The Canadian Mathematical Society

La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques

le mercredi 23 novembre 2005

Solutions

Partie A

1. Déterminer la valeur de l'expression $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

   Solution 1 (À l'aide de différences de carrés)

$$\begin{aligned} & 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 \\ = \ & (10-9)(10+9) + (8-7)(8+7) + (6-5)(6+5) + (4-3)(4+3) + (2-1)(2+1) \\ = \ & 1(10+9) + 1(8+7) + 1(6+5) + 1(4+3) + 1(2+1) \\ = \ & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ = \ & 55 \end{aligned}$$

   (On peut obtenir la réponse 55 en calculant la somme directement ou en utilisant $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{1}{2}(10)(11) = 55$.)

   Solution 2 (En calculant directement)

$$\begin{aligned} & 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 \\ = \ & 100 - 81 + 64 - 49 + 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1 \\ = \ & 19 + 15 + 11 + 7 + 3 \qquad \text{(On a effectué les soustractions.)} \\ = \ & 55 \end{aligned}$$

   Réponse : 55

2. Une fourmi est située au point $(1, 9)$ du plan cartésien. Elle se rend au point $(2, 10)$, puis au point $(3, 11)$, et ainsi de suite. Elle continue de la sorte jusqu'à ce qu'elle arrive à un point dont l'ordonnée est le double de l'abscisse. Quelles sont les coordonnées de ce point ?

   Solution 1
   La fourmi part du point $(1, 9)$. Chaque mouvement consiste à bouger de 1 unité vers la droite et de 1 unité vers le haut. Donc, après k mouvements, la fourmi est au point $(1 + k, 9 + k)$.
   Lorsque son ordonnée est le double de son abscisse, on a $9+k = 2(1+k)$, c.-à-d. $9+k = 2+2k$, d'où $k = 7$.
   Lorsque $k = 7$, la fourmi est au point $(1 + 7, 9 + 7)$, c.-à-d. au point $(8, 16)$, où elle s'arrête.

   Solution 2
   La fourmi part du point $(1, 9)$. Chaque mouvement consiste à bouger de 1 unité vers la droite et de 1 unité vers le haut. Donc, à chaque point vers lequel la fourmi se dirige, l'ordonnée est toujours 8 de plus que l'abscisse. Les coordonnées de ces points ont donc tous la forme $(n, n+8)$.
   Lorsque l'ordonnée est le double de l'abscisse, on a $n + 8 = 2n$, d'où $n = 8$.
   Lorsque $n = 8$, la fourmi est au point $(8, 16)$, où elle s'arrête.

Solution 3
On écrit les coordonnées de tous les points vers lesquels la fourmi se dirige et on s'arrête lorsque l'ordonnée est le double de l'abscisse :

$$(1,9),(2,10),(3,11),(4,12),(5,13),(6,14),(7,15),(8,16)$$

Donc, la fourmi s'arrête au point $(8,16)$.

Réponse : $(8,16)$

3. Si $ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+x-2)(x-4)-(x+2)(x^2-5x+4)$ pour toutes les valeurs de x, quelle est la valeur de l'expression $a+b+c+d$?

Solution 1
On utilise le fait que $a+b+c+d=a(1^3)+b(1^2)+c(1)+d$. Donc, $a+b+c+d$ doit être égal au membre de droite de l'identité lorsqu'on pose x égal à 1.
Donc, $a+b+c+d$ est égal à $(1^2+1-2)(1-4)-(1+2)(1^2-5+4)$, c.-à-d. à $0(-3)-3(0)$, ou 0.

Solution 2
On simplifie le membre de droite de l'identité donnée en factorisant d'abord les deux trinômes du second degré :

$$\begin{aligned}(x^2+x-2)(x-4)-(x+2)(x^2-5x+4) &= (x-1)(x+2)(x-4)-(x+2)(x-1)(x-4)\\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc $ax^3+bx^2+cx+d=0$ pour toutes les valeurs de x. (En d'autres mots, ax^3+bx^2+cx+d est le polynôme zéro et tous ses coefficients sont donc nuls.)
Donc $a=b=c=d=0$, d'où $a+b+c+d=0$.

Solution 3
On développe et on simplifie le membre de droite :

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d &= (x^2+x-2)(x-4)-(x+2)(x^2-5x+4)\\ &= x^3+x^2-2x-4x^2-4x+8-(x^3+2x^2-5x^2-10x+4x+8)\\ &= x^3-3x^2-6x+8-(x^3-3x^2-6x+8)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc, tous les coefficients du polynôme ax^3+bx^2+cx+d sont nuls. On a donc $a=b=c=d=0$, d'où $a+b+c+d=0$.

Réponse : 0

4. Une fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible si p et q n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1. Parmi les 71 fractions $\frac{1}{72}, \frac{2}{72}, \ldots, \frac{70}{72}, \frac{71}{72}$, combien sont irréductibles ?

Solution 1

On remarque d'abord que $72 = 2^3 \times 3^2$.

Pour qu'une fraction de la forme $\frac{a}{72}$ soit irréductible, il faut que a et 72 n'admettent aucun diviseur commun.

Donc, a ne peut être divisible par 2 ou par 3 (puisque 2 et 3 sont les seuls diviseurs premiers de 72).

Combien y a-t-il d'entiers, de 1 à 71, qui ne sont pas divisibles par 2 ou par 3 ?

Les 35 nombres pairs, soit 2, 4, 6, ..., 70, *sont* divisibles par 2.

De même, les 23 multiples de 3, soit 3, 6, ..., 69, sont divisibles par 3.

Or, certains des nombres pairs et des multiples de 3 ont été comptés deux fois, soit ceux qui sont à la fois multiples de 2 et de 3. Il s'agit des multiples de 6, soit 6, 12, ..., 66. Il y en a 11.

Donc, le nombre d'entiers, de 1 à 71, qui sont divisibles par 2 ou par 3 est égal à $35 + 23 - 11$, c'est-à-dire à 47. (On a soustrait 11, car 11 nombres ont été comptés deux fois.)

Donc, le nombre d'entiers, de 1 à 71, qui ne sont pas divisibles par 2 ou par 3 est égal à $71 - 47$, ou 24.

Donc, 24 des 71 fractions $\frac{1}{72}, \frac{2}{72}, \cdots, \frac{70}{72}, \frac{71}{72}$ sont irréductibles.

Solution 2

On remarque d'abord que $72 = 2^3 \times 3^2$.

Pour qu'une fraction de la forme $\frac{a}{72}$ soit irréductible, il faut que a et 72 n'admettent aucun diviseur commun.

Puisque 2 et 3 sont les seuls diviseurs premiers de 72, alors a et 72 n'admettent aucun diviseur commun lorsque a n'est pas divisible par 2 ou par 3.

On examine les premières fractions de la liste :

$$\frac{1}{72}, \frac{2}{72}, \frac{3}{72}, \frac{4}{72}, \frac{5}{72}, \frac{6}{72}, \frac{7}{72}, \frac{8}{72}, \frac{9}{72}, \frac{10}{72}, \frac{11}{72}, \frac{12}{72}$$

Parmi elles, les suivantes sont irréductibles :

$$\frac{1}{72}, \frac{5}{72}, \frac{7}{72}, \frac{11}{72}$$

La 1^re^ et la 5^e^ des 6 premières fractions, de même que la 1^re^ et la 5^e^ des 6 fractions suivantes, sont irréductibles.

Cette régularité se poursuit (voir ci-dessous). Si on ajoute à la liste la fraction $\frac{72}{72}$, qui n'est pas irréductible, on obtient une liste contenant 12 ensembles de 6 fractions. Dans chaque ensemble, il y a 2 fractions irréductibles. En tout, il y a donc 12×2, c'est-à-dire 24 fractions irréductibles.

(Pourquoi la régularité se poursuit-elle ? Chaque fraction de la liste peut être exprimée d'une des façons suivantes, pour une valeur de k quelconque :

$$\frac{6k+1}{72}, \frac{6k+2}{72}, \frac{6k+3}{72}, \frac{6k+4}{72}, \frac{6k+5}{72}, \frac{6k+6}{72}$$

Puisque les numérateurs $6k+2$, $6k+4$ et $6k+6$ sont divisibles par 2 et que le numérateur $6k+3$ est divisible par 3, aucune des fractions munies de ces numérateurs n'est irréductible.
De plus, $6k+1$ et $6k+5$ ne sont jamais divisibles par 2 ou par 3, quelle que soit la valeur de k.
Les fractions formées de ces deux numérateurs sont donc irréductibles.
Donc, 2 des fractions de chaque ensemble de 6 fractions consécutives sont irréductibles.)

Réponse : 24

5. Un immeuble commercial de 50 étages a vingt-cinq étages peints en noir et vingt-cinq étages dorés. Si on additionne le nombre d'étages dorés de la moitié supérieure de l'immeuble et le nombre d'étages noirs de la moitié inférieure de l'immeuble, on obtient une somme de 28. Combien y a-t-il d'étages dorés dans la moitié supérieure de l'immeuble ?

Solution 1
Soit d le nombre d'étages dorés dans la moitié supérieure de l'immeuble.
Il y a donc $25-d$ étages noirs dans la moitié supérieure de l'immeuble.
Puisqu'il y a 25 étages noirs en tout, le nombre d'étages noirs dans la partie inférieure est égal à $25-(25-d)$, c'est-à-dire d.
Puisque la somme du nombre d'étages dorés de la moitié supérieure de l'immeuble et du nombre d'étages noirs de la moitié inférieure de l'immeuble est égale à 28, alors $d+d=28$, d'où $d=14$.
Il y a donc 14 étages dorés dans la moitié supérieure de l'immeuble.

Solution 2
Soit D et d les nombres respectifs d'étages dorés dans les parties supérieure et inférieure de l'immeuble et soit N et n les nombres respectifs d'étages noirs dans les parties supéreure et inférieure de l'immeuble.
Si on considère la partie supérieure, puis la partie inférieure de l'immeuble, on a $D+N=25$ et $d+n=25$.
Puisqu'il y a 25 étages de chaque couleur, alors $D+d=25$ et $N+n=25$.
De plus, on donne $D+n=28$, d'où $n=28-D$.
Puisque $N+n=25$, alors $N+28-D=25$, d'où $N=D-3$.
Puisque $D+N=25$, alors $D+D-3=25$, d'où $2D=28$ et $D=14$.
Il y a donc 14 étages dorés dans la moitié supérieure de l'immeuble.

Réponse : 14

6. On a assigné une valeur à chaque rangée et une valeur à chaque colonne du tableau ci-contre. Chaque case du tableau contient un nombre qui est la somme des valeurs de sa rangée et de sa colonne. Par exemple, le « 8 » est la somme des valeurs de la 3[e] rangée et de la 4[e] colonne. Déterminer la valeur de x et celle de y.

3	0	5	6	-2
-2	-5	0	1	y
5	2	x	8	0
0	-3	2	3	-5
-4	-7	-2	-1	-9

Solution 1

Soit A, B, C, D, E les valeurs respectives des cinq colonnes et a, b, c, d, e les valeurs respectives des cinq rangées.

On examine le sous-tableau

0	1
x	8

.

Puisque 0 est situé dans la rangée 2 et la colonne 3, alors $0 = b + C$.

De même, $1 = b + D$, $8 = c + D$ et $x = c + C$.

On a donc $8+0 = (b+C)+(c+D)$, c'est-à-dire $8+0 = (c+C)+(b+D)$. Donc $8+0 = x+1$, d'où $x = 7$.

De même, si on examine le sous-tableau

1	y
8	0

, on obtient $1 + 0 = y + 8$, d'où $y = -7$.

Donc $x = 7$ et $y = -7$.

(De façon générale, pour tout sous-tableau de la forme

p	q
r	s

, on obtient $p + s = q + r$.)

Solution 2

Soit A, B, C, D, E les valeurs respectives des cinq colonnes et a, b, c, d, e les valeurs respectives des cinq rangées.

En procédant par tâtonnements, on suppose que $A = 0$.

En observant le « 3 » dans la rangée 1, colonne 1, on a $A + a = 3$, d'où $a = 3$.

Puisque $a = 3$ et que le nombre dans la rangée 1, colonne 2, est 0, on a $a+B = 0$, d'où $B = -3$.

De même, on obtient $C = 2$, $D = 3$ et $E = -5$.

Puisque $A = 0$ et que le nombre dans la rangée 2, colonne 1, est -2, on a $b + A = 0$, d'où $b = -2$.

Puisque $y = b + E$, alors $y = -2 + (-5)$, c'est-à-dire que $y = -7$.

Puisque $A = 0$ et que le nombre dans la rangée 3, colonne 1, est 5, on a $c + A = 5$, d'où $c = 5$.

Puisque $x = c + C$, alors $x = 5 + 2$, c'est-à-dire que $x = 7$.

Donc $x = 7$ et $y = -7$.

Solution 3

Soit A, B, C, D, E les valeurs respectives des cinq colonnes et a, b, c, d, e les valeurs respectives des cinq rangées.

Si on choisit cinq nombres dans le tableau de manière à en inclure un dans chaque rangée et chaque colonne, alors peu importe les nombres choisis, leur somme est la même, car elle est égale à $A+B+C+D+E+a+b+c+d+e$.

Voici trois façons de le faire (voir les nombres en gras) :

3	0	5	6	-2
-2	$\mathbf{-5}$	0	1	y
5	2	x	**8**	0
0	-3	**2**	3	-5
-4	-7	-2	-1	$\mathbf{-9}$

3	0	5	6	$\mathbf{-2}$
-2	-5	0	**1**	y
5	2	**x**	8	0
0	$\mathbf{-3}$	2	3	-5
$\mathbf{-4}$	-7	-2	-1	-9

3	0	5	6	-2
-2	-5	0	1	**y**
5	**2**	x	8	0
0	-3	2	**3**	-5
-4	-7	$\mathbf{-2}$	-1	-9

Donc $3+(-5)+2+8+(-9)=(-4)+(-3)+x+1+(-2)=3+y+2+(-2)+3$, c'est-à-dire que $-1=x-8=y+6$.

Donc $x=7$ et $y=-7$.

Solution 4

Soit A,B,C,D,E les valeurs respectives des cinq colonnes et a,b,c,d,e les valeurs respectives des cinq rangées.

On considère les deux premiers nombres de la rangée 1.

On a $3=A+a$ et $0=B+a$.

On soustrait, membre par membre, pour obtenir $A-B=3$.

On remarque que peu importe la rangée, si on choisit les deux premiers nombres de la rangée, on obtient $A-B$, ce qui est égal à 3.

De même, puisque la différence entre le 0 et le 5 de la rangée 1 est égale à 5, dans chaque autre rangée du tableau, le 3^{e} nombre est 5 de plus que le 2^{e}. Donc $x=2+5$, c'est-à-dire que $x=7$.

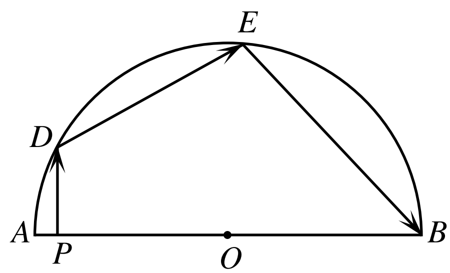
Puisque la différence entre le 6 et le -2 de la rangée 1 est égale à 8, dans chaque autre rangée du tableau, le nombre de la 5^{e} colonne est 8 de moins que le nombre de la 4^{e} colonne.

Donc $y=1-8$, c'est-à-dire que $y=-7$.

Donc $x=7$ et $y=-7$.

Réponse : $x=7$ et $y=-7$

7. Le demi-cercle ci-dessous a pour centre O et pour diamètre AB. Un rayon de lumière part du point P et se dirige dans une direction perpendiculaire à AB. Arrivé au point D sur le demi-cercle, il est réfléchi de manière que $\angle PDO = \angle EDO$. (En d'autres mots, au point D, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.) Au point E sur le demi-cercle, le rayon DE est réfléchi de la même manière, pour arriver au point B. Déterminer la mesure de l'angle DOP.

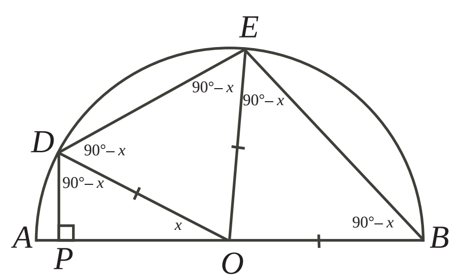


Solution 1

On trace les rayons DO et EO. Soit $\angle DOP = x$.

Puisque DP est perpendiculaire à AB, alors $\angle PDO = 90° - x$.

Au point D, puisque l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, alors $\angle EDO = \angle PDO = 90° - x$.



Puisque DO et EO sont des rayons, alors $DO = EO$. Le triangle EDO est donc isocèle et $\angle DEO = \angle EDO = 90° - x$.

Au point E, puisque l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, alors $\angle DEO = \angle BEO = 90° - x$.

Puisque EO et BO sont des rayons, alors $EO = BO$. Le triangle BEO est donc isocèle et $\angle EBO = \angle BEO = 90° - x$.

On considère le quadrilatère $PDEB$.

On a $\angle DPB = 90°$, $\angle PDE = (90° - x) + (90° - x)$ (d'o‘u $\angle PDE = 180° - 2x$), $\angle DEB = (90° - x) + (90° - x)$ (d'où $\angle DEB = 180° - 2x$) et $\angle EBP = 90° - x$.

Puisque la somme de la mesure des angles d'un quadrilatère est égale à 360°, alors $90° + 180° - 2x + 180° - 2x + 90° - x = 360°$, ou $540° - 5x = 360°$, d'où $5x = 180°$, ou $x = 36°$.

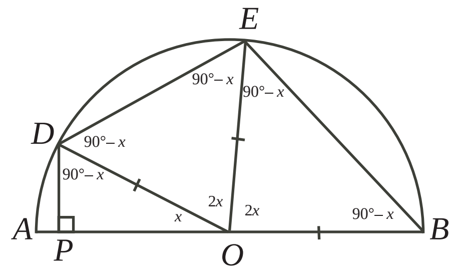
Donc $\angle DOP = x = 36°$.

Solution 2

On trace les rayons DO et EO. Soit $\angle DOP = x$.

Puisque DP est perpendiculaire à AB, alors $\angle PDO = 90° - x$.

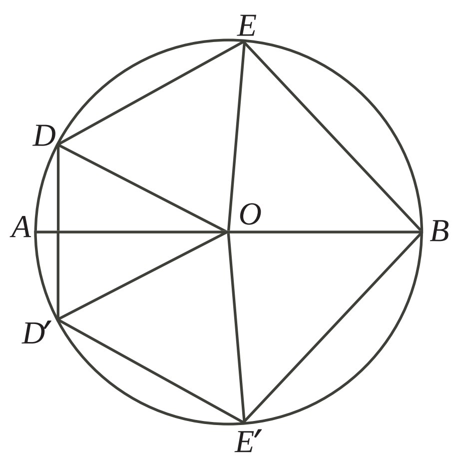
Au point D, puisque l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, alors
$\angle EDO = \angle PDO = 90° - x$.



Puisque DO et EO sont des rayons, alors $DO = EO$. Le triangle EDO est donc isocèle et $\angle DEO = \angle EDO = 90° - x$. De plus, $\angle DOE = 180° - 2(90° - x)$, c.-à-d. que $\angle DOE = 2x$.
Au point E, puisque l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, alors
$\angle DEO = \angle BEO = 90° - x$.
Puisque EO et BO sont des rayons, alors $EO = BO$. Le triangle BEO est donc isocèle et $\angle EBO = \angle BEO = 90° - x$.
De plus, $\angle EOB = 180° - 2(90° - x)$, c'est-à-dire que $\angle EOB = 2x$.
Puisque POB est une droite, alors $\angle POD + \angle DOE + \angle EOB = 180°$. Donc $x + 2x + 2x = 180°$, d'où $5x = 180°$ et $x = 36°$.
Puisque $\angle DOP = x$, alors $\angle DOP = 36°$.

Solution 3

On fait subir à la figure une réflexion par rapport à AB, ce qui a pour effet de compléter le cercle et de former le pentagone $DEBE'D'$. (On remarque que DPD' est une droite, puisque $\angle DPO = \angle D'PO = 90°$.)



Puisque DO, EO, BO, $E'O$ et $D'O$ sont des rayons, alors $DO = EO = BO = E'O = D'O$.
Soit $\angle DOP = x$. Puisque DP est perpendiculaire à AB, alors $\angle PDO = 90° - x$.
À cause de la réflexion, on a $\angle D'OP = \angle DOP = x$. Donc $\angle DOD' = 2x$.
Au point D, puisque l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, alors
$\angle EDO = \angle PDO = 90° - x$.
Puisque DO et EO sont des rayons, alors $DO = EO$. Le triangle EDO est donc isocèle et

$\angle DEO = \angle EDO = 90^\circ - x$. De plus, $\angle DOE = 180^\circ - 2(90^\circ - x)$, c.-à-d. que $\angle DOE = 2x$.
Au point E, puisque l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, alors
$\angle DEO = \angle BEO = 90^\circ - x$.
Puisque EO et BO sont des rayons, alors $EO = BO$. Le triangle BEO est donc isocèle et
$\angle EBO = \angle BEO = 90^\circ - x$. De plus, $\angle EOB = 180^\circ - 2(90^\circ - x)$, c.-à-d. que $\angle EOB = 2x$.
Les triangles DOE, EOB, BOE', $E'OD'$ et $D'OD$ sont tous congruents (côté-angle-côté). Le pentagone $DEBE'D'$ est donc régulier.
Donc $\angle DOD' = \frac{1}{5}(360^\circ) = 72^\circ$, puisque les côtés du pentagone forment des angles congrus au centre.
Puisque le triangle DOD' est isocèle et que OP est perpendiculaire à DD', alors
$\angle POD = \frac{1}{2}\angle DOD' = 36^\circ$.

Réponse : $\angle DOP = 36^\circ$

8. Le nombre 18 *n'est pas* égal à la somme de 2 entiers consécutifs positifs, mais il *est* égal à la somme d'entiers consécutifs positifs d'au moins deux façons, soit $5 + 6 + 7 = 18$ et $3 + 4 + 5 + 6 = 18$. Déterminer un entier positif inférieur à 400 qui *n'est pas* égal à la somme de 11 entiers consécutifs strictement positifs, mais qui *est* égal à la somme d'entiers consécutifs strictement positifs d'au moins 11 façons différentes.

Solution
Supposons que l'entier positif N est égal à la somme d'un nombre impair d'entiers consécutifs positifs, disons de $2k + 1$ entiers consécutifs. Pour un certain entier a, on a donc :

$$N = (a - k) + (a - (k - 1)) + \cdots + (a - 1) + a + (a + 1) + \cdots + (a + k) = (2k + 1)a$$

Donc, $2k + 1$ est un diviseur de N (c'est-à-dire que le nombre d'entiers dans l'addition est un diviseur de N).
Supposons maintenant que N est égal à la somme d'un nombre pair d'entiers consécutifs positifs, disons de $2k$ entiers consécutifs. Pour un certain entier b, on a donc :

$$N = (b-k)+(b-(k-1))+\cdots+(b-1)+b+(b+1)+\cdots(b+(k-1)) = 2kb-k = k(2b-1) = \frac{1}{2}(2k)(2b-1)$$

Donc, k est un diviseur de N et $2k$ n'est pas un diviseur de N (puisque $2b - 1$ est impair et qu'il n'est pas divisible par 2).

On cherche un entier positif N qui n'est pas égal à la somme de 11 entiers consécutifs strictement positifs (et qui n'est donc pas un multiple de 11), mais qui est égal à la somme d'entiers consécutifs strictement positifs d'au moins 11 façons différentes.

On considère le nombre d'entiers dans chacune des façons d'exprimer N comme somme d'entiers consécutifs. On remarque que si N est égal à la somme de m entiers consécutifs strictement positifs, alors N est au moins égal à $1+2+\cdots+m$. Pour $m=2$ jusqu'à $m=10$, on construit un tableau des propriétés auxquelles N doit satisfaire pour que N soit égal à la somme de m entiers consécutifs :

m	N est au moins égal à	Propriété de N
2	3	Divisible par 1, mais pas par 2
3	6	Divisible par 3
4	10	Divisible par 2, mais pas par 4
5	15	Divisible par 5
6	21	Divisible par 3, mais pas par 6 (c.-à-d. divisible par 3, mais pas par 2)
7	28	Divisible par 7
8	36	Divisible par 4, mais pas par 8
9	45	Divisible par 9
10	55	Divisible par 5, mais pas par 10 (c.-à-d. divisible par 5, mais pas par 2)

Comment peut-on combiner le plus grand nombre possible de propriétés ? Si on choisit une valeur de N qui est au moins égale à 55 et qui est divisible par 5, 7 et 9, sans être divisible par 2, alors N sera égal à la somme de 2, 3, 5, 6, 7, 9 et 10 entiers consécutifs strictement positifs (pour un total de 7 additions différentes). Il faut donc que N soit divisible par $5\times7\times9$, c'est-à-dire par 315. Puisque N doit aussi être inférieur à 400, on doit choisir $N=315$. Or, 315 est aussi égal à :

– la somme de 15 entiers conséctifs strictement positifs, puisque 315 est divisible par 15 et il est au moins égal à 120, c.-à-d. à $1+2+\cdots+15$
– la somme de 14 entiers conséctifs strictement positifs, puisque 315 est divisible par 7, mais pas par 14 et il est au moins égal à 105, c.-à-d. à $1+2+\cdots+14$
– la somme de 18 entiers conséctifs strictement positifs, puisque 315 est divisible par 9, mais pas par 18 et il est au moins égal à 171, c.-à-d. à $1+2+\cdots+18$
– la somme de 21 entiers conséctifs strictement positifs, puisque 315 est divisible par 21 et il est au moins égal à 231, c.-à-d. à $1+2+\cdots+21$

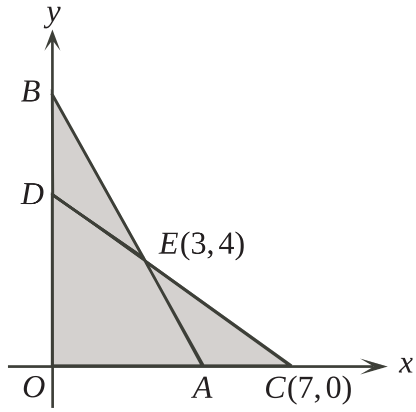
Donc, 315 est égal à la somme d'entiers consécutifs strictement positifs d'au moins 11 façons et n'est pas égal à la somme de 11 entiers consécutifs strictement positifs. (De fait, 315 est le seul tel nombre, mais on ne demandait pas de le justifier.)

(Remarque : Une bonne façon de résoudre le problème aurait été de déterminer intuitivement que la réponse est 315 et de démontrer que ce nombre satisfait aux conditions. Bien que cette approche soit acceptable, elle ne montre pas comment la réponse a été obtenue.)

Réponse : 315

Partie B

1. Une droite de pente -3 coupe la partie positive de l'axe des abscisses en A et la partie positive de l'axe des ordonnées en B. Une deuxième droite coupe l'axe des abscisses en $C(7,0)$ et l'axe des ordonnées en D. Les deux droites se coupent en $E(3,4)$.



(a) Déterminer la pente de la droite qui passe par les points C et E.

Solution

Puisque C a pour coordonnées $(7,0)$ et que E a pour coordonnées $(3,4)$, la droite qui passe par les points C et E a une pente de :

$$\frac{0-4}{7-3} = \frac{-4}{4} = -1$$

(b) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points C et E ; déterminer aussi les coordonnées du point D.

Solution 1

Puisque la droite qui passe par les points C et E a une pente de -1 et qu'elle passe par le point $(7,0)$, son équation est $y - 0 = (-1)(x-7)$, c.-à-d. $y = -x + 7$.
D'après cette équation, l'ordonnée à l'origine est égale à 7.
Puisque la droite coupe l'axe des ordonnées en D, ce point a pour coordonnées $(0,7)$.

Solution 2

Puisque la droite qui passe par les points C et E a une pente de -1 et qu'elle passe par le point $(3,4)$, son équation est $y - 4 = (-1)(x-3)$, ou $y = -x + 7$.
D'après cette équation, l'ordonnée à l'origine est égale à 7.
Puisque la droite coupe l'axe des ordonnées en D, ce point a pour coordonnées $(0,7)$.

(c) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B ; déterminer aussi les coordonnées du point B.

Solution

Puisque la droite qui passe par les points A et B a une pente de -3 et qu'elle passe par le point $E(3, 4)$, son équation est $y - 4 = (-3)(x - 3)$, ou $y = -3x + 13$.
D'après cette équation, l'ordonnée à l'origine est égale à 13.
Puisque la droite coupe l'axe des ordonnées en B, ce point a pour coordonnées $(0, 13)$.

(d) Déterminer l'aire de la région ombrée.

Solution 1

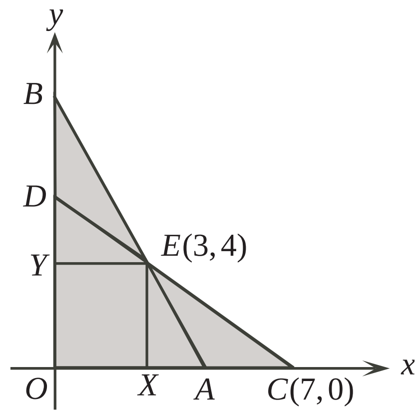
L'aire de la région ombrée est égale à la somme de l'aire des triangles DOC et BDE.
Le triangle DOC est rectangle en O.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(DO)(OC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(7)(7)$, ou $\frac{49}{2}$.
La base BD du triangle BDE a une longueur de $13 - 7$, ou 6, tandis que la hauteur correspondante est égale à la distance de E à l'axe des ordonnées, soit 3.
L'aire du triangle BDE est égale à $\frac{1}{2}(6)(3)$, ou 9.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{49}{2} + 9$, ou $\frac{67}{2}$.

Solution 2

L'aire de la région ombrée est égale à la somme de l'aire des triangles BOA et AEC.
Le triangle BOA est rectangle en O. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(BO)(OA)$.
La droite d'équation $y = -3x + 13$ coupe l'axe des abscisses en A. À ce point, on a $x = 0$.
L'équation devient $-3x + 13 = 0$, d'où $x = \frac{13}{3}$.
L'aire du triangle BOA est égale à $\frac{1}{2}(13)\left(\frac{13}{3}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{169}{6}$.
La base AC du triangle AEC a une longueur de $7 - \frac{13}{3}$, ou $\frac{8}{3}$, tandis que la hauteur correspondante est égale à la distance de E à l'axe des abscisses, soit 4.
L'aire du triangle AEC est égale à $\frac{1}{2}(4)\left(\frac{8}{3}\right)$, ou $\frac{16}{3}$.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{169}{6} + \frac{16}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{201}{6}$, ou $\frac{67}{2}$.

Solution 3

Au point E, on abaisse des perpendiculaires jusqu'aux points X sur l'axe des abscisses et Y sur l'axe des ordonnées.



Donc, Y a pour coordonnées $(0, 4)$, X a pour coordonnées $(3, 0)$ et $OXEY$ est un rectangle.

L'aire de la région ombrée est donc égale à la somme de l'aire des triangles BYE et EXC et du rectangle $OXEY$.

Le triangle BYE est rectangle en Y. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(BY)(YE)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(13-4)(3)$, ou $\frac{27}{2}$.

L'aire du rectangle $OYEX$ est égale à 3×4, ou 12.

Le triangle EXC est rectangle en X. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(EX)(XC)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(4)(7-3)$, ou 8.

L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{27}{2} + 12 + 8$, ou $\frac{67}{2}$.

2. (a) Déterminer tous les couples (a, b) pour lesquels :

$$\begin{aligned} a - b &= 1 \\ 2a^2 + ab - 3b^2 &= 22 \end{aligned}$$

Solution 1

On factorise le membre de gauche de la deuxième équation : $2a^2+ab-3b^2 = (a-b)(2a+3b)$

Puisque $a - b = 1$, la deuxième équation devient $(1)(2a + 3b) = 22$, ou $2a + 3b = 22$.

On a donc deux équations, soit $a - b = 1$ et $2a + 3b = 22$.

On ajoute 3 fois la première équation à la deuxième, membre par membre, pour obtenir $5a = 25$, d'où $a = 5$.

On reporte $a = 5$ dans la première équation pour obtenir $b = 4$.

Il n'y a donc qu'une seule solution, soit $(a, b) = (5, 4)$.

Solution 2

D'après la première équation, on a $a = b + 1$.

On reporte $a = b + 1$ dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned}2(b+1)^2 + (b+1)(b) - 3b^2 &= 22\\(2b^2 + 4b + 2) + (b^2 + b) - 3b^2 &= 22\\5b &= 20\\b &= 4\end{aligned}$$

On reporte $b = 4$ dans la première équation pour obtenir $a = 5$.
Il n'y a donc qu'une seule solution, soit $(a, b) = (5, 4)$.

Solution 3
D'après la première équation, on a $b = a - 1$.
On reporte $b = a - 1$ dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned}2a^2 + a(a-1) - 3(a-1)^2 &= 22\\2a^2 + (a^2 - a) - (3a^2 - 6a + 3) &= 22\\5a &= 25\\a &= 5\end{aligned}$$

On reporte $a = 5$ dans la première équation pour obtenir $b = 4$.
Il n'y a donc qu'une seule solution, soit $(a, b) = (5, 4)$.

(b) Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour lesquels :

$$\begin{aligned}x^2 - yz + xy + zx &= 82\\y^2 - zx + xy + yz &= -18\\z^2 - xy + zx + yz &= 18\end{aligned}$$

Solution 1
On additionne la deuxième et la troisième équation, membre par membre :

$$\begin{aligned}y^2 - zx + xy + yz + z^2 - xy + zx + yz &= -18 + 18\\y^2 + 2yz + z^2 &= 0\\(y+z)^2 &= 0\\y + z &= 0\\z &= -y\end{aligned}$$

On reporte $z = -y$ dans les trois équations pour obtenir :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 82\\2xy &= -18\\-2xy &= 18\end{aligned}$$

Donc, $x^2 + y^2 = 82$ et $xy = -9$.
On a donc $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 82 + (-18) = 64$, d'où $x + y = \pm 8$.

Si $x + y = 8$, alors $y = 8 - x$ et puisque $xy = -9$, on obtient $x(8 - x) = -9$, c'est-à-dire $x^2 - 8x - 9 = 0$, ou $(x-9)(x+1) = 0$, d'où $x = 9$ ou $x = -1$.
Si $x = 9$, alors puisque $x + y = 8$, on obtient $y = -1$ et $z = -y = 1$.
Si $x = -1$, alors puisque $x + y = 8$, on obtient $y = 9$ et $z = -y = -9$.

Si $x + y = -8$, alors $y = -8 - x$ et puisque $xy = -9$, on obtient $x(-8 - x) = -9$, c'est-à-dire $x^2 + 8x - 9 = 0$, ou $(x+9)(x-1) = 0$, d'où $x = -9$ ou $x = 1$.
Si $x = -9$, alors puisque $x + y = -8$, on obtient $y = 1$ et $z = -y = -1$.
Si $x = 1$, alors puisque $x + y = -8$, on obtient $y = -9$ et $z = -y = 9$.

Les quatre solutions sont $(x, y, z) = (9, -1, 1), (-1, 9, -9), (-9, 1, -1), (1, -9, 9)$.

Solution 2
On additionne les deux premières équations, membre par membre :

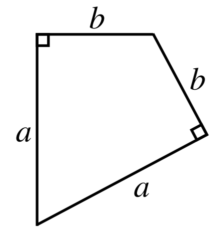
$$\begin{aligned} x^2 - yz + xy + zx + y^2 - zx + xy + yz &= 82 - 18 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= 64 \\ (x+y)^2 &= 64 \\ x + y &= \pm 8 \end{aligned}$$

De même, si on additionne la première et la troisième équation, membre par membre, on obtient $x^2 + 2xz + z^2 = 100$, ou $x + z = \pm 10$.
De plus, si on additionne la deuxième et la troisième équation, membre par membre, on obtient $y^2 + 2yz + z^2 = 0$, ou $y + z = 0$, d'où $z = -y$.
On reporte $z = -y$ dans l'équation $x + z = \pm 10$ pour obtenir $x - y = \pm 10$.
On a donc $x + y = \pm 8$ et $x - y = \pm 10$.

Si $x + y = 8$ et $x - y = 10$, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2x = 18$, ou $x = 9$. On a donc $y = -1$ et $z = -y = 1$.
Si $x + y = 8$ et $x - y = -10$, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2x = -2$, ou $x = -1$. On a donc $y = 9$ et $z = -y = -9$.
Si $x + y = -8$ et $x - y = 10$, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2x = 2$, ou $x = 1$. On a donc $y = -9$ et $z = -y = 9$.
Si $x + y = -8$ et $x - y = -10$, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2x = -18$, ou $x = -9$. On a donc $y = 1$ et $z = -y = -1$.

Les quatre solutions sont $(x, y, z) = (9, -1, 1), (-1, 9, -9), (-9, 1, -1), (1, -9, 9)$.

3. On considère quatre tuiles identiques à la tuile ci-contre, où $a > b > 0$. Les tuiles sont placées, sans chevauchement, de manière à former un carré au milieu duquel il y a un trou de forme carrée.

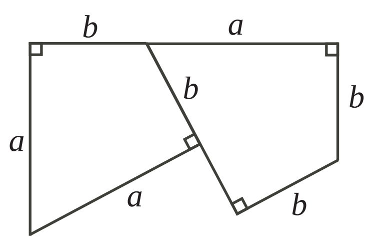


   (a) Si le carré extérieur a une aire de $(a+b)^2$, démontrer que le carré intérieur a une aire de $(a-b)^2$.

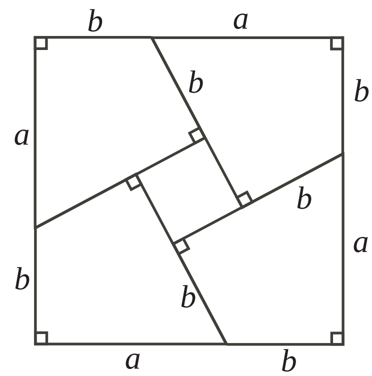
   Solution 1
   On peut découper chaque tuile le long d'une diagonale de manière à obtenir deux triangles rectangles ayant des cathètes de longueurs a et b.
   L'aire de chaque triangle étant égale à $\frac{1}{2}ab$, l'aire de chaque tuile est donc égale à ab.
   Si le carré extérieur a une aire de $(a+b)^2$ et qu'il est partiellement recouvert par quatre tuiles ayant chacune une aire de ab, alors le reste du carré, soit le trou de forme carrée, a une aire égale à

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

   Solution 2
   Si le carré extérieur a une aire égale à $(a+b)^2$, ses côtés doivent avoir une longueur de $a+b$.
   Pour obtenir une longueur de $a+b$, il faut aligner un côté de longueur a d'une tuile avec un côté de longueur b d'une deuxième tuile, comme dans la figure suivante.



   (Il est possible d'aligner deux tuiles de la sorte, puisqu'elles ont chacune deux angles droits. La somme de la mesure des deux autres angles doit donc être égale à 180°. Les deux angles forment donc un angle plat et les côtés forment une droite.)
   On peut compléter le carré comme suit :



Le trou est un rectangle, puisque ses angles sont droits. Il est aussi un carré, puisque ses côtés mesurent chacun $a - b$. (Chaque côté est obtenu en prenant un segment de longueur a et en y enlevant un segment de longueur b.)
Puisque le carré intérieur a des côtés de longueur $a - b$, son aire est égale à $(a - b)^2$.

(b) Déterminer la plus petite valeur entière de N pour laquelle il existe des nombres premiers a et b, de manière que le rapport de l'aire du carré intérieur à l'aire du carré extérieur soit égal à $1 : N$.

Solution
D'après (a), le rapport de l'aire du carré intérieur à l'aire du carré extérieur est égal à $\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.
On cherche des entiers N pour lesquels il existe des nombres premiers a et b de manière que : that $\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \dfrac{1}{N}$. (On cherche aussi la plus petite valeur d'un tel N.)
En prenant la racine carrée positive de chaque membre, on a $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$.
Puisque le membre de gauche est rationnel (puisque a et b sont des entiers), alors $\sqrt{N}$ doit être rationnel et N doit donc être un carré parfait.
Soit $N = k^2$, pour un entier positif k quelconque.
On a donc $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{1}{k}$, ou $a + b = k(a - b)$, ou $(k - 1)a = (k + 1)b$.

Pour déterminer la plus petite valeur possible de N, on doit déterminer la plus petit valeur possible de k.
Est-il possible que $k = 1$? Existe-t-il des nombres premiers, a et b, de manière que $0 = 2b$? Non, car on aurait $b = 0$.
Est-il possible que $k = 2$? Existe-t-il des nombres premiers, a et b, de manière que $a = 3b$? Non, car a doit alors être multiple de 3 et premier, ce qui entraîne que $a = 3$, d'où $b = 1$ et b n'est alors pas un nombre premier.
Est-il possible que $k = 3$? Existe-t-il des nombres premiers, a et b, de manière que $2a = 4b$ (c.-à-d. $a = 2b$) ? Non, car a idoit alors être un multiple de 2 et premier, ce qui entraîne

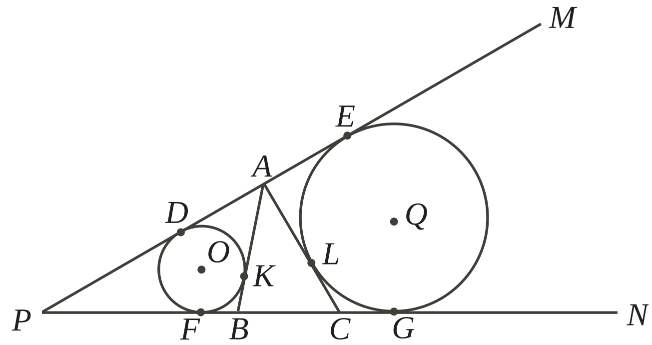
que $a = 2$, d'où $b = 1$ et b n'est alors pas un nombre premier.
Est-il possible que $k = 4$? Existe-t-il des nombres premiers, a et b, de manière que $3a = 5b$?
Oui : $a = 5$ et $b = 3$.
La plus petite valeur possible de k est donc 4. La plus petite valeur possible de N est donc 16.

(c) Tout en justifiant ses étapes, déterminer tous les entiers positifs N pour lesquels il existe des entiers impairs, a et b, $a > b > 0$, de manière que le rapport de l'aire du carré intérieur à l'aire du carré extérieur soit égal à $1 : N$.

Solution
Soit N un entier positif pour lequel il existe des entiers impairs, a et b, $a > b > 0$, de manière que $\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \dfrac{1}{N}$.
Comme dans la partie (b), N doit être un carré parfait. On a donc $N = k^2$, pour un entier positif k quelconque.
Puisque a et b sont impairs, alors $a = 2A + 1$ et $b = 2B + 1$, pour des entiers A et B quelconques.
On a donc $\dfrac{(2A-2B)^2}{(2A+2B+2)^2} = \dfrac{1}{k^2}$, ou $\dfrac{A-B}{A+B+1} = \dfrac{1}{k}$, ou $k(A-B) = A+B+1$.
Si A et B ont la même parité (s'ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs), alors $A-B$ est pair et le membre de gauche est pair, tandis que $A+B+1$ est impair et le membre de droite est impair. Puisqu'un nombre pair ne peut être égal à un nombre impair, cette situation ne peut se présenter.
Donc, A et B sont de parités opposées (l'un est pair et l'autre est impair). Dans ce cas, $A-B$ est impair et $A+B+1$ est pair. Puisque $k(A-B) = A+B+1$, alors k doit être pair.
Donc, N doit être un carré parfait pair.

Est-ce tous les carrés parfaits pairs sont des valeurs possibles de N ?
Soit $N = (2m)^2$.
En procédant comme ci-haut, peut-on déterminer des entiers A et B de manière que $2m(A-B) = A+B+1$?
Si $A = m$ et $B = m-1$, alors $A-B = 1$ et $A+B+1 = 2m$, d'où $2m(A-B) = A+B+1$.
Donc, si $a = 2A+1 = 2m+1$ et $b = 2B+1 = 2m-1$, alors $\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \dfrac{1}{(2m)^2} = \dfrac{1}{N}$.
Donc, les valeurs de N qui vérifient la condition donnée sont tous les carrés parfaits pairs.

4. La base du triangle ABC est située sur le segment PN et son sommet A est situé sur le segment PM. Deux cercles, qui ont pour centre respectif O et Q et pour rayon respectif r_1 et r_2, sont tangents au triangle ABC de façon externe et tangents aux segments PM et PN.



(a) Démontrer que la droite qui passe par les points K et L coupe le périmètre du triangle ABC en deux parties égales.

Solution

On doit démontrer que $KB + BC + CL = KA + AL$.

Puisque les tangentes BK et BF au petit cercle sont issues du point B, alors $BK = BF$.

Puisque les tangentes CL et CG au grand cercle sont issues du point C, alors $CL = CG$.

Puisque les tangentes AK et AD au petit cercle sont issues du point A, alors $AK = AD$.

Puisque les tangentes AL et AE au grand cercle sont issues du point A, alors $AL = AE$.

Donc $KB + BC + CL = FB + BC + CG = FG$ et $KA + AL = DA + AE = DE$.

Or, $FG = PG - PF$ et $DE = PE - PD$.

Puisque les tangentes PE et PG au grand cercle sont issues du point P, alors $PE = PG$.

Puisque les tangentes PD et PF au petit cercle sont issues du point P, alors $PD = PF$.

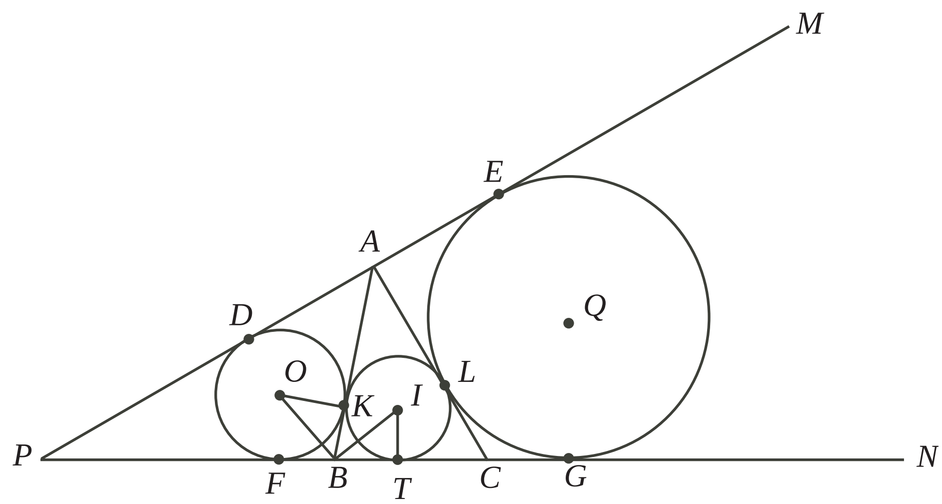
Donc, $FG = PG - PF = PE - PD = DE$, d'où $KB + BC + CL = KA + AL$. La droite qui passe par les points K et L coupe le périmètre du triangle ABC en deux parties égales.

(b) Soit T le point de contact du côté BC et du cercle inscrit dans le triangle ABC.
Démontrer que $(TC)(r_1) + (TB)(r_2)$ est égal à l'aire du triangle ABC.

Solution 1

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, T le point de contact du cercle et du côté BC et r le rayon du cercle.

On trace les segments OK, OB, IB et IT.

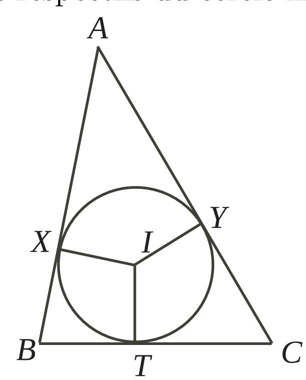


(Le cercle de centre I n'est pas nécéssairement tangent à AB en K ou à AC en L.)
Puisque AB est une tangente au cercle de centre O en K, OK est perpendiculaire à KB ; de même, IT est perpendiculaire à BC.
Puisque le cercle de centre O est tangent à FB et à BK, OB est la bissectrice de l'angle FBK ; de même, IB est la bissectrice de l'angle KBC.
Or, $\angle KOB = 90^\circ - \angle KBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle FBK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle FBK) = \frac{1}{2}\angle KBC = \angle IBT$.
Donc, le triangle OKB est semblable au triangle BTI.
Donc $\dfrac{BK}{KO} = \dfrac{IT}{TB}$, c'est-à-dire que $\dfrac{BK}{r_1} = \dfrac{r}{TB}$, d'où $r_1 = \dfrac{(TB)(BK)}{r}$.
De même, $r_2 = \dfrac{(TC)(LC)}{r}$.
Donc :

$$(TC)(r_1) + (TB)(r_2) = \frac{(TC)(TB)(BK)}{r} + \frac{(TB)(TC)(LC)}{r} = \frac{(TB)(TC)}{r}(BK + LC)$$

Soit $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ et soit p le demi-périmètre du triangle ABC.
Selon (a), puisque $KB + BC + LC = p$, alors $BK + LC = p - BC = p - a$.
Donc $(TC)(r_1) + (TB)(r_2) = \dfrac{(TB)(TC)}{r}(p - a)$.

On considère le triangle ABC seulement.
Soit X et Y les points de contact respectifs du cercle inscrit et des côtés AB et AC.



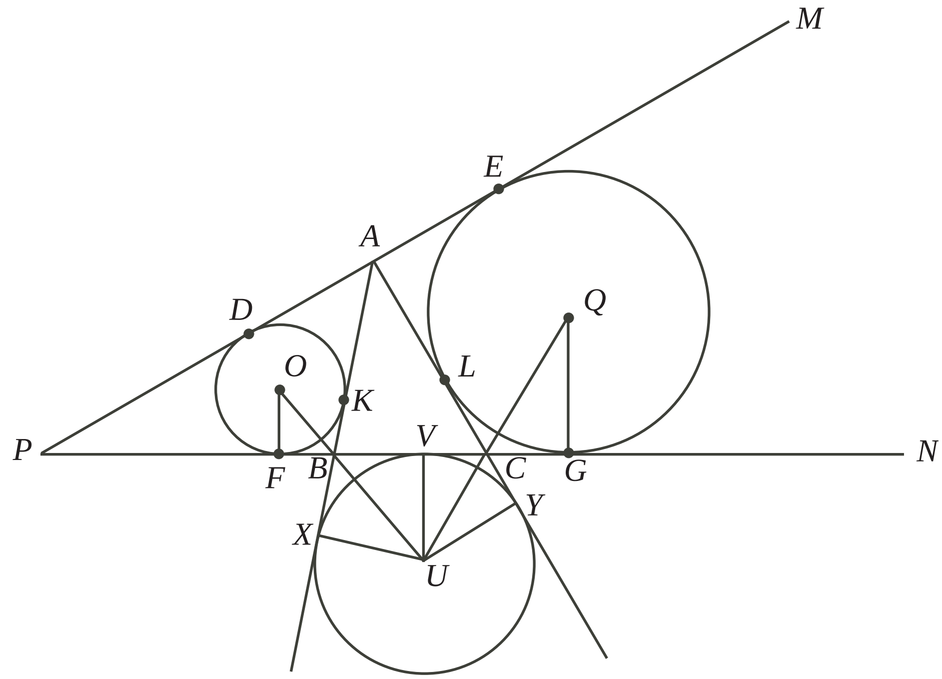
D'après la propriété des tangentes utilisée en (a), on a $AX = AY$, $BX = BT$ et $CY = CT$.
Puisque $AX + AY + BX + BT + CY + CT = 2p$, alors $BT + AY + YC = p$.

Donc $TB = p - (AY + YC) = p - AC = p - b$.
De même, $TC = p - c$.
Donc $(TC)(r_1) + (TB)(r_2) = \dfrac{(p-b)(p-c)(p-a)}{r} = \dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pr}$.
Soit $|\triangle ABC|$ l'aire du triangle ABC.
Donc, $p(p-a)(p-b)(p-c) = |\triangle ABC|^2$, d'après la formule de Héron.
De plus :

$$pr = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(IX)(AB) + \frac{1}{2}(IT)(BC) + \frac{1}{2}(IY)(AC) \quad (*)$$

puisque IX, IT et IY sont des rayons du cercle de centre I.
Puisque IX, IT et IY sont respectivement perpendiculaires à AB, BC et AC, alors les trois termes du membre de droite de l'égalité $(*)$ représentent l'aire respective des triangles IAB, IBC et ICA. Leur somme est donc égale à $|\triangle ABC|$ et on a donc $pr = |\triangle ABC|$.
Donc $(TC)(r_1) + (TB)(r_2) = \dfrac{|\triangle ABC|^2}{|\triangle ABC|} = |\triangle ABC|$, ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2
On trace les segments OF, OB, QC et QG.
Puisque le cercle de centre O est tangent à PB et à AB aux points F et K, alors OF est perpendiculaire à PB et OB est la bissectrice de l'angle FBK.
De même, QG est perpendiculaire à CN et QC est la bissectrice de l'angle GCL.
On prolonge AB et AC aux points B et C et on construit le cercle qui est tangent aux prolongements de AB et de AC et au segment BC, tout en étant situé à l'extérieur du triangle ABC. Ce cercle est appelé un cercle exinscrit au triangle ABC.
Le centre U de ce cercle exinscrit est situé sur la bissectrice de l'angle formé par le prolongement de AB et par le segment BC, puisque le cercle est tangent à ces deux segments. Donc, U est situé sur le prolongement de OB. De même, U est situé sur le prolongement de QC.



Soit $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$; soit p le demi-périmètre du triangle ABC ; soit $|\triangle ABC|$ l'aire du triangle ABC.

Le rayon r_A du cercle exinscrit est égal à $\dfrac{|\triangle ABC|}{p-a}$. (Cet énoncé est démontré à la fin de cette solution.)

Soit V le point de contact du cercle exinscrit et de BC.

Donc, UV est perpendiculaire à BC.

Le triangle OFB est semblable au triangle UVB et le triangle QGC est semblable au triangle UVC (puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent deux angles opposés par le sommet, c'est-à-dire deux autres angles congrus).

Donc $\dfrac{OF}{FB} = \dfrac{UV}{VB}$, ou $\dfrac{r_1}{FB} = \dfrac{r_A}{VB}$, et $\dfrac{QG}{GC} = \dfrac{UV}{VC}$, ou $\dfrac{r_2}{GC} = \dfrac{r_A}{VC}$.

Puisque $FB = BK$ et $CG = CL$ et que $KB + BC + CL = p$ d'après la partie (a), alors

$$(VB)(r_1)+(VC)(r_2) = r_A(FB+CG) = r_A(KB+LC) = r_A(p-BC) = r_A(p-a) = |\triangle ABC|$$

Soit X et Y les points de contace respectifs du cercle exinscrit et des prolongements de AB et de AC .

On a $AX = AY$, $AX = AB + BX = AB + BV$ (deux tangentes issues du point B) et $AY = AC + CY = AC + CV$ (deux tangentes issues du point C).

Donc $AX + AY = AB + AC + BV + VC = AB + AC + BC = 2p$, c'est-à-dire que $AX = AY = p$.

Donc $VB = BX = AX - AB = p - c$. De même, $VC = p - b$.

Or, $TB = p - b = VC$ et $TC = p - c = VB$ (d'après la solution 1). On a donc :

$$|\triangle ABC| = (TC)(r_1) + (TB)(r_2)$$

(Pourquoi avons-nous $r_A = \dfrac{|\triangle ABC|}{p-a}$?

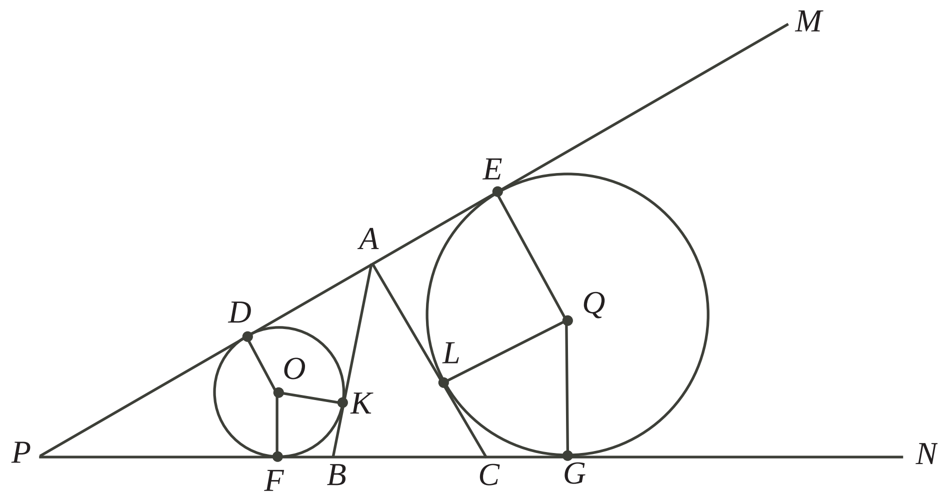
On trace les rayons UX, UY et UV. On a $\angle AXU = \angle AYU = \angle BVU = \angle CVU = 90°$.
Donc, $AXUY$ est un cerf-volant ayant deux angles droits, comme les figures du Problème 3.
Son aire est donc égale à $AX \cdot UX = pr_A$.
De même, l'aire de $BVUX$ est égale à $r_A(p-c)$ et celle de $CVUY$ est égale à $r_A(p-b)$.
Donc :

$$|\triangle ABC| = \text{Aire de } AXUY - \text{Aire de } BVUX - \text{Aire de } CVUY = r_A(p-(p-c)-(p-b))$$

Or, $p-(p-c)-(p-b) = b+c-p = a+b+c-a-p = 2p-a-p = p-a$.
Donc $|\triangle ABC| = r_A(p-a)$, ce qu'il fallait démontrer.)

Solution 3

Soit $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et soit p le demi-périmètre du triangle ABC.
D'après la partie (a), on a $AK + AL = KB + BC + LC = p$.
Puisque PM et PN sont des tangentes aux deux cercles, la droite qui passe par les points O et Q passe aussi par P.
On trace les rayons OD, OF et OK, de même que les rayons QL, QE et QG.



Ces six segments joignent un centre de cercle à des points de contact. Ils forment donc tous des angles droits aux points de contact.
Donc, le triangle POF est semblable au triangle PQG, d'où $\dfrac{PF}{OF} = \dfrac{PG}{QG}$,
ou $r_1(PG) = r_2(PF)$.
Les quadrilatères $PDOF$, $ADOK$, $BFOK$, $AEQL$, $CGQL$ et $PEQG$ sont tous des cerfs-volants ayant chacun deux angles droits, comme les figures du Problème 3.
L'aire de chaque cerf-volant est égale au produit des longueurs de deux côtés perpendiculaires.
Soit $|PEQG|$ l'aire de $PEQG$, et ainsi de suite.

Donc :

$$\begin{aligned}
|PEQG| &= |\triangle ABC| + |PDOF| + |ADOK| + |BFOK| + |AEQL| + |CGQL| \\
(PG)(QG) &= |\triangle ABC| + (PF)(OF) + (AK)(OK) + (KB)(OK) + (AL)(QL) + (CL)(LQ) \\
|\triangle ABC| &= r_2(PG) - r_1(PF) - r_1(AK) - r_1(KB) - r_2(AL) - r_2(CL) \\
&= r_2(PG - AL - CL) + r_1(-PF - AK - KB) \\
&= r_2(PG - CG - AL) + r_1(-PF - AB) \qquad \text{(tangentes de même longueur)} \\
&= r_2(PC - AL) + r_1(-PF - AB) \\
&= r_2(PF + FB + BC - AL) + r_1(-PF - AB) \\
&= r_2(PF + BK + a - (p - AK)) + r_1(-PF - AB) \\
&\qquad \text{(puisque } AK + AL = p\text{, et que } BK = FB\text{)} \\
&= r_2(PF + AK + BK + a - p) + r_1(-PF - AB) \\
&= r_2(PF + AB + a - p) + r_1(-PF - AB) \\
&= r_2(PF) + r_2(c + a - p) + r_1(-PF - AB) \\
&= r_1(PG) + r_2(a + b + c - b - p) + r_1(-PF - AB) \qquad \text{(car } r_1(PG) = r_2(PF)\text{)} \\
&= r_2(2p - b - p) + r_1(PG - PF - AB) \\
&= r_2(p - b) + r_1(GF - AB) \\
&= r_2(p - b) + r_1(FB + BC + CG - c) \\
&= r_2(p - b) + r_1(KB + BC + CL - c) \qquad \text{(tangentes de même longueur)} \\
&= r_2(p - b) + r_1(p - c)
\end{aligned}$$

Comme dans la Solution 1, $TB = p - c$ et $TC = p - b$.
Donc $|\triangle ABC| = (TC)(r_1) + (TB)(r_2)$, ce qu'il fallait démontrer.

Solution 4
Soit $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$ et $\angle MPN = 2\theta$.
En utilisant un angle extérieur du triangle ABC, on a $\angle PAB = 2\beta - 2\theta$ et en utilisant un angle extérieur du triangle PAC, on a $\angle MAC = 2\gamma + 2\theta$. De plus, $\angle ABP = 180° - 2\beta$.
Puisque le cercle de centre O est tangent à AP et à AK, alors O est situé sur la bissectrice de l'angle PAK. Donc $\angle KAO = \beta - \theta$. De même, $\angle LAQ = \gamma + \theta$ et $\angle KBO = 90° - \beta$.
Puisque le triangle OKB est rectangle en K (puisque AB est tangent en K au cercle de centre O), alors $\angle KOB = \beta$.
Donc $\tan(\angle KAO) = \tan(\beta - \theta) = \dfrac{KO}{AK}$ et $\tan(\angle KOB) = \tan(\beta) = \dfrac{KB}{KO}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
AB &= AK + KB \\
AB &= \frac{KO}{\tan(\beta-\theta)} + KO\tan(\beta) \\
AB &= r_1\left[\frac{1+\tan(\beta)\tan(\theta)}{\tan(\beta)-\tan(\theta)} + \tan(\beta)\right] \qquad \text{(puisque } KO = r_1\text{)} \\
AB &= r_1\left[\frac{1+\tan(\beta)\tan(\theta)}{\tan(\beta)-\tan(\theta)} + \frac{\tan^2(\beta)-\tan(\beta)\tan(\theta)}{\tan(\beta)-\tan(\theta)}\right] \\
AB &= r_1\left[\frac{1+\tan^2(\beta)}{\tan(\beta)-\tan(\theta)}\right] \\
r_1 &= \frac{AB(\tan(\beta)-\tan(\theta))}{1+\tan^2(\beta)} \\
r_1 &= \frac{AB(\tan(\beta)-\tan(\theta))}{\sec^2(\beta)} \\
r_1 &= AB\sin(\beta)\cos(\beta) - AB\cos^2(\beta)\tan(\theta) \\
r_1 &= \tfrac{1}{2}AB\sin(2\beta) - AB\cos^2(\beta)\tan(\theta)
\end{aligned}$$

Or, $AB\sin(2\beta)$ est la longueur de la hauteur h du triangle ABC menée de A à BC.
Donc $r_1 = \frac{1}{2}h - AB\cos^2(\beta)\tan(\theta)$.
De même, $r_2 = \frac{1}{2}h + AC\cos^2(\gamma)\tan(\theta)$.

Puisque le cercle de centre I est tangent à AB et à BC, alors I est situé sur la bissectrice de l'angle ABC. Donc $\angle IBT = \beta$, d'où $\tan(\beta) = \dfrac{IT}{TB}$.
Donc $TB = \dfrac{IT}{\tan(\beta)} = \dfrac{r}{\tan(\beta)}$.
De même, $TC = \dfrac{r}{\tan(\gamma)}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
r_1(TC) + r_2(TB) &= TC\left[\tfrac{1}{2}h - AB\cos^2(\beta)\tan(\theta)\right] + TB\left[\tfrac{1}{2}h + AC\cos^2(\gamma)\tan(\theta)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}h(TC+TB) + \tan(\theta)\left[-TC\cdot AB\cos^2(\beta) + TB\cdot AC\cos^2(\gamma)\right] \qquad (*)
\end{aligned}$$

Le 1er terme du membre de droite de l'égalité $(*)$ est égal à $\frac{1}{2}h(BC)$, ce qui est égal à l'aire du triangle ABC.
On considère le 2e facteur du 2e terme :

$$\begin{aligned}
& TB\cdot AC\cos^2(\gamma) - TC\cdot AB\cos^2(\beta) \\
= {} & \frac{r}{\tan(\beta)}AC\cos^2(\gamma) - \frac{r}{\tan(\gamma)}AB\cos^2(\beta) \\
= {} & \frac{r}{2\tan(\beta)\tan(\gamma)}\left(2AC\tan(\gamma)\cos^2(\gamma) - 2AB\tan(\beta)\cos^2(\beta)\right) \\
= {} & \frac{r}{2\tan(\beta)\tan(\gamma)}\left(2AC\sin(\gamma)\cos(\gamma) - 2AB\sin(\beta)\cos(\beta)\right) \\
= {} & \frac{r}{2\tan(\beta)\tan(\gamma)}\left(AC\sin(2\gamma) - AB\sin(2\beta)\right)
\end{aligned}$$

Or $AC\sin(2\gamma) = AB\sin(2\beta) = h$ et ce 2^{e} facteur est donc égal à 0. Le 2^{e} terme du membre de droite de l'égalité $(*)$ est donc égal à 0.

Donc, $r_1(TC) + r_2(TB)$ est égal à l'aire du triangle ABC, ce qu'il fallait démontrer.