k$, ou $5k$, c'est-à-dire à $5(260)$, ou 1300.

Solution 2

Supposons qu'il y avait g garçons et f filles dans l'école en juin.
En septembre, il y avait donc $g - 80$ garçons et $f - 20$ filles dans l'école.
Or, on sait que $\frac{g}{f} = \frac{3}{2}$ et $\frac{g-80}{f-20} = \frac{7}{5}$.
On multiplie chaque équation par le dénominateur commun (ou on utilise le produit en croix) pour obtenir les équations $2g = 3f$ et $5g - 7f = 260$.
On multiplie chaque membre de la 2^{e} équation par 2 pour obtenir $10g - 14f = 520$. On reporte $10g = 15f$ dans cette dernière équation pour obtenir $f = 520$.
Donc $g = \frac{3}{2}(520)$, ou $g = 780$.
En juin, le nombre d'élèves était égal à $g + f$, soit $780 + 520$, ou 1300.

Réponse : 1300

5. *Solution 1*

Peu importe comment les neuf nombres sont placés dans le tableau, la somme des trois lignes est égale à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$, ou 45, puisque chaque nombre paraît exactement une fois dans ces trois lignes.
De même, la somme des trois colonnes est égale à 45, puisque chacun des neuf nombres paraît exactement une fois dans ces trois colonnes.
Donc, la grande somme S est égale à 90 plus la somme des deux diagonales. Donc, S varie selon les nombres placés dans les diagonales. On considère le tableau suivant :

a		c
	e	
g		k

Donc $S = 90 + (a + e + k) + (c + e + g)$, ou $S = 90 + 2e + a + c + g + k$. Pour obtenir la valeur maximale de S, il faut que $2e + a + c + g + k$ soit un maximum.
Puisque a, c, e, g, k peuvent être n'importe quels des nombres de 1 à 9, alors S admet une valeur maximale lorsque $e = 9$ et que a, c, g, k prennent les valeurs $5, 6, 7, 8$ dans un ordre quelconque, par exemple, comme dans le tableau suivant :

5	1	6
2	9	3
7	4	8

Donc, la valeur maximale possible de S est $90 + 2(9) + 8 + 7 + 6 + 5$, soit 134.

Solution 2

On considère le tableau suivant, $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ étant les nombres de 1 à 9 dans un ordre quelconque :

a	b	c
d	e	f
g	h	k

La grande somme est donc égale à

$$\begin{aligned} S &= (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+k)+(a+d+g)+(b+e+h)+(c+f+k)+ \\ &\qquad (a+e+k)+(c+e+g) \\ &= 4e+3a+3c+3g+3k+2b+2d+2f+2h \end{aligned}$$

Pour que S ait une valeur maximale, il faut que les variables dont les coefficients sont les plus grands prennent les plus grandes valeurs.

Donc, S prend une valeur maximale lorsque $e = 9$, a, c, g, k égalent $8, 7, 6, 5$, dans n'importe quel ordre, et b, d, f, h égalent $4, 3, 2, 1$, dans n'importe quel ordre.

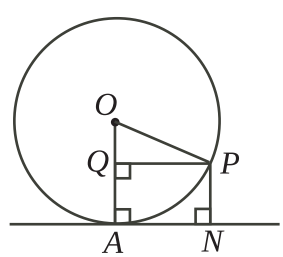
La valeur maximale possible de S est donc :

$$S = 4(9) + 3(8+7+6+5) + 2(4+3+2+1) = 36 + 3(36) + 2(10) = 134$$

Réponse : 134

6. Soit r le rayon du cercle.

On trace le segment OP et on abaisse une perpendiculaire de P au point Q sur OA.



Puisque OA et PN sont perpendiculaires à AN et que PQ est perpendiculaire à OA, alors $QPNA$ est un rectangle. Donc $QP = AN = 15$ et $QA = PN = 9$.

Puisque O est le centre du cercle et que A et P sont situés sur le cercle, alors $OA = OP = r$.

Puisque $OA = r$ et $QA = 9$, alors $OQ = r - 9$.

Puisque le triangle OQP est rectangle en Q, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OP^2 &= OQ^2 + QP^2 \\ r^2 &= (r-9)^2 + 15^2 \\ r^2 &= r^2 - 18r + 81 + 225 \\ 18r &= 306 \\ r &= 17 \end{aligned}$$

Donc, le cercle a un rayon de 17.

Réponse : 17

7. D'après la 2e équation, on a $x + y = 7 - z$. On élève chaque membre au carré pour obtenir :

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49 - 14z + z^2 \qquad (*)$$

D'après la 3e équation, on a $x^2+y^2 = 133-z^2$. On reporte cette équation, ainsi que la première, dans l'équation $(*)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} (133 - z^2) + 2(z^2) &= 49 - 14z + z^2 \\ 14z &= -84 \\ z &= -6 \end{aligned}$$

On reporte la valeur de z dans les deux premières équations pour obtenir $xy = (-6)^2$ et $x + y = 7 - (-6)$, soit $xy = 36$ et $x + y = 13$.
D'après cette dernière équation, on a $y = 13 - x$ que l'on reporte dans l'équation précédente pour obtenir $x(13 - x) = 36$, d'où $0 = x^2 - 13x + 36$.
Donc $0 = (x - 4)(x - 9)$, d'où $x = 4$ ou $x = 9$.
On reporte $x = 4$ dans l'équation $y = 13 - x$ pour obtenir $y = 9$.
On reporte $x = 9$ dans l'équation $y = 13 - x$ pour obtenir $y = 4$.
Les solutions sont donc $(x, y, z) = (4, 9, -6), (9, 4, -6)$.

Réponse : $(4, 9, -6), (9, 4, -6)$

8. Pour se rendre de A à B, en parcourant des segments sans utiliser un même segment plus d'une fois, on doit seulement monter, descendre ou aller vers la droite. (On ne peut donc pas aller vers la gauche sans utiliser un segment déjà utilisé.) Pour mieux le voir, on peut imaginer que si on a parcouru un segment horizontal vers la gauche, on a dû parcourir l'autre segment horizontal du même carré vers la droite. Il faudrait donc utiliser un de ces deux segments en revenant vers la droite.

Tout chemin de A à B contient exactement 9 segments horizontaux et un certain nombre de segments verticaux.

Tout chemin de A à B implique qu'on a parcouru un segment vertical de plus vers le bas que vers le haut, car on commence en haut et on aboutit en bas. Donc, le nombre total de mouvements vers le haut ou vers le bas est impair, puisqu'il est égal à la somme de deux entiers consécutifs, soit un entier pair et un entier impair.

Il y a 10 segments verticaux. Chaque choix d'un nombre impair de ces segments résulte en un chemin unique de A à B. En effet, puisqu'on commence à A, on se rend jusqu'au haut du premier de ces segments, on le parcourt en descendant, on va vers la droite jusqu'au bas du deuxième segment, on le parcourt en montant et ainsi de suite.

Pour chaque valeur de n, $n = 1, 3, 5, 7, 9$, on calcule le nombre de choix de segments verticaux, ce qui correspond au nombre de routes possibles par valeur de n. Chacune de ces routes aura une longueur de $9 + n$.

Pour $n = 1$ et $n = 9$, le nombre de choix est égal à $\binom{10}{1} = \binom{10}{9} = 10$.

Pour $n = 3$ et $n = 7$, le nombre de choix est égal à $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \frac{10(9)(8)}{3(2)(1)} = 120$.

Pour $n = 5$, le nombre de choix est égal à $\binom{10}{5} = \frac{10(9)(8)(7)(6)}{5(4)(3)(2)(1)} = \frac{10(9)(8)(7)}{5(4)} = 2(9)(2)(7)$, ou 252.

La longueur de chemin qui survient le plus souvent correspond à $n = 5$. La longueur du chemin est de 14 et il y a 252 chemins de cette longueur.

(Au lieu de tous ces calculs, on aurait pu affirmer que parmi les valeurs de $\binom{10}{n}$, la plus grande survient lorsque n est la moitié de 10.)

Réponse : Longueur = 14, Nombre de chemins = 252

Partie B

1. (a) Puisque $x-1$, $2x+2$ et $7x+1$ forment une suite arithmétique, alors :

$$\begin{aligned}(2x+2)-(x-1) &= (7x+1)-(2x+2)\\ x+3 &= 5x-1\\ 4 &= 4x\\ x &= 1\end{aligned}$$

(b) *Solution 1*

Puisque $x=1$, le premier terme est égal à 0.

Puisque le dernier terme est égal à 72, que la suite est arithmétique et qu'on nous dit qu'il y a un terme du milieu, alors ce terme est égal à $\dfrac{0+72}{2}$, ou 36.

(On remarque que si la suite avait eu un nombre pair de termes, il n'y aurait pas eu de terme du milieu. Or, puisqu'on nous dit de déterminer le terme du milieu, on peut supposer qu'il y en a un !)

Solution 2

Puisque $x=1$, les trois premiers termes de la suite sont 0, 4, 8.

Puisque le premier terme est 0 et que la raison (la différence entre les termes) est égale à 4, le nombre de fois qu'il faut l'ajouter au premier terme pour arriver à 72 est égal à $\dfrac{72-0}{4}$, ou 18.

Donc, 72 est le 19$^{\text{e}}$ terme.

Le terme du milieu est donc le 10$^{\text{e}}$ terme, soit $0+4(10-1)$, ou 36.

(c) Puisque $y-1$, $2y+2$ et $7y+1$ forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned}\frac{2y+2}{y-1} &= \frac{7y+1}{2y+2}\\ (2y+2)^2 &= (y-1)(7y+1)\\ 4y^2+8y+4 &= 7y^2-6y-1\\ 0 &= 3y^2-14y-5\\ 0 &= (3y+1)(y-5)\end{aligned}$$

Donc $y=-\frac{1}{3}$ ou $y=5$.

(d) Si $y=-\frac{1}{3}$, les trois premiers termes de la suite sont $-\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}$.

Donc, la raison (le rapport de deux termes consécutifs) est égale à $\dfrac{\frac{4}{3}}{-\frac{4}{3}}$, ou -1.

Donc, le 6$^{\text{e}}$ terme de la suite est égal à $-\frac{4}{3}(-1)^5$, ou $\frac{4}{3}$.

Si $y=5$, les trois premiers termes de la suite sont 4, 12, 36.

Donc, la raison est égale à $\dfrac{12}{4}$, ou 3.

Donc, le 6^e terme de la suite est égal à $4(3^5)$, soit $4(243)$, ou 972.

2. (a) *Solution 1*

Puisque $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, aors BA et CD sont parallèles et $ABCD$ est donc un trapèze.

Donc, l'aire de $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2}(24)(9+18)$, soit $12(27)$, ou 324.

Solution 2

Puisque $\angle ABC = 90^\circ$, alors l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(9)(24)$, ou 108.

Puisque $\angle BCD = 90^\circ$, le triangle ACD a une hauteur de 24 par rapport à la base CD.

Donc, l'aire du triangle ACD est égale à $\frac{1}{2}(18)(24)$, ou 216.

Donc, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $108 + 216$, ou 324.

(b) *Solution 1*

Puisque BA est parallèle à CD, alors $\angle ABD = \angle BDC$.

De plus, puisque $\angle BEA = \angle DEC$, alors les triangles ABE et CDE sont semblables.

Donc $\dfrac{DE}{BE} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{18}{9} = 2$. Donc $DE : EB = 2 : 1$.

Solution 2

Comme le suggère la figure, on place le quadrilatère dans un plan cartésien.

On place C à l'origine, D sur la partie positive de l'axe des abscisses, avec pour coordonnées $(18, 0)$ et B sur la partie positive de l'axe des ordonnées, avec pour coordonnées $(0, 24)$.

Puisque $\angle ABC = 90^\circ$, alors A a pour coordonnées $(9, 24)$.

Donc, la droite qui passe par C et A a pour pente $\frac{24}{9}$, ou $\frac{8}{3}$. Elle a donc pour équation $y = \frac{8}{3}x$.

La droite qui passe par B et D a pour pente $\frac{-24}{18}$, ou $-\frac{4}{3}$. Elle a donc pour équation $y = -\frac{4}{3}x + 24$.

Puisque E est le point d'intersection de ces deux droites, alors à ce point, pour une même valeur de x, les équations donnent une même valeur de y. On a donc $\frac{8}{3}x = -\frac{4}{3}x + 24$, d'où $4x = 24$, ou $x = 6$.

Donc, E a pour ordonnée $\frac{8}{3}(6)$, ou 16. Les coordonnées de E sont $(6, 16)$.

Pour montrer que $DE : EB = 2 : 1$, on peut remarquer que le point E est situé à un tiers de la distance le long du segment de B à D, puisque son abscisse est un tiers de celle de D (et que l'abscisse de B est égale à 0), ou puisque son ordonnée est égale à deux tiers de celle de B (et que l'ordonnée de D est égale à 0).

On peut aussi calculer la longueur de BE, soit 10, et celle de ED, soit 20.

Selon n'importe quelle de ces méthodes, $DE : EB = 2 : 1$.

(c) *Solution 1*

D'après la partie (b), les triangles ABE et CDE sont semblables et les longueurs de leurs côtés sont dans un rapport de 1 : 2.

Donc, la hauteur du triangle CDE est 2 fois celle du triangle ABE.

Puisque la somme de ces hauteurs est égale à 24, la hauteur du triangle CDE est égale à $\frac{2}{3}(24)$, ou 16.

Donc, l'aire du triangle DEC est égale à $\frac{1}{2}(18)(16)$, ou 144.

Solution 2

D'après la partie (b), E a pour coordonnées $(6, 16)$.

Donc, la hauteur du triangle DEC, par rapport à la base CD, est égale à 16.

Donc, l'aire du triangle DEC est égale à $\frac{1}{2}(18)(16)$, ou 144.

(d) *Solution 1*

D'après la partie (c), le triangle DEC a une aire de 144.

D'après la solution 2 de la partie (a), le triangle ACD a une aire de 216.

L'aire du triangle DAE est égale à la différence de ces deux aires, soit $216 - 144$, ou 72.

Solution 2

D'après la solution 2 de la partie (b), A a pour coordonnées $(9, 24)$, E a pour coordonnées $(6, 16)$ et D a pour coordonnées $(18, 0)$.

D'après la « méthode des produits montants et des produits descendants », l'aire du triangle est égale à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|\begin{array}{rr} 9 & 24 \\ 6 & 16 \\ 18 & 0 \\ 9 & 24 \end{array}\right| &= \frac{1}{2}|9(16) + 6(0) + 18(24) - 24(6) - 16(18) - 0(9)| \\ &= \frac{1}{2}|144 + 0 + 432 - 144 - 288 - 0| \\ &= 72\end{aligned}$$

3. (a) Alphonse devrait gagner.

Si Alphonse commence par enlever 1 caillou, alors selon la règle n$^{\text{o}}$ 3, Bérénice doit enlever au moins 1 caillou et au plus $2(1) - 1$ caillou, soit 1 caillou. Elle doit donc enlever 1 caillou. Alphonse, à son tour, doit enlever 1 caillou, et ainsi de suite.

À chaque fois, Alphonse enlève donc 1 caillou d'une pile contenant un nombre impair de cailloux et Bérénice enlève 1 caillou d'une pile contenant un nombre pair de cailloux. Donc, Alphonse enlève le dernier caillou.

Donc, Alphonse gagne en enlevant 1 caillou au départ.

(D'après cet argument, Alphonse devrait gagner lorsque N est impair.)

(b) Bérénice devrait gagner.

On forme un tableau dans lequel chaque rangée indique une série possible de coups. Chaque coup indique le nombre de cailloux enlevés.

A1	B1	A2	B2	A3	B3	A4	B4	Gagnant
1	1	1	1	1	1	1	1	B
2	2	1	1	1	1			B
2	2	2	2					B
2	2	3	1					B
3	5							B
4	4							B
5	3							B
6	2							B
7	1							B

Donc, peu importe le nombre de cailloux qu'Alphonse enlève au départ, Bérénice peut enveler un nombre approprié de cailloux de manière à gagner. Donc, Bérénice devrait gagner lorsque $N = 8$. Sa stratégie est donc la suivante :

- Si Alphonse enlève 3 cailloux ou plus, il reste 5 cailloux ou moins dans la pile et selon la règle n^{o} 2, elle peut enlever tous les cailloux qui restent et gagner.
- Si Alphonse enlève 1 ou 2 cailloux, elle répète le coup d'Alphonse. Elle évite ainsi de laisser un nombre impair de cailloux à Alphonse et limite ce dernier à ne pourvoir enlever que 1, 2 ou 3 cailloux au tour suivant. Comme on le voit dans le tableau, elle gagne.

(c) *Solution 1*

On démontre que Bérénice a une stratégie gagnante si et seulement si $N = 2^m$, m étant n'importe quel entier strictement positif.

On sait que si N est impair, comme dans la partie (a), Alphonse a une stratégie gagnante (Il enlève 1 caillou, ce qui force Bérénice à faire de même, et ainsi de suite).
Si $N = 2$, alors Bérénice gagne, puisque selon la règle n^{o} 2, Alphonse doit enlever 1 caillou pour commencer et Bérénice enlève donc le dernier caillou.

On démontre ensuite que si $N = 2k$, alors le joueur qui a une stratégie gagnante pour $N = k$ a aussi une stratégie gagnante pour $N = 2k$. Bérénice aura donc une stratégie gagnante si $N = 2, 4, 8, 16, \ldots$ (en général, si $N = 2^m$) et que Alphonse a une stratégie gagnante pour $N = 2^m q$, q étant n'importe quel entier positif impair (puisque Alphonse gagnera si $N = q, 2q, 4q, \ldots$). Puisque chaque entier pair peut être exprimé de cette forme, ceci complétera la démonstration.

On considère $N = 2k$.

- Si un joueur enlève un nombre impair de cailloux d'une pile de grandeur paire, cela laissera un nombre impair de cailloux dans la pile et l'autre joueur peut gagner en enlevant 1 caillou de la pile, comme dans la partie (a). Donc, si Alphonse enlève un nombre pair de cailloux de la pile, Bérénice doit faire de même. Ainsi la pile contient toujours un nombre pair de cailloux et chaque joueur enlève toujours un nombre pair de cailloux.

– Supposons qu'Alphonse a une stratégie gagnante pour $N = k$ et que les coups sont $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_j$, c'est-à-dire qu'Alphonse enlève a_1 cailloux à son premier tour, Bérénice répond en enlevant b_1 cailloux, puis Alphonse enlève a_2 cailloux, etc. (Évidemment, a_2 dépend de b_1, qui peut prendre plusieurs valeurs, etc.) Puisque ces coups sont réglementaires, alors $1 \leq a_1 < k$, $b_1 < 2a_1$, $a_2 < 2b_1$ et ainsi de suite.

  Donc $2a_1, 2b_2, 2a_2, 2b_2, \ldots, 2a_j$ sera une stratégie gagnante pour Alphonse si $N = 2k$, puisque $1 < 2a_1 < 2k$, $2b_1 < 2(2a_1)$, $2a_2 < 2(2b_1)$ et ainsi de suite.

  En d'autres mots, pour gagner lorsque $N = 2k$, Alphonse consulte sa stratégie gagnante pour $N = k$. Il enlève le double du nombre de cailloux que pour le coup correspondant lorsque $N = k$. Si Bérénice enlève $2b$ cailloux au coup suivant, il enlève ensuite $2a$ cailloux, a étant le nombre de cailloux qu'il enlèverait dans sa stratégie gagnante après que Bérénice eut enlevé b cailloux dans la partie avec $N = k$. Cette stratégie lui garantit une victoire.

– Supposons que Bérénice a une stratégie gagnante pour $N = k$.

  Selon un argument analogue, Bérénice a une stratégie gagnante pour $N = 2k$, car si Alphonse enlève $2a$ cailloux, elle répondra en enlevant $2b$ cailloux, b étant le nombre de cailloux qu'elle enlèverait dans sa stratégie gagnante après que Alphonse eut enlevé a cailloux dans la partie avec $N = k$.

Donc, Bérénice gagne si et seulement si $N = 2^m$, m étant n'importe quel entier strictement positif.

Solution 2

On démontre que Bérénice a une stratégie gagnante si et seulement si $N = 2^m$, m étant n'importe quel entier strictement positif.

Supposons que N n'est pas une puissance de 2.

On peut exprimer N sous la forme d'une somme de puissances distinctes de 2, soit $N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_j}$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_j \geq 0$. (Cela revient à exprimer N sous forme binaire.) Puisque N n'est pas une puissance de 2, la somme admet au moins deux termes (c'est-à-dire que $j \geq 2$).

On démontrera qu'Alphonse peut toujours réduire le nombre de puissances de 2 dans cette somme, tandis que Bérénice ne peut jamais le faire. Ceci prouvera qu'Alphonse enlèvera le dernier caillou, car lui seul peut réduire le nombre de puissances de 2 dans la somme.

La stratégie d'Alphonse consiste, pour commencer, à enlever la plus petite puissance de 2 de l'expression pour N (c'est-à-dire qu'il enlève 2^{k_j} cailloux).

Bérénice a donc devant elle $2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_{j-1}}$ cailloux. D'après la règle n° 3, elle doit enlever moins de $2(2^{k_j})$ cailloux, c'est-à-dire moins de 2^{k_j+1} cailloux. Puisque $k_{j-1} > k_j$, alors $k_{j-1} \geq k_j + 1$. Donc, Bérénice doit enlever moins de $2^{k_{j-1}}$ cailloux.

Lorsqu'elle enlève ces cailloux, le terme $2^{k_{j-1}}$ sera enlevé de la représentation du nombre de cailloux dans la pile, mais il sera remplacé par au moins une plus petite puissance de 2. Donc, il est impossible pour Bérénice de réduire le nombre de termes de la représentation.

Supposons qu'à son tour, Alphonse reçoit une pile de $2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_{j-2}}+2^{d_1}+2^{d_2}+\cdots+2^{d_h}$ cailloux, $k_1 > k_2 > \cdots > k_{j-2} > d_1 > d_2 > \cdots > d_h$, $h \geq 1$.

Ceci indique que Bérénice a enlevé $B = 2^{k_{j-1}} - (2^{d_1} + 2^{d_2} + \cdots + 2^{d_h})$ cailloux.

Or, $B > 0$ et B est divisible par 2^{d_h} (puisque chaque puissance de 2 a un exposant supérieur ou égal à d_h). Donc $B \geq 2^{d_h}$.

Donc, Alphonse peut enlever 2^{d_h} cailloux à son tour (c'est-à-dire la plus petite puissance de 2 dans la représentation du nombre de cailloux dans la pile), puisque 2^{d_h} cailloux satisfait à la règle n° 3. Il peut ainsi toujours utiliser la même tactique.

Donc, Alphonse peut toujours gagner si N n'est pas une puissance de 2.

Si N est une puissance de 2, Alphonse ne pourra pas, à son premier tour, réduire le nombre de termes de la représentation de N. (L'argument est semblable à celui utilisé ci-haut pour le premier tour de Bérénice.) À son premier tour, Bérénice pourra réduire le nombre de termes (comme ci-dessus pour Alphonse).

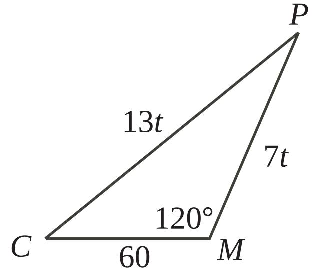
Les rôles sont donc renversés et Bérénice peut toujours réduire le nombre de termes, tandis qu'Alphonse ne le peut pas. Donc, Bérénice a une stratégie gagnante si N est une puissance de 2.

Donc, Bérénice a une stratégie gagnante si et seulement si N est une puissance de 2.

4. (a) *Solution 1*

En t secondes, la souris parcourt $7t$ mètres et le chat parcourt $13t$ mètres.

On obtient donc un triangle CMP. Le chat et la souris se rencontrent au point P.

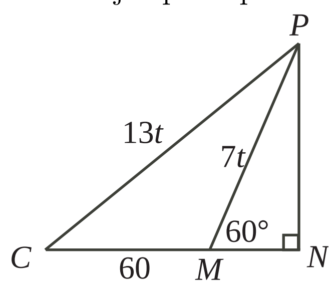


D'après la loi du cosinus :

$$\begin{aligned}
CP^2 &= CM^2 + MP^2 - 2(CM)(MP)\cos(\angle CMP) \\
(13t)^2 &= 60^2 + (7t)^2 - 2(60)(7t)\cos(120^\circ) \\
169t^2 &= 3600 + 49t^2 - 120(7t)(-\tfrac{1}{2}) \\
169t^2 &= 3600 + 49t^2 + 60(7t) \\
120t^2 - 420t - 3600 &= 0 \\
2t^2 - 7t - 60 &= 0 \\
(2t-15)(t+4) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $t = \frac{15}{2}$ ou $t = -4$.
Puisque t représente le temps, on a $t > 0$, d'où $t = \frac{15}{2}$.

Solution 2
En t secondes, la souris parcourt $7t$ mètres et le chat parcourt $13t$ mètres.
On obtient donc un triangle CMP. Le chat et la souris se rencontrent au point P. Au point P, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point N sur le prolongement de CM.



Puisque $\angle PMN = 60^\circ$, le triangle PMN est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc $MN = \frac{1}{2}PM = \frac{7}{2}t$ et $PN = \sqrt{3}MN = \frac{7\sqrt{3}}{2}t$.
Dans le triangle rectangle CPN, on a donc $CP = 13t$, $PN = \frac{7\sqrt{3}}{2}t$ et $CN = 60 + \frac{7}{2}t$.
D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
CP^2 &= CN^2 + NP^2 \\
(13t)^2 &= \left(60 + \tfrac{7}{2}t\right)^2 + \left(\tfrac{7\sqrt{3}}{2}t\right)^2 \\
169t^2 &= 3600 + 420t + \tfrac{49}{4}t^2 + \tfrac{147}{4}t^2 \\
169t^2 &= 3600 + 420 + 49t^2 \\
120t^2 - 420t - 3600 &= 0 \\
2t^2 - 7t - 60 &= 0 \\
(2t-15)(t+4) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $t = \frac{15}{2}$ ou $t = -4$.
Puisque t représente le temps, on a $t > 0$, d'où $t = \frac{15}{2}$.

(b) *Solution 1*

On utilise un plan cartésien, comme le suggère la figure donnée. C et M ont pour coordonnées respectives $(-60, 0)$ et $(0, 0)$.

Soit $P(x, y)$ le point où le chat intercepte la souris.

Puisque le chat court à une vitesse de 13 m/s et que la souris court à une vitesse de 7 m/s, alors $\dfrac{CP}{MP} = \dfrac{13}{7}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(x+60)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{13}{7} \\
\frac{(x+60)^2+y^2}{x^2+y^2} &= \frac{169}{49} \\
49((x+60)^2+y^2) &= 169(x^2+y^2) \\
0 &= 120x^2 - 2(49)(60)x - 49(60^2) + 120y^2 \\
0 &= x^2 - 49x - 49(30) + y^2
\end{aligned}$$

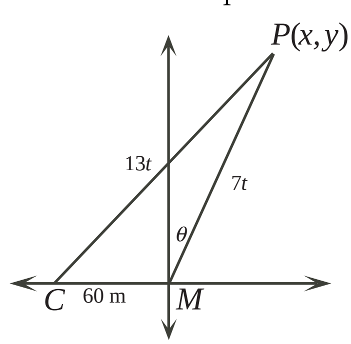
Il s'agit de l'équation d'un cercle, puisqu'elle est de la forme $0 = x^2+ax+y^2+by+c$ et qu'il existe au moins un point dont les coordonnées la vérifient (en posant $y = 0$, on obtient une équation du second degré dont le discriminant est positif). On peut aussi compléter le carré pour obtenir l'équation $(x - \frac{49}{2})^2 + y^2 = (\frac{91}{2})^2$. Donc, tous les points d'interception sont situés sur un cercle.

Solution 2

On utilise un plan cartésien, comme le suggère la figure donnée. C a pour coordonnées $(-60, 0)$ et M a pour coordonnées $(0, 0)$.

Soit $P(x, y)$ le point où le chat intercepte la souris.

Supposons que le chat intercepte la souris après t secondes et que la souris court en direction θ, cet angle étant mesuré à partir du nord. Il est positif s'il est mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre. (θ peut aussi être négatif. On suppose que $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ pour que la situation se passe dans la moitié supérieure du plan.)



Comme dans la partie (a) :

$$\begin{aligned} CP^2 &= CM^2 + MP^2 - 2(CM)(MP)\cos(\angle CMP) \\ (13t)^2 &= 60^2 + (7t)^2 - 2(60)(7t)\cos(90^\circ + \theta) \\ 120t^2 &= 3600 + 120(7t)\sin\theta \\ t^2 - 7t\sin\theta &= 30 \end{aligned}$$

Or, $MP^2 = 49t^2 = x^2 + y^2$ et $x = 7t\cos(90^\circ - \theta) = 7t\sin\theta$. L'équation $t^2 - 7t\sin\theta = 30$ devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{49} - x &= 30 \\ x^2 - 49x - 49(30) + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

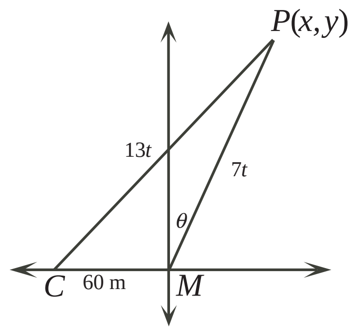
Donc, tous les points P sont situés sur un cercle, comme dans la Solution 1.

Solution 3

On utilise un plan cartésien, comme le suggère la figure donnée. C a pour coordonnées $(-60, 0)$ et M a pour coordonnées $(0, 0)$.

Soit $P(x, y)$ le point où le chat intercepte la souris.

Supposons que le chat intercepte le chat après t secondes et que la souris court en direction θ, cet angle étant mesuré à partir du nord. Il est positif s'il est mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre. (θ peut aussi être négatif. On suppose que $-90^\circ \le \theta \le 90^\circ$ pour que la situation se passe dans la moitié supérieure du plan.)



Si la souris court en direction est, elle sera attrapée lorsque $-60 + 13t = 7t$, ou $t = 10$. Elle sera donc attrapée au point $B(70, 0)$.

Si la souris court en direction ouest, elle sera attrapée lorsque $-60 + 13t = -7t$, ou $t = 3$. Elle sera donc attrapée au point $A(-21, 0)$.

Les points d'interception au-dessus de l'axe des abscisses doivent être les symétriques, par rapport à l'axe des abscisses, des points d'interception situés au-dessous de l'axe des abscisses. Donc, si ces points sont situés sur un cercle, ce cercle doit avoir un diamètre sur l'axe des abscisses.

Puisque les points d'interception sur l'axe des abscisses sont $A(-21, 0)$ et $B(70, 0)$, alors ces points doivent être les extrémités de ce diamètre.

Donc, ce cercle a pour centre E, qui a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-21+70),0\right)$, ou $\left(\frac{49}{2},0\right)$. Il a pour rayon $\frac{1}{2}(70-(-21))$, ou $\frac{91}{2}$.

D'après la figure précédente, le point d'intersection P a pour coordonnées

$$(7t\cos(90^\circ-\theta),7t\sin(90^\circ-\theta)) = (7t\sin\theta,7t\cos\theta)$$

Si on peut démontrer que $PE=\frac{91}{2}$ pour chaque valeur de θ, on aura montré que chaque point d'intersection est situé sur le cercle de centre E et de rayon $\frac{91}{2}$.

Or :

$$\begin{aligned}
PE^2 &= \left(7t\sin\theta-\tfrac{49}{2}\right)^2+(7t\cos\theta)^2\\
&= 49t^2\sin^2\theta-7(49)\sin\theta+\tfrac{49^2}{4}+49t^2\cos^2\theta\\
&= 49t^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-7(49)\sin\theta+\tfrac{49^2}{4}\\
&= 49t^2-7(49)\sin\theta+\tfrac{49^2}{4}
\end{aligned}$$

D'après la Solution 2, $t^2-7\sin\theta=30$. Donc :

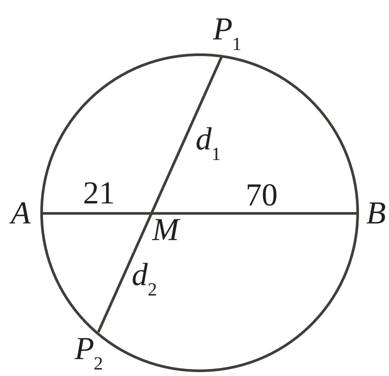
$$PE^2=49(30)+\tfrac{49^2}{4}=49\left(30+\tfrac{49}{4}\right)=49\left(\tfrac{169}{4}\right)=\tfrac{7^2 13^2}{4}=\left(\tfrac{91}{2}\right)^2$$

Donc $PE=\frac{91}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc, tous les points d'interception sont situés sur un cercle.

(c) D'après la partie (b), on sait que les point d'interception sont situés sur le cercle qui a pour diamètre AB, A et B ayant pour coordonnées respectives $(-21,0)$ et $(70,0)$.

Supposons que la souris est interceptée au point P_1 après avoir parcouru une distance de d_1 mètres et au point P_2 après avoir parcouru une distance de d_2 mètres dans la direction opposée.



D'après le théorème des cordes concourantes d'un cercle, on a $d_1d_2=21(70)$.

D'après l'inégalité moyenne arithmétique-moyenne géométrique :

$$\frac{d_1+d_2}{2}\geq\sqrt{d_1d_2}=\sqrt{21(70)}=7\sqrt{30}$$

Donc $d_1 + d_2 \geq 2(7\sqrt{30}) = 14\sqrt{30}$.

(L'inégalité moyenne arithmétique-moyenne géométrique vient du fait que si d_1 et d_2 sont des nombres non négatifs, alors $(d_1 - d_2)^2 \geq 0$.
Donc $d_1^2 + 2d_1d_2 + d^2 \geq 4d_1d_2$, d'où $\left(\dfrac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 \geq d_1d_2$, d'où $\dfrac{d_1 + d_2}{2} \geq \sqrt{d_1d_2}$.)