The Canadian Mathematical Society La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques

le mercredi 22 novembre 2006

Avec la contribution de : Financière Sun Life

Solutions

©2006 Société mathématique du Canada

Partie A

1. Quelle est la valeur de $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$?

   Solution 1

   $$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{5}\right) &= \left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\\ &= \left(\frac{\cancel{3}}{2}\right)\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{6}{\cancel{5}}\right)\\ &\quad \text{(On simplifie les numérateurs et les dénominateurs.)}\\ &= \tfrac{6}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

   Solution 2

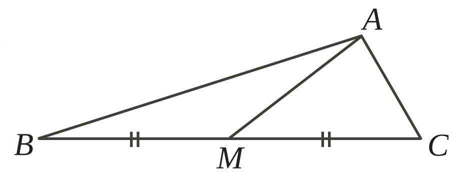
   $$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{5}\right) &= \left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\\ &= \tfrac{360}{120}\\ &= 3\end{aligned}$$

2. Soit $f(2x+1)=(x-12)(x+13)$. Quelle est la valeur de $f(31)$?

   Solution 1
   Puisque $f(2x+1)=(x-12)(x+13)$ et que $f(31)=f(2(15)+1)$, alors $f(31)=(15-12)(15+13)$, d'où $f(31)=3(28)$, ou $f(31)=84$.

   Solution 2
   Puisque $w=2x+1$, alors $x=\dfrac{w-1}{2}$.
   Puisque $f(2x+1)=(x-12)(x+13)$, alors
   $f(w)=\left(\dfrac{w-1}{2}-12\right)\left(\dfrac{w-1}{2}+13\right)$, ou $f(w)=\left(\dfrac{w-25}{2}\right)\left(\dfrac{w+25}{2}\right)$.
   Donc $f(31)=\left(\dfrac{31-25}{2}\right)\left(\dfrac{31+25}{2}\right)$, d'où $f(31)=3(28)$, ou $f(31)=84$.

3. Dans le triangle ABC ci-contre, M est le milieu du côté BC. Si $\angle ABM = 15°$ et $\angle AMC = 30°$, quelle est la mesure de l'angle BCA ?



Solution
On a $\angle AMC = 30°$ et $\angle AMB = 180° - \angle AMC$. Donc $\angle AMB = 150°$.
On a $\angle ABM = 15°$, $\angle AMB = 150°$ et $\angle BAM = 180° - \angle ABM - \angle AMB$. Donc $\angle BAM = 15°$.
Puisque $\angle ABM = \angle BAM$, alors $BM = MA$.
Puisque $BM = MA$ et $BM = MC$, alors $MA = MC$. Donc $\angle MAC = \angle MCA$.
Donc $\angle MCA = \frac{1}{2}(180° - \angle AMC)$, ou $\angle MCA = 75°$.
Donc $\angle BCA = \angle MCA = 75°$.

4. Déterminer toutes les solutions (x, y) du système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{5}{y^2} &= 12 \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y^2} &= 22 \end{aligned}$$

Solution 1
On soustrait 5 fois la 2e équation de 7 fois la 1re équation, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} 7\left(\frac{4}{x} + \frac{5}{y^2}\right) - 5\left(\frac{3}{x} + \frac{7}{y^2}\right) &= 7(12) - 5(22) \\ \frac{13}{x} &= -26 \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

On reporte $x = -\frac{1}{2}$ dans la 1re équation pour obtenir $\dfrac{4}{-\frac{1}{2}} + \dfrac{5}{y^2} = 12$, c'est-à-dire $-8 + \dfrac{5}{y^2} = 12$, d'où $\dfrac{5}{y^2} = 20$, ou $y^2 = \frac{1}{4}$.
Donc $y = \pm\frac{1}{2}$.
Les solutions sont donc $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
(On peut vérifier que ces solutions satisfont aux deux équations.)

Solution 2

On soustrait 4 fois la 2$^{\text{e}}$ équation de 3 fois la 1$^{\text{re}}$ équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{y^2}\right)-4\left(\frac{3}{x}+\frac{7}{y^2}\right) &= 3(12)-4(22) \\ -\frac{13}{y^2} &= -52 \\ y^2 &= \tfrac{1}{4} \\ y &= \pm\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

On reporte $y=\pm\frac{1}{2}$ dans la 1$^{\text{re}}$ équation pour obtenir $\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2}=12$, c'est-à-dire $\dfrac{4}{x}+20=12$, d'où $\dfrac{4}{x}=-8$, ou $x=-\frac{1}{2}$.

Les solutions sont donc $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

(On peut vérifier que ces solutions satisfont aux deux équations.)

5. Dans le triangle ABC, on a $BC=4$, $AB=x$, $AC=x+2$ et $\cos(\angle BAC)=\dfrac{x+8}{2x+4}$.
Déterminer toutes les valeurs possibles de x.

Solution

On utilise la loi du cosinus (le théorème d'Al-Kashi) dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+AC^2-2(AB)(AC)\cos(\angle BAC) \\ 4^2 &= x^2+(x+2)^2-2x(x+2)\frac{x+8}{2x+4} \\ 16 &= x^2+x^2+4x+4-x(x+8) \\ 0 &= x^2-4x-12 \\ 0 &= (x-6)(x+2) \end{aligned}$$

Donc $x=6$ ou $x=-2$.

Puisque $AB=x$, alors x doit être positif. Donc $x=6$.

6. Déterminer le nombre d'entiers n qui vérifient *toutes les trois* conditions suivantes :
   - chaque chiffre de n est un 1 ou un 0,
   - n est divisible par 6 et
   - $0<n<10^7$.

Solution 1

Puisque $0<n<10^7$, alors n est un entier strictement positif de moins de 8 chiffres.

Puisque n est divisible par 6, alors n est pair. Puisque chaque chiffre de n est un 1 ou un 0, alors n doit se terminer par un 0.

Puisque n est divisible par 6, alors il est divisible par 3. Donc, la somme de ses chiffres est divisible par 3. Puisque chaque chiffre de n est un 1 ou un 0 et que n est composé d'au plus six chiffres non nuls, alors la somme des chiffres de n doit être égale à 3 ou à 6 (c'est-à-dire que 3 ou 6 des chiffres de n égalent 1).

Puisque n est composé d'au plus 7 chiffres, on peut écrire n en fonction de ses chiffres comme suit : $abcdef0$, chacun de a, b, c, d, e et f pouvant être un 0 ou un 1. (On permet ici à n de commencer par un 0.)
Si 6 des chiffres de n sont des 1, il n'y a qu'une façon de placer les chiffres, soit $n = 1111110$.
Si 3 des chiffres de n sont des 1, alors 3 des 6 chiffres de a à f sont des 1 (les autres étant des 0). Le nombre de possibilités est égal à $\binom{6}{3}$, ou 20.
Le nombre de tels entiers n est donc égal à $20 + 1$, ou 21.

Solution 2
Puisque $0 < n < 10^7$, alors n est un entier strictement positif de moins de 8 chiffres.
Puisque n est divisible par 6, alors n est pair. Puisque chaque chiffre de n est un 1 ou un 0, alors n doit se terminer par un 0.
Puisque n est divisible par 6, alors il est divisible par 3. Donc, la somme de ses chiffres est divisible par 3. Puisque chaque chiffre de n est un 1 ou un 0 et que n est composé d'au plus six chiffres non nuls, alors la somme des chiffres de n doit être égale à 3 ou à 6 (c'est-à-dire que 3 ou 6 des chiffres de n égalent 1).

Si 6 des chiffres de n sont des 1, alors $n = 1111110$, puisque n est composé d'un maximum de 7 chiffres.
Si 3 des chiffres de n sont des 1, alors n est composé de 4 à 7 chiffres dont le premier est un 1.
Si n est composé de 4 chiffres, alors n doit être égal à 1110.
Si n est composé de 5 chiffres, alors n est de la forme $1abc0$, deux des chiffres a, b et c étant des 1. Le nombre de possibilités est égal à $\binom{3}{2}$, ou 3.
Si n est composé de 6 chiffres, alors n est de la forme $1abcd0$, deux des chiffres a, b, c et d étant des 1. Le nombre de possibilités est égal à $\binom{4}{2}$, ou 6.
Si n est composé de 7 chiffres, alors n est de la forme $1abcde0$, deux des chiffres a, b, c, d et e étant des 1. Le nombre de possibilités est égal à $\binom{5}{2}$, ou 10.
Le nombre d'entiers n est donc égal à $1 + 1 + 3 + 6 + 10$, ou 21.

7. Soit n et D deux entiers de manière que n soit strictement positif et $0 \leq D \leq 9$.
Déterminer la valeur de n, sachant que $\dfrac{n}{810} = 0{,}\overline{9D5} = 0{,}9D59D59D5\ldots$

Solution
On remarque que $0{,}\overline{9D5} = \dfrac{9D5}{999}$. En effet :

$$\begin{aligned}
1000(0{,}\overline{9D5}) &= 9D5{,}\overline{9D5} \\
1000(0{,}\overline{9D5}) - 0{,}\overline{9D5} &= 9D5{,}\overline{9D5} - 0{,}\overline{9D5} \\
999(0{,}\overline{9D5}) &= 9D5 \\
0{,}\overline{9D5} &= \frac{9D5}{999}
\end{aligned}$$

Voici une autre façon de le démontrer :

$$\begin{aligned}
0{,}\overline{9D5} &= 0{,}9D59D59D5\ldots \\
&= \frac{9D5}{10^3} + \frac{9D5}{10^6} + \frac{9D5}{10^9} + \cdots \\
&= \frac{\frac{9D5}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} \qquad \text{(somme d'une série géométrique infinie)} \\
&= \frac{9D5}{1000 - 1} \\
&= \frac{9D5}{999}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{810} &= \frac{9D5}{999} \\
999n &= 810(9D5) \\
111n &= 90(9D5) \\
37n &= 30(9D5)
\end{aligned}$$

Donc, $30(9D5)$ est divisible par 37. Puisque 30 n'est pas divisible par 37 et que 37 est un nombre premier, $9D5$ doit être divisible par 37.
Les multiples de 37 de 900 à 1000 sont 925, 962 and 999.
Donc, $9D5$ doit être égal à 925. Donc $D = 2$.
Donc $37n = 30(925)$, d'où $n = 30(25)$, ou $n = 750$.

8. Si on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite, quelle est la probabilité pour qu'il y ait, au moins une fois, 2 faces consécutives ou plus ?

Solution 1

Lors d'un lancer, P représente pile et F représente face.

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite, le nombre de suites de 10 résultats est égal à 2^{10}, ou 1024.

Soit t_n le nombre de suites de n lancers d'une pièce de monnaie qui *ne* contiennent *pas* 2 faces consécutives ou plus.

(Donc, le nombre de suites de 10 lancers qui contiennent 2 faces consécutives ou plus est égal à $1024 - t_{10}$. Ainsi, la probabilité que l'on cherche est égale à $\frac{1024 - t_{10}}{1024}$.)

On remarque que $t_1 = 2$, car les suites P et F ne contiennent pas deux P consécutifs.

De plus, $t_2 = 3$. (Ce sont les suites PP, PF et FP.)

On considère une suite de n lancers qui ne contiennent pas 2 faces consécutives ou plus, $n \geq 3$. Une telle suite doit commencer par F ou P.

Si la suite commence par F, le 2$^{\text{e}}$ lancer doit être un T et les $n-2$ derniers lancers peuvent être n'importe quelle suite de $n-2$ lancers qui ne contiennent pas 2 faces consécutives ou plus. Il y a t_{n-2} telles suites de $n-2$ lancers. Il y a donc t_{n-2} suites de n lancers qui commencent par F et qui ne contiennent pas 2 faces consécutives ou plus.

Si la suite commence par P, les $n-1$ derniers lancers peuvent être n'importe quelle suite de $n-1$ lancers qui ne contiennent pas 2 faces consécutives ou plus. Il y a t_{n-1} telles suites de $n-1$ lancers. Il y a donc t_{n-1} suites de n lancers qui commencent par P et qui ne contiennent pas 2 faces consécutives ou plus.

Donc $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$, puisque chaque suite commence par F ou P.

En commençant par $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$, on peut générer la suite $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{10}$ en additionnant les deux derniers termes pour obtenir le terme suivant. On obtient ainsi :

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$$

Donc $t_{10} = 144$.

La probabilité que l'on cherche est égale à $\frac{1024 - 144}{1024}$, c'est-à-dire à $\frac{880}{1024}$, ou $\frac{55}{64}$.

Solution 2

Lors d'un lancer, P représente pile et F représente face.

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite, le nombre de suites de 10 résultats est égal à 2^{10}, ou 1024.

On comptera le nombre de suites qui *ne* contiennent *pas* 2 F consécutives ou plus en les regroupant selon le nombre de F qu'ils contiennent. (Remarquer que ne pas contenir 2 F consécutifs ou plus est équivalent à ne pas contenir la paire FF.)

Si une suite de longueur 10 contient 0 F et 10 P, il y a 1 seule possibilité.
Si une suite de longueur 10 contient 1 F et 9 P, le nombre de possibilités est égal à $\binom{10}{1}$, ou 10.

Si une suite de longueur 10 contient 2 F et 8 P, on commence par écrire

$$\_P\_P\_P\_P\_P\_P\_P\_P\_$$

Chacun des deux F doit être placé dans des espaces différents. On élimine ensuite les espaces qui restent pour obtenir une suite de 8 P et 2 F qui ne contiennent pas deux F consécutifs ou plus. De cette manière, on obtient toutes les suites possibles. Il y a $\binom{9}{2}$ façons de placer les F, c'est-à-dire 36 façons. Il y a donc 36 telles suites.

De la même façon, pour une suite de 3 F et 7 P, il y a $\binom{8}{3}$ possibilités, c'est-à-dire 56 possibilités.
Pour une suite de 4 F et 6 P, il y a $\binom{7}{4}$ possibilités, c'est-à-dire 35 possibilités.
Pour une suite de 5 F et 5 P, il y a $\binom{6}{5}$ possibilités, c'est-à-dire 6 possibilités.

En tout, il y a $1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6$ suites, c'est-à-dire 144 suites de 10 lancers qui ne contiennent pas 2 F consécutifs ou plus.
Le nombre de suites de 10 lancers qui contiennent au moins une fois 2 F consécutifs ou plus est donc égal à $1024 - 144$, ou 880. La probabilité pour qu'une telle suite contienne au moins une fois 2 faces consécutives ou plus est égale à $\frac{880}{1024}$, ou $\frac{55}{64}$.

Partie B

1. Piotr place des nombres dans un tableau 3 sur 3, tout en respectant la règle suivante, appelée « Principe de Piotr » :

   > Si trois nombres paraissent dans trois cases consécutives à l'horizontale, à la verticale ou en diagonale, le nombre du milieu doit être égal à la moyenne des deux autres.

   (a) Utiliser le Principe de Piotr pour remplir le tableau ci-contre. (Remplir les cases vides du tableau dans le cahier-réponse.)

3		19
8		

   Solution

   Puisque la moyenne de 3 et de 19 est égale à 11, car $\frac{1}{2}(3+19)=11$, on place un 11 dans la case entre le 3 et le 19.
   Le 3 et le nombre que l'on place en dessous du 8 ont une moyenne de 8. On place un 13.
   La moyenne de 13 et de 19, soit 16, est placée dans la case au centre.
   Le 8 et le nombre que l'on place à la droite du 16 ont une moyenne de 16. On place un 24.
   Le 19 et le nombre que l'on place en dessous du 24 ont une moyenne de 24. On place un 29.
   Le nombre que l'on place entre le 13 et le 29 est égal à la moyenne de ces deux nombres, soit 21.

   Voici le tableau rempli :

3	11	19
8	16	24
13	21	29

   (On peut vérifier que toutes les lignes, les colonnes et les diagonales respectent la règle de Piotr.)

   Remarque

   On peut aussi remplir les cases en suivant un ordre différent.

   (b) Déterminer la somme des neuf nombres du tableau ci-contre lorsqu'il est rempli selon le Principe de Piotr. Justifier les étapes de son raisonnement.

x		
5		23

   Remarque

   Si les trois nombres a, X et b sont placés dans cet ordre sur une ligne, alors X est la moyenne de a et de b et on a donc $X=\frac{1}{2}(a+b)$.
   Si les nombres a, b et X sont placés dans cet ordre sur une ligne, alors b est la moyenne de a et de X. On a donc $b=\frac{1}{2}(a+X)$, d'où $2b=a+X$, ou $X=2b-a$.
   On utilisera ces égalités pour résoudre (b) et (c).

Solution 1

Entre le 5 et le 23, on place la moyenne de ces nombres, soit $\frac{1}{2}(5+23)$, ou 14.

Dans la 1^{re} colonne, x et le 3^e nombre ont une moyenne de 5. Ils ont donc une somme de 2(5), ou 10. (Pour répondre à la question, il n'est pas nécessaire de connaître les nombres. Il suffit de connaître leur somme.)

De la même façon, dans la 2^e colonne, la somme du 1^{er} et du 3^e nombre est égale à 2(14), ou 28. Dans la 3^e colonne, la somme du du 1^{er} et du 3^e nombre est égale à 2(23), ou 46.

Donc, la somme des nombres du tableau est égale à $5+10+14+28+23+46$, ou 126.

Solution 2

Entre le 5 et le 23, on place la moyenne de ces nombres, soit $\frac{1}{2}(5+23)$, ou 14.

Dans la 1^{re} colonne, x et le 3^e nombre ont une moyenne de 5. Le 3^e nombre est donc égal à $10-x$.

Dans une diagonale, le x et le nombre en bas, à droite, ont une moyenne de 14. Le nombre en bas, à droite, est donc égal à $28-x$.

Dans la 3^e ligne, la moyenne de $10-x$ et de $28-x$ est égale à $\frac{1}{2}(10-x+28-x)$, ou $19-x$. On place ce nombre au milieu de la ligne.

Dans la 2^e colonne, le 1^{er} nombre et le $19-x$ ont une moyenne de 14. Le 1^{er} nombre est donc égal à $2(14)-(19-x)$, ou $9+x$.

Dans la 3^e colonne, le 1^{er} nombre et le $28-x$ ont une moyenne de 23. Le 1^{er} nombre est donc égal à $2(23)-(28-x)$, ou $18+x$.

On a donc

x	$9+x$	$18+x$
5	14	23
$10-x$	$19-x$	$28-x$

et la somme des nombres du tableau est égale à $x+9+x+18+x+5+14+23+10-x+19-x+28-x$, ou 126.

(c) Déterminer la valeur de x et de y lorsque le tableau ci-contre est rempli selon le Principe de Piotr. Justifier les étapes de son raisonnement.

x	7	
9		y
		20

Solution

Le nombre au milieu est égal à la moyenne de 9 et de y. Il est aussi égal à la moyenne de x et de 20. On a donc $\frac{1}{2}(9+y)=\frac{1}{2}(x+20)$, d'où $9+y=x+20$, ou $x-y=-11$.

Le nombre en haut à droite et le x ont une moyenne de 7. Il est donc égal à $2(7)-x$, ou $14-x$. Ce nombre et le 20 ont une moyenne de y. Il est donc égal à $2y-20$.

Donc $14-x=2y-20$, d'où $x+2y=34$.

On soustrait la 1^{re} équation de la 2^e, membre par membre. On obtient $3y=45$, ou $y=15$.

On reporte $y=15$ dans la 1^{re} équation pour obtenir $x=4$.

On a donc

4	7	
9		15
		20

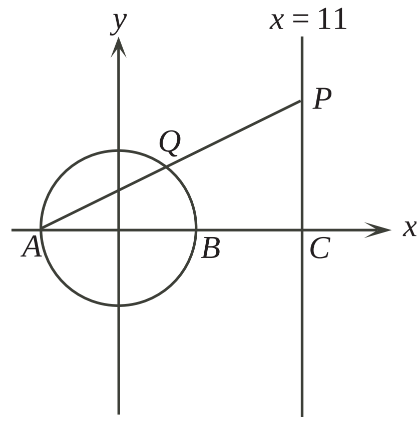
. On utilise le principe de Piotr pour obtenir

4	7	10
9	12	15
14	17	20

.

Donc $x = 4$ et $y = 15$.

2. Dans la figure ci-contre, le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ coupe l'axe des abscisses aux points A et B. La droite d'équation $x = 11$ coupe l'axe des abscisses au point C. Le point P bouge le long de cette droite au-dessus de l'axe des abscisses et le segment AP coupe le cercle au point Q.



(a) Déterminer les coordonnées de P lorsque le triangle AQB admet une aire maximale. Justifier sa réponse.

Solution

Pour déterminer les abscisses des points A et B, on pose $y = 0$ dans l'équation $x^2+y^2 = 25$. On obtient $x^2 = 25$, d'où $x = \pm 5$. Donc, A et B ont pour coordonnées respectives $(-5, 0)$ et $(5, 0)$.

Le triangle AQB a une base AB de longueur constante et une hauteur variable. Donc, son aire est maximale lorsque sa hauteur est maximale, c'est-à-dire lorsque Q est le plus éloigné de AB. Ceci se produit lorsque l'ordonnée de Q atteint une valeur maximale, soit lorsque Q est situé à l'intersection du cercle et de la partie positive de l'axe des ordonnées.

Posons $x = 0$ dans l'équation $x^2 + y^2 = 25$ du cercle. On obtient $y^2 = 25$, d'où $y = 5$, puisque Q est situé sur la partie positive de l'axe des ordonnées. Donc, Q a pour coordonnées $(0, 5)$.

Donc, P est situé sur la droite qui passe par les points $A(-5{,}0)$ et $Q(0{,}5)$. Cette droite a une pente de 1 et une ordonnée à l'origine de 5. Son équation est donc $y = x + 5$.

Puisque P a une abscisse de 11 et que ses coordonnées vérifient l'équation $y = x + 5$, il a pour coordonnées $(11, 16)$.

(b) Déterminer les coordonnées de P lorsque Q est le milieu du segment AP. Justifier sa réponse.

Solution

Soit $(11, p)$ les coordonnées de P.

On déterminera la valeur de p pour laquelle le milieu du segment PA est situé sur le cercle. (Ceci est équivalent à déterminer le point P pour lequel l'intersection du segment AP et du cercle est le milieu de AP.)

Puisque A a pour coordonnées $(-5, 0)$, alors Q est le milieu du segment AP s'il a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-5+11), \frac{1}{2}(0+p)\right)$, ou $(3, \frac{1}{2}p)$.

Le point $(3, \frac{1}{2}p)$ est situé sur le cercle si :

$$\begin{aligned} 3^2 + \left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 &= 25 \\ \tfrac{1}{4}p^2 &= 16 \\ p^2 &= 64 \\ p &= \pm 8 \end{aligned}$$

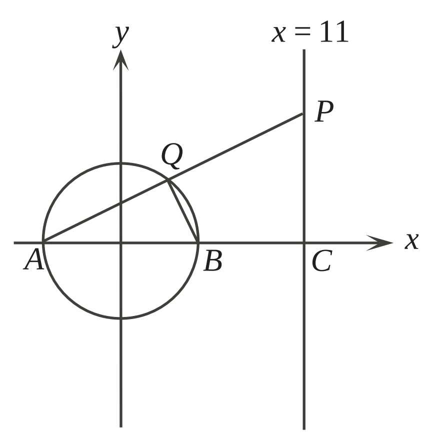
Puisque P est au-dessus de l'axe des abscisses, lors $p = 8$.

Donc, P a pour coordonnées (11, 8).

(c) Déterminer les coordonnées de P lorsque l'aire du triangle AQB est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle APC. Justifier sa réponse.

Solution 1

On joint Q et B.



Puisque AB est le diamètre du cercle, alors $\angle AQB = 90°$.

Puisque les triangles AQB et ACP sont rectangles et qu'ils ont un angle A commun, ils sont semblables.

Puisque l'aire du triangle ACP est 4 fois celle du triangle AQB, les côtés du triangle ACP

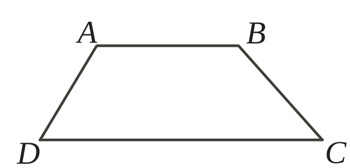
sont 2 fois plus longs que les côtés correspondants du triangle AQB (car $\sqrt{4} = 2$).
Puisque $AB = 10$, alors $AP = 20$, car $AP = 2AB$.
On sait que $AC = 16$, puisque C a pour coordonnées $(11, 0)$, et A a pour coordonnées $(-5, 0)$.
Selon le théorème de Pythagore, $PC^2 = AP^2 - AC^2$, d'où $PC = \sqrt{20^2 - 16^2}$, ou $PC = 12$.
Donc, P a pour coordonnées $(11, 12)$.

Solution 2
Soit $(11, p)$, les coordonnées de P et (a, b) les coordonnées de Q. Donc, par rapport à la base AB, la hauteur du triangle AQB est égale à b.
L'aire du triangle AQB est égale à $\frac{1}{2}(AB)(b)$, ou $5b$, puisque $AB = 10$.
L'aire du triangle APC est égale à $\frac{1}{2}(AC)(p)$, ou $8p$, puisque $AC = 16$.
Puisque l'aire du triangle AQB est égale à $\frac{1}{4}$ de celle du triangle APC, alors $5b = 2p$, ou $b = \frac{2}{5}p$.
Ceci indique que la distance de A à Q est $\frac{2}{5}$ de la distance de A à P.
Puisque l'abscisse de A est égale à -5 et que celle de P est égale à 11, alors l'abscisse de Q est égale à $-5 + \frac{2}{5}(11 - (-5))$, ou $\frac{7}{5}$. Donc, Q a pour coordonnées $\left(\frac{7}{5}, \frac{2}{5}p\right)$.
Puisque le cercle a pour équation $x^2 + y^2 = 25$, alors :

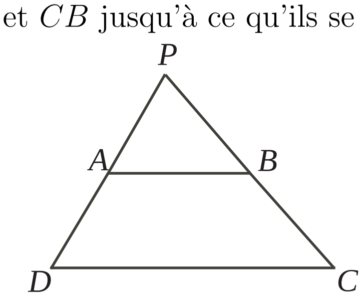
$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{7}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}p\right)^2 &= 25 \\
\tfrac{49}{25} + \tfrac{4}{25}p^2 &= \tfrac{625}{25} \\
4p^2 &= 576 \\
p^2 &= 144
\end{aligned}$$

Donc $p = 12$, puisque $p > 0$. Donc, P a pour coordonnées (11, 12).

3. (a) Dans la figure ci-contre, les côtés parallèles AB et DC du trapèze $ABCD$ ont une longueur respective de 10 et de 20 et les côtés AD et BC ont une longueur respective de 6 et de 8. Déterminer l'aire du trapèze $ABCD$.

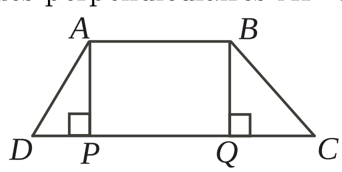


Solution 1
On prolonge les segments DA et CB jusqu'à ce qu'ils se coupent en P.



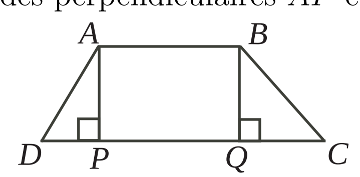
Puisque AB est parallèle à DC, alors $\angle PAB = \angle PDC$ et $\angle PBA = \angle PCD$.
Donc, les triangles PAB et PDC sont semblables.
Puisque $AB = \frac{1}{2}DC$, alors les côtés du triangle PAB ont $\frac{1}{2}$ de la longueur des côtés correspondants du triangle PDC.
Donc, $PA = AD = 6$ et $PB = BC = 8$.
Donc, les côtés du triangle PDC ont une longueur respective de 12, 16 et 20. Puisque $12^2 + 16^2 = 20^2$, le triangle PDC est rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore.
Donc, l'aire du triangle PDC est égale à $\frac{1}{2}(12)(16)$, ou 96.
Puisque le triangle PAB est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.
Donc, l'aire du trapèze $ABCD$ est égale à $96 - 24$, ou 72.

Solution 2
Aux points A et B, on abaisse des perpendiculaires AP et BQ à la base DC.



Soit $AP = BQ = h$ et $DP = x$.
Puisque $AB = 10$ et que $ABQP$ est un rectangle, alors $PQ = 10$.
Puisque $DC = 20$, alors $QC = 20 - x - 10$, ou $QC = 10 - x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DPA, $x^2 + h^2 = 6^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CQB, $(10 - x)^2 + h^2 = 8^2$.
On soustrait la 1re équation de la 2e, membre par membre, pour obtenir $100 - 20x = 28$, d'où $20x = 72$, ou $x = \frac{18}{5}$.
On reporte cette valeur dans la 1re équation pour obtenir $h^2 = 36 - \left(\frac{18}{5}\right)^2$, ou $h^2 = \frac{576}{25}$, d'où $h = \frac{24}{5}$.
Donc, l'aire du trapèze $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{24}{5}\right)(10 + 20)$, ou 72.

Solution 3
Aux points A et B, on abaisse des perpendiculaires AP et BQ à la base DC.



On découpe et on enlève le rectangle $ABQP$, puis on joint les deux triangles le long des lignes AP et BQ.
On forme ainsi un triangle DCX de manière que $DX = 6$, $XC = 8$ et $DC = 20 - 10$, ou $DC = 10$. Puisque $6^2 + 8^2 = 10^2$, le triangle DCX est rectangle selon le théorème de Pythagore.

Puisque $\sin(\angle XDC) = \dfrac{XC}{DC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$, la hauteur de X à la base DC est égale à $XD\sin(\angle XDC)$, c'est-à-dire à $6\left(\frac{4}{5}\right)$, ou $\frac{24}{5}$, ce qui correspond à la hauteur du trapèze initial.

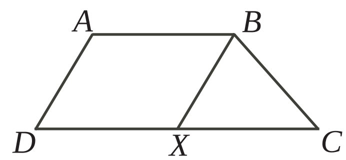
(On aurait pu déterminer la hauteur en calculant l'aire du triangle XDC de deux façons, soit en utilisant $\frac{1}{2}(DX)(XC) = 24$ et $\frac{1}{2}h(DC) = 5h$.)

Donc, l'aire du trapèze initial est égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{24}{5}\right)(10+20)$, ou 72.

(L'aire du trapèze est aussi égale à la somme de l'aire du rectangle $ABQP$ et du triangle XDC, soit $\frac{24}{5} \times 10 + 24$, ou 72.)

Solution 4

Soit X le point sur le côté CD de manière que le segment BX soit parallèle au côté AD.



$ABXD$ est donc un parallélogramme. Donc, $BX = AD = 6$ et $DX = AB = 10$.

Donc $XC = DC - DX$, ou $XC = 10$.

Le triangle BXC a des côtés de longueurs 6, 8 et 10. Puisque $6^2 + 8^2 = 10^2$, le triangle BXC est rectangle en B selon le théorème de Pythagore. L'aire du triangle BXC est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.

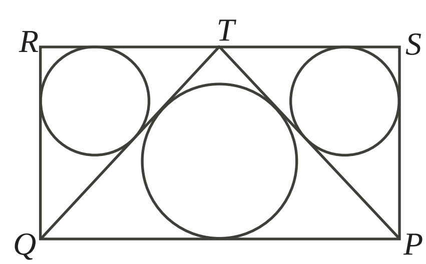
On joint B et D. BD divise l'aire de $ABXD$ en moitiés.

De plus, BX divise l'aire du triangle BDC en moitiés, puisqu'il est une médiane.

Donc, l'aire des triangles ABD, BDX et XBC est la même.

L'aire du trapèze $ABCD$ est donc égale à 3(24), ou 72.

(b) Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle et T est le milieu du côté RS. Les cercles inscrits dans les triangles PTS et RTQ ont chacun un rayon de 3. Le cercle inscrit dans le triangle QPT a un rayon de 4. Déterminer les dimensions du rectangle $PQRS$.



Solution 1

Soit $RT = a$ et $RQ = b$. Donc $RS = 2a$.

On abaisse une perpendiculaire du point T au point Z sur le côté QP. Par symétrie, Z est le point de contact du grand cercle et de QP.

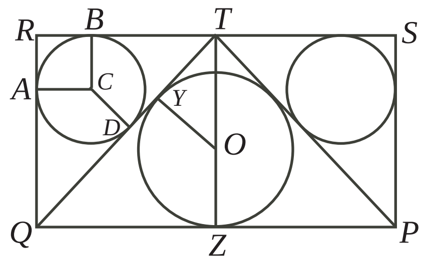
Soit O le centre du cercle inscrit dans le triangle QTP et C le centre du cercle inscrit dans le triangle RTQ.

Soit A, B et D les points de contact respectifs du cercle de centre C et des côtés QR, RT

et QT.

Soit Y le point de contact du cercle de centre O et de QT.

On trace les rayons CA, CB, CD et OY. Ces rayons sont perpendiculaires aux côtés respectifs QR, RT, QT et QT.



On sait que $OY = OZ = 4$.

Puisque $TZ = b$, alors $TO = b - 4$.

Puisque $QZ = a$, alors $QY = a$ (deux tangentes issues d'un même point).

Puisque $CA = CB = 3$ et que $RACB$ est un rectangle (on sait que trois de ses angles sont droits), alors $RACB$ est un carré et $RA = RB = 3$.

Donc $AQ = b - 3$ et $BT = a - 3$.

Puisque les tangentes TD et TB sont issues d'un même point, de même que QD et QA, alors $TD = BT = a - 3$ et $QD = QA = b - 3$.

Or $TY = QT - QY$, c'est-à-dire que $TY = QD + TD - QY$, d'où $TY = (b-3)+(a-3)-a$, ou $TY = b - 6$.

Donc, le triangle TOY est rectangle en Y et on a $TO = b - 4$, $TY = b - 6$ et $OY = 4$.

D'après le théorème de Pythagore, $4^2 + (b-6)^2 = (b-4)^2$, d'où $4b = 36$, ou $b = 9$.

Donc $TY = 9 - 6$, ou $TY = 3$, et $\tan(\angle OTY) = \dfrac{OY}{TY}$, ou $\tan(\angle OTY) = \frac{4}{3}$.

De plus, $\frac{4}{3} = \tan(\angle QTZ) = \dfrac{a}{b}$.

Puisque $b = 9$, alors $a = 12$.

Donc, le rectangle mesure 24 sur 9.

Solution 2

Soit $RT = a$ et $RQ = b$. Donc $RS = 2a$.

On abaisse une perpendiculaire du point T au point Z sur le côté QP. Par symétrie, Z est le point de contact du grand cercle et de QP. De plus, $QZ = a$.

Puisque le cercle inscrit dans le triangle QRT a un rayon de 3, il en est de même du cercle inscrit dans le triangle QZT.

Soit O le centre du cercle inscrit dans le triangle QTP et C' le centre du cercle inscrit dans le triangle QZT.

Puisque C' et O sont situés sur la bissectrice de l'angle TQP, alors $\tan(\angle C'QP) = \tan(\angle OQP)$.

Puisque C' est à 3 unités de TZ, alors $\tan(\angle C'QP) = \dfrac{3}{a-3}$ et $\tan(\angle OQP) = \dfrac{4}{a}$.
Donc $\dfrac{3}{a-3} = \dfrac{4}{a}$, d'où $3a = 4a - 12$, ou $a = 12$.
On obtient $b = 9$ de la même manière que dans la Solution 1.
Donc, le rectangle mesure 24 sur 9.

Solution 3
Soit $RT = a$ et $RQ = b$. Donc $RS = 2a$.
On calcule l'aire des triangles QRT et QTP de deux façons, soit au moyen de la formule habituelle, $\frac{1}{2}bh$, et au moyen de la formule Aire $= pr$, p étant le demi-périmètre et r étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle.
Dans le triangle QRT, $RT = a$, $RQ = b$, $QT = \sqrt{a^2+b^2}$ et le cercle inscrit a un rayon de 3. Donc :

$$\tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}(a + b + \sqrt{a^2+b^2})(3)$$

Dans le triangle QTP, $QT = TP = \sqrt{a^2+b^2}$, $QP = 2a$, la hauteur est égale à b et le cercle inscrit a un rayon de 4. Donc :

$$\tfrac{1}{2}(2a)b = \tfrac{1}{2}(2\sqrt{a^2+b^2} + 2a)(4)$$

On simplifie ces équations pour obtenir le système suivant :

$$\begin{aligned} ab &= 3(a+b) + 3\sqrt{a^2+b^2} \\ ab &= 4a + 4\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

On élimine les termes en ab pour obtenir $3b - a = \sqrt{a^2+b^2}$.
Le carré du membre de gauche est donc égal au carré du membre de droite et on a donc $9b^2 - 6ab + a^2 = a^2 + b^2$, ou $8b^2 - 6ab = 0$.
Puisque $b \neq 0$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$.
On reporte $a = \frac{4}{3}b$ dans la première équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}b^2 &= 4b + 3b + 3\sqrt{\tfrac{16}{9}b^2 + b^2} \\ \tfrac{4}{3}b^2 &= 7b + \sqrt{25b^2} \\ \tfrac{4}{3}b^2 &= 7b + 5b \qquad \text{(puisque } b > 0\text{)} \\ 4b^2 &= 36b \\ b &= 9 \qquad \text{(puisque } b \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Donc $a = 12$. Le rectangle mesure donc 24 sur 9.

4. (a) Déterminer la fraction $\dfrac{p}{q}$ qui est le plus près de $\frac{3}{7}$ sans y être égale, p et q étant des entiers strictement positifs et $q < 100$. Justifier les étapes de son raisonnement.

Solution

On cherche des entiers positifs, p et q, $q < 100$, de manière à minimiser :

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{3}{7}\right| = \left|\frac{7p - 3q}{7q}\right| = \frac{|7p - 3q|}{7q}$$

Pour minimiser une telle fraction, on aimerait que le numérateur soit petit et que le dénominateur soit grand.

Puisque les deux fractions, $\frac{p}{q}$ et $\frac{3}{7}$, ne sont pas égales, le numérateur de leur différence ne peut être égal à 0. Puisque ce numérateur est un entier strictement positif, il ne peut être inférieur à 1.

On considère les plus grandes valeurs possibles de q en procédant à rebours, à partir de 99, pour vérifier si $7p - 3q$ peut égaler 1 ou -1.

Si $q = 99$, alors $7p - 3q$ devient $7p - 297$. Cette expression ne peut être égale à ± 1, puisque le multiple de 7 le plus près de 297 est 294.

Si $q = 98$, alors $7p - 3q$ devient $7p - 294$. Cette expression ne peut être égale à ± 1, puisque $7p - 294$ est divisible par 7, peu importe la valeur de p.

Si $q = 97$, alors $7p - 3q$ devient $7p - 291$. Cette expression ne peut être égale à ± 1, puisque le multiple de 7 le plus près de 291 est 294.

Si $q = 96$, alors $7p - 3q$ devient $7p - 288$. Cette expression est égale à -1 lorsque $p = 41$.

Lorsque $p = 41$ et $q = 96$, la différence entre les fractions $\dfrac{3}{7}$ et $\dfrac{p}{q}$ est égale à $\dfrac{1}{7(96)}$.

Si $q > 96$, le numérateur de $\dfrac{|7p - 3q|}{7q}$ est supérieur ou égal à 2. La différence est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{7(99)}$ et $\dfrac{2}{7(99)} > \dfrac{1}{7(96)}$.

Si $q < 96$, la différence entre $\dfrac{p}{q}$ et $\dfrac{3}{7}$ est supérieure ou égale à $\dfrac{1}{7(95)}$ et $\dfrac{1}{7(95)} > \dfrac{1}{7(96)}$.

La différence admet une valeur minimale lorsque $\dfrac{p}{q} = \dfrac{41}{96}$. Donc, la fraction $\dfrac{41}{96}$ est la plus près de la fraction $\dfrac{3}{7}$ selon les restrictions données.

(b) La *somme naïve* de deux nombres rationnels, $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, est le nombre $\dfrac{a+c}{b+d}$. (Un *nombre rationnel* est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers et dont le dénominateur n'est pas égal à 0.) À l'étape 0, on écrit les nombres rationnels $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. Pour atteindre l'étape suivante, on considère chaque paire de fractions consécutives de l'étape précédente et on insère entre elles la somme naïve de ces deux fractions. Les premières étapes de ce processus sont indiquées ci-dessous :

ÉTAPE 0 :	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$
ÉTAPE 1 :	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$
ÉTAPE 2 :	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$
ÉTAPE 3 :	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$

Démontrer que :

(i) aucun nombre rationnel ne sera inséré plus d'une fois ;

Solution

On considère deux nombres rationnels consécutifs dans une étape particulière, soit $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, de manière que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

On a donc $ad < bc$, ou $bc - ad > 0$.

À l'étape suivante, le nombre $\dfrac{a+c}{b+d}$ sera inséré entre eux. Or :

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \iff a(b+d) < b(a+c) \iff 0 < bc - ad$$

De plus :

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \iff d(a+c) < c(b+d) \iff 0 < bc - ad$$

On sait que inégalité $0 < bc - ad$ est vraie dans les deux cas. Donc $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

Donc, chaque nombre rationnel qui est inséré entre deux nombres rationnels est supérieur au premier et inférieur au deuxième. Les trois nombres sont donc en ordre *strictement* croissant.

Donc, chaque nombre rationnel qui est inséré est différent des nombres qui se trouvent déjà dans la liste. Ainsi, aucun nombre rationnel ne sera inséré plus d'une fois.

(ii) chaque fraction qui est insérée est irréductible ;

Solution

On démontre d'abord un lemme.

Lemme
Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des nombres rationnels consécutifs lors d'une étape et que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$.

Démonstration
À l'étape 0, les deux fractions vérifient cette propriété.
Supposons que toutes les fractions de l'étape k vérifient cette propriété.
On considère deux fractions consécutives de l'étape k, soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, de manière que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
À l'étape $(k+1)$, on insère la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ entre elles et on obtient $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
On remarque que $b(a+c)-a(b+d) = bc-ad = 1$ et que $c(b+d)-d(a+c) = bc-ad = 1$.
Donc, chaque paire de fractions consécutives de l'étape $(k+1)$ vérifie la propriété.
Par le principe de récurrence, le lemme est démontré.

Supposons qu'une fraction $\frac{kp}{kq}$ $(k, p, q \in \mathbb{Z}^+)$ est insérée entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.
Selon le lemme, on a $b(kp) - a(kq) = 1$, ou $k(bp - aq) = 1$.
Donc, k est un diviseur de 1, d'où $k = 1$.
Donc, le numérateur et le dénominateur d'une fraction insérée n'admettent que 1 comme diviseur commun. Donc, les fractions insérées sont irréductibles.

(iii) chaque nombre rationnel entre 0 et 1 sera inséré à une étape quelconque.

Solution 1
On remarque que tous les nombres rationnels de la forme $\frac{1}{n}$ ou $\frac{n-1}{n}$, $n \geq 2$, sont insérés dans la liste à l'étape $n-1$. (Le premier est inséré entre les nombres $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{n-1}$; le deuxième est inséré entre $\frac{n-2}{n-1}$ et $\frac{1}{1}$.)

À n'importe quelle étape, on peut remarquer que toutes les fractions irréductibles, entre 0 et 1, qui ont pour dénominateur 1, 2, 3, …, jusqu'à un nombre particulier, paraissent dans la liste. Par exemple, à l'étape 2, toutes celles qui ont pour dénominateur 1, 2, 3 paraissent dans la liste. À l'étape 3, toutes celles qui ont pour dénominateur 1, 2, 3, 4 paraissent dans la liste. À une étape particulière, soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel irréductible, entre 0 et 1, qui ne paraît pas dans la liste de telle sorte que toutes les fractions irréductibles, entre 0 et 1, qui ont un dénominateur inférieur à q paraissent dans la liste.

Puisque PGCD$(p,q)=1$, l'équation diophantine $py-qx=1$ admet des solutions.
De fait, cette équation diophantine admet une seule solution dans l'intervalle $0 \le y < q$.
On peut même affirmer que $0 < y < q$, puisque $q > 1$. (Si $y=0$, on a $-qx=1$ et il faut que q soit égal à 1.)
(Puisque $0 < y < q$ et $qx = py-1$, alors $0 < qx < pq$, d'où $0 < x < p$.)
Soit $(x,y)=(a,b)$ cette solution unique.
Puisque $pb-qa=1$, alors $pb > qa$, d'où $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$.
On considère la fraction $\frac{p-a}{q-b}$. Puisque $0 < a < p$ et $0 < b < q$, son numérateur et son dénominateur sont des entiers strictement positifs.
De plus, puisque $b(p-a)-a(q-b)=bp-aq=1$, alors $\frac{a}{b} < \frac{p-a}{q-b}$.
Si on peut démontrer que $\frac{a}{b}$ et $\frac{p-a}{q-b}$ sont consécutifs à une étape quelconque, le nombre $\frac{p}{q}$ sera inséré entre eux à l'étape suivante.
Puisque $\frac{a}{b}$ et $\frac{p-a}{q-b}$ ont un dénominateur inférieur à q, ils doivent paraître dans la liste selon la définition de $\frac{p}{q}$.
On remarque que $\frac{a}{b}$ ne peut être égal à $\frac{0}{1}$. (S'il l'était, on aurait $a=0$ et $bp-aq=1$ deviendrait $bp=1$, d'où $p=1$. Or, on sait que $\frac{1}{q}$ a été inséré à l'étape $q-1$. Donc $p \ne 1$.)
De plus, $\frac{p-a}{q-b}$ ne peut être égal à $\frac{1}{1}$. (S'il l'était, on aurait $p-a=q-b$. Alors $b(p-a)-a(q-b)=1$ deviendrait $(b-a)(q-b)=1$, d'où $b-a=1$. Puisque $p-a=q-b$, alors $q-p=b-a=1$. Or, on sait que $\frac{q-1}{q}$ a été inséré à l'étape $q-1$. Donc $q-p \ne 1$.)

On considère trois possibilités : $b < q-b$, $b > q-b$ et $b = q-b$.

- Supposons que $b < q-b$.
  On considère l'étape où la fraction $\frac{p-a}{q-b}$ a été insérée dans la liste.
  Supposons que $\frac{p-a}{q-b}$ a été insérée entre les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{M}{N}$, $\frac{m}{n} < \frac{M}{N}$ (c'est-à-dire que $m+M=p-a$ et $n+N=q-b$).
  On remarque que $0 < n < q-b$. (n et N sont des dénominateurs et ne peuvent donc pas égaler 0.)

  Puisque $\frac{m}{n}$ et $\frac{p-a}{q-b}$ sont des fractions consécutives à cette étape et que $\frac{m}{n} < \frac{p-a}{q-b}$, alors $(p-a)n-(q-b)m=1$.

  Puisque PGCD$(p-a,q-b)=1$, l'équation diophantine $(p-a)Y-(q-b)X=1$

admet une seule solution dans l'intervalle $0 < Y < q - b$.
Or, $(X, Y) = (a, b)$ est une telle solution, car $0 < b < q - b$ et $b(p - a) - a(q - b) = 1$ (ces deux conditions ont été démontrées précédemment).
Donc, $\frac{a}{b}$ doit être la fraction immédiatement à la gauche de $\frac{p-a}{q-b}$ lorsque celle-ci est insérée. Donc, $\frac{p}{q}$ est insérée à l'étape suivante.

- Supposons que $q - b < b$.
  On considère l'étape où la fraction $\frac{a}{b}$ a été insérée dans la liste.
  Supposons que $\frac{a}{b}$ a été insérée entre les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{M}{N}$, $\frac{m}{n} < \frac{M}{N}$ (c'est-à-dire que $m + M = a$ et $n + N = b$).
  On remarque que $0 < n < b$. (n et N sont des dénominateurs et ne peuvent donc pas égaler 0.)

  Puisque $\frac{m}{n}$ et $\frac{M}{N}$ sont des fractions consécutives à cette étape et que $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$, alors $an - bm = 1$.

  Puisque PGCD$(a, b) = 1$, l'équation diophantine $aY - bX = 1$ admet une seule solution dans l'intervalle $0 < Y < b$.
  Or, $(X, Y) = (p - a, q - b)$ est une telle solution, car $0 < q - b < b$ et $b(p - a) - a(q - b) = 1$ (ces deux conditions ont été démontrées précédemment).
  Donc, $\frac{p-a}{q-b}$ doit être la fraction immédiatement à la gauche de $\frac{a}{b}$ lorsque celle-ci est insérée. Donc, $\frac{p}{q}$ est insérée à l'étape suivante.
- Supposons que $q - b = b$.
  On a donc $q = 2b$.
  Or, $bp - aq = 1$ devient $b(p - 2a) = 1$, d'où $b = 1$ et $q = 2$.
  Puisque toutes les fractions irréductibles ayant pour dénominateur 2 (c'est-à-dire la fraction $\frac{1}{2}$) ont été insérées précédemment, cette possibilité ne se présente donc pas.

Donc, chaque nombre rationnel entre 0 et 1 sera inséré à une étape quelconque.

Solution 2
Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles consécutives à une étape quelconque.
Soit $S\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = a+b+c+d$, c'est-à-dire la somme des numérateurs et des dénominateurs.
On considère la valeur minimale de S à une étape particulière.
Lorsque la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est insérée, on a $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ et les deux nouvelles sommes sont :

$$S\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right) = a + b + a + c + b + d = 2a + 2b + c + d$$

et

$$S\left(\frac{a+c}{b+d},\frac{c}{d}\right)=a+c+b+d+c+d=a+b+2c+2d$$

Chacune est supérieure à $S\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$.
Donc, la valeur minimale de S augmente à chaque étape.

Supposons que la fraction irréductible $\frac{a}{b}$, entre 0 et 1, n'est jamais insérée dans la suite d'étapes.
À n'importe quelle étape, puisque $\frac{a}{b}$ ne figure pas dans la liste, elle doit être située entre deux fractions consécutives de la liste, disons $\frac{m_1}{n_1}$ et $\frac{m_2}{n_2}$. On a donc $\frac{m_1}{n_1}<\frac{a}{b}<\frac{m_2}{n_2}$.
On sait que $m_2n_1-n_2m_1=1$, d'après le lemme de la partie (ii).
Donc $m_1b<n_1a$ et $n_2a<m_2b$. Puisque m_1b, n_1a, n_2a et m_2b sont des entiers positifs, alors $n_1a-m_1b\geq 1$ et $m_2b-n_2a\geq 1$.
Or :

$$\begin{aligned}
& m_2+n_2+m_1+n_1\\
= \;& (m_2+n_2)(1)+(m_1+n_1)(1)\\
\leq \;& (m_2+n_2)(n_1a-m_1b)+(m_1+n_1)(m_2b-n_2a)\\
= \;& m_2n_1a+n_1n_2a-m_1m_2b-m_1n_2b+m_1m_2b+m_2n_1b-m_1n_2a-n_1n_2a\\
= \;& a(m_2n_1-m_1n_2)+b(m_2n_1-m_1n_2)\\
= \;& a+b
\end{aligned}$$

Puisque la fraction $\frac{a}{b}$ est fixe, alors $a+b$ est fixe. Puisque la valeur minimale de

$$m_2+n_2+m_1+n_1$$

augmente d'une étape à l'autre, on aura éventuellement $a+b<m_2+n_2+m_1+n_1$.
À cette étape, il n'y aura pas de fractions consécutives dans la liste entre lesquelles on peut placer $\frac{a}{b}$, ce qui est une contradiction.
Donc, $\frac{a}{b}$ doit paraître dans la liste à une étape quelconque.
Donc, chaque nombre rationnel entre 0 et 1 sera inséré à une étape quelconque.