La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Le Défi ouvert canadien de mathématiques

Le mercredi 24 novembre 2004

Solutions

Partie A

1. Si $x + 2y = 84 = 2x + y$, quelle est la valeur de $x + y$?

   Solution 1
   On a $x+2y = 84$ et $2x+y = 84$. On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $3x + 3y = 168$, d'où $x + y = 56$.

   Solution 2
   Puisque $x + 2y = 84$, alors $x = 84 - 2y$.
   On reporte $y = 84 - 2x$ dans l'équation $x + 2y = 84$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} 2(84 - 2y) + y &= 84 \\ 168 - 3y &= 84 \\ 84 &= 3y \\ y &= 28 \end{aligned}$$

   Donc, $x = 84 - 2(28)$. Donc $x = 28$. Donc $x + y = 56$.

   Solution 3
   Puisque $2x + y = 84$, alors $y = 84 - 2x$.
   On reporte $x = 84 - 2y$ dans l'équation $2x + y = 84$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} x + 2(84 - 2x) &= 84 \\ 168 - 3x &= 84 \\ 84 &= 3x \\ x &= 28 \end{aligned}$$

   Donc, $y = 84 - 2(28)$, ou $y = 28$ ou $x + y = 56$.

   Solution 4
   Puisque les deux équations demeurent identiques lorsqu'on remplace x par y et y par x, alors $x = y$.
   Les équations deviennent donc, $3x = 84$, d'où $x = 28$ et $y = 28$.
   Donc $x + y = 56$.

Réponse: 56

2. Soit S l'ensemble des entiers positifs de trois chiffres dont les chiffres sont 3, 5 et 7, aucun chiffre n'étant répété dans un même nombre. Calculer le reste lorsque la somme des nombres de l'ensemble S est divisée par 9.

Solution 1
Les éléments de S sont 357, 375, 537, 573, 735. et 753. Leur somme est égale à 3330.
Cette somme est divisible par 9, car la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Lorsque la somme 3300 est divisée par 9, le reste est donc égal à 0.

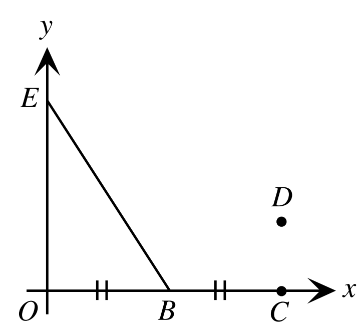
Solution 2
On peut former six nombres avec les trois chiffres donnés.
Deux de ces nombres ont un 3 dans la colonne des centaines, deux autres ont un 5 dans cette colonne et deux autres ont un 7 dans cette colonne.
Il en est de même pour la colonne des dizaines et pour la colonne des unités.
La somme des six nombres est donc égale à

$$2(3+5+7)(100)+2(3+5+7)(10)+2(3+5+7)(1)=3330$$

Lorsque cette somme est divisée par 8, le reste est égale à 0.

Réponse: 0

3. Le point E a pour courdonnées $(0,2)$. Le point B est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses de manière que $BE=\sqrt{7}$. Le point C est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses de manière que $BC=OB$. Le point D est situé dans le quadrant I de manière que $\angle CBD=30°$ et $\angle BCD=90°$. Quelle est la distance entre E et D ?



Solution
On détermiinera d'abord les coordonnées du point D.
Soit $(b,0)$ les coordonnées de B. Puisque $BE=\sqrt{7}$ et que E a pour coordonées $(0,2)$, alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{(b-0)^2+(0-2)^2} &= \sqrt{7}\\ b^2+4 &= 7\\ b^2 &= 3\end{aligned}$$

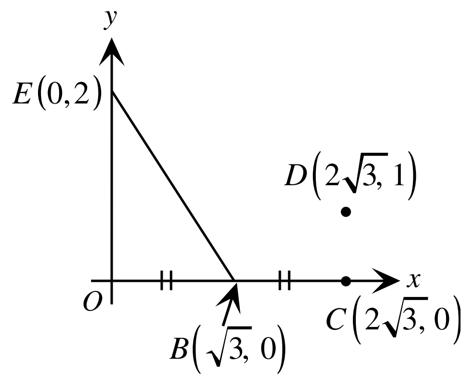
Puisque B est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses, alors $b=\sqrt{3}$ (et non pas $b=-\sqrt{3}$). B a donc pour coordonnées $(\sqrt{3},0)$. (On aurait pu utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle OB. On aurait obtenu $b^2+2^2=(\sqrt{7})^2$, d'où $b^2=3$ et $b=\sqrt{3}$.)

Puisque $BC = OB$, alors C a pour coordonnées $(2\sqrt{3}, 0)$.

Puisque $\angle BCD = 90^\circ$ et que D est situé dans le quadrant I, D a pour coordonnées $(2\sqrt{3}, d)$, $d > 0$.

Puisque $\angle BCD = 90^\circ$ et $\angle CBD = 30^\circ$, le triangle DBC est un triangle remarquable $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

Puisque le côté CB est opposé à l'angle de 60° et que $CB = \sqrt{3}$, alors le côté DC, qui est opposé à l'angle de 30°, a une longueur de 1. D a donc pour coordonnées $(2\sqrt{3}, 1)$.



Donc, $ED = \sqrt{(2\sqrt{3} - 0)^2 + (1 - 2)^2}$, d'où $ED = \sqrt{13}$.

RÉPONSE: $\sqrt{13}$

4. Une fonction f satisfait aux conditions suivantes :
   i) $f(1) = 1$
   ii) $f(2x) = 4f(x) + 6$
   iii) $f(x + 2) = f(x) + 12x + 12$
   Calculer $f(6)$.

   Solution 1
   Posons $x = 1$. D'après les conditions ii) et i), on a :

$$f(2) = 4f(1) + 6 = 4(1) + 6 = 10$$

   Posons $x = 2$. D'après la condition ii), on a :

$$f(4) = 4f(2) + 6 = 4(10) + 6 = 46$$

   Posons $x = 4$. D'après la condition iii), on a :

$$f(6) = f(4) + 12(4) + 12 = 46 + 48 + 12 = 106$$

   Solution 2
   Posons $x = 1$, D'aprés la conditions iii) et i), on a :

$$f(3) = f(1) + 12(1) + 12 = 1 + 12 + 12 = 25$$

Posons $x = 3$. D'aprés la condition ii) on a :

$$f(6) = 4f(3) + 6 = 4(25) + 6 = 106$$

Solution 3

On procède à rebours :

$$\begin{aligned} f(6) &= 4f(3) + 6 \qquad \text{(selon la condition ii), en posant } x = 3) \\ &= 4(f(1) + 12(1) + 12) + 6 \qquad \text{(selon la condition iii), en posant } x = 1) \\ &= 4f(1) + 4(24) + 6 \\ &= 4(1) + 102 \qquad \text{(selon la condition i))} \\ &= 106 \end{aligned}$$

Réponse: $f(6) = 106$

5. Une manufacture fabrique deux formats de tentes, soit des grandes et des petites. L'année dernière, la manufacture a vendu 200 tentes dont un quart étaient grandes. La vente des grandes tentes a produit un tiers des revenus de la manufacture. Quel était le rapport du prix d'une grande tente au prix d'une petite ?

Solution

Puisque l'an dernier, la manufacture a vendu 200 tentes dont un quart étaient grandes, elle a vendu 50 grandes tentes et 150 petites tentes.

Soit G le prix d'une grande tente et P le prix d'une petite tente, en dollars. Le revenu de la vente des grandes tentes est donc de $50G$ dollars et celui des petites, $150P$ dollars.

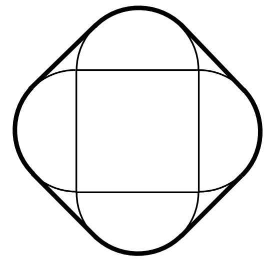
Puisque la vente des grandes tentes a produit un tiers des revenus, on a donc :

$$\begin{aligned} 50G &= \frac{1}{3}(50G + 150P) \\ 150G &= 50G + 150P \\ 100G &= 150S \\ \frac{G}{P} &= \frac{150}{100} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Le rapport du prix d'une grande tente au prix d'une petite est donc de $3 : 2$.

Réponse: $3 : 2$

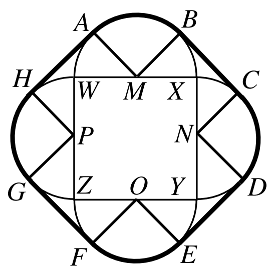
6. Dans la figure, on a tracé un carré ayant des côtés de longueur 2. Sur chaque côté, on a tracé un demi-cercle. Une bande élastique a ensuite été placée autour de la figure. Quelle est la longueur de la bande élastique dans cette position ?



Solution

Soit W, X, Y et Z les sommets du carré, comme dans la figure. Soit M, N, O, et P les centres des demi-cercles.

Dans les demi-cercles, on trace des rayons MA, MB, NC, ND, OE, OF, PG et PH, aux points A, B, C, D, E, F, G, et H, où la bande élastique cesse de toucher au demi-cercle.



Par symétrie, les quatre parties droites de la bande élastique ont la même longueur, c'est-à-dire que $BC = DE = FG = HA$ et les quatre arcs de cercles ont la même longueur.

La longueur de la bande élastique est donc égale à : 4 (longueur de AB) + 4 (longueur de BC).

Or, le segment BC est tangent aux demi-cercles de centres M et N.

Donc, les rayons MB et NC sont perpendiculaires au segment BC. Puisque les demi-cercles ont un diamètre de 2, ils ont un rayon de 1. Donc $MB = NC = 1$. Donc, $BCNM$ est un rerctangle. Puisque M et N sont les milieux respectifs de deux côtés du carré, alors $MX = YN = 1$, d'où $MN = \sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{2}$.

On a vu que $BCNM$ est un rectangle. De même, $AHPM$ est un rectangle. Puisque PM est perpendiculaire à MN, alors AM est perpendiculaire à BM. Donc, $\angle AMB = 90°$, et l'arc AB est un quart de cercle. Sa longueur est donc égale à un quart de la circonférence d'un cercle de rayon 1, soit $\frac{1}{4}(2\pi(1)) = \frac{1}{2}\pi$.

La longueur totale de la bande élastique est égale à $4(\frac{1}{2}\pi) + 4(\sqrt{2}) = 2\pi + 4\sqrt{2}$.

Réponse: $2\pi + 4\sqrt{2}$

7. Soit a et b deux nombres réels tels que $a > 1$ et $b > 0$.
Déterminer la valeur de a, sachant que $ab = a^b$ et $\dfrac{a}{b} = a^{3b}$.

Solution 1
Puisque $ab = a^b$ et $\dfrac{a}{b} = a^{3b}$, on multiplie ces équations, membre par membre, pour obtenir

$$a^2 = a^b \cdot a^{3b} = a^{4b}.$$

Puisque $a \neq 0$, on divise chaque membre par a^2 pour obtainer $a^{4b-2} = 1$.
Puisque $a > 1$, alors $4b - 2 = 0$ d'oú $b = \frac{1}{2}$.
On reporte $b = \frac{1}{2}$ dans l'équation $ab = a^b$ pour obtenir $\frac{1}{2}a = a^{\frac{1}{2}}$ ou $a = 2\sqrt{a}$.
Donc $a^2 = (2\sqrt{a})^2$, ou $a^2 = 4a$.
Puisque $a \neq 0$, on divise chaque membre par a pour obtenir $a = 4$.

Solution 2
Puisque $ab = a^b$, et que $a \neq 0$, on divise chaque membre par a pour obtenir $b = a^{b-1}$.
L'équation $\dfrac{a}{b} = a^{3b}$ devient $a = ba^{3b}$.
On reporte $b = a^{b-1}$ dans cette équation pour obtenir $a = a^{b-1}a^{3b}$, ou $a = a^{4b-1}$.
On compare les coefficients pour obtenir $1 = 4b - 1$ d'où $b = \frac{1}{2}$.
On reporte $b = \frac{1}{2}$ dans l'équation $ab = a^b$ pour obtenir $\frac{1}{2}a = a^{1/2}$ ou $a^{\frac{1}{2}} = 2$, d'où $a - 4$.

Solution 3
Puisque $ab = a^b$ et $\frac{a}{b} = a^{3b}$ et que $a > 1$ et $b > 0$, alors $\log(ab) = \log\left(a^b\right)$ et $\log(\frac{a}{b}) = \log(a^{3b})$.
Donc $\log(a) + \log(b) = b\log(a)$ et $\log(a) - \log(b) = 3b\log(a)$.
On additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $2\log(a) = 4b\log(a)$ ou $(4b - 2)\log(a) = 0$.
Puisque $a > 1$, alors $\log(a) > 0$. Donc $4b - 2 = 0$, d'où $b = \frac{1}{2}$.
On reporte $b = \frac{1}{2}$ dans l'équation $\log(a) + \log(b) = b\log(a)$ pour obtenir $\log(a) + \log(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\log(a)$, ou $\frac{1}{2}\log(a) = -\log(\frac{1}{2})$. Donc $\log(a) = 2\log(2)$, d'où $\log(a) = \log(4)$.
Donc $a = 4$.

Réponse: 4

8. Une feuille de papier de forme rectangulaire, $ABCD$, est telle que $AD = 1$ et $AB = r$, $1 < r < 2$. La feuille est pliée au sommet A de manière que le côté AD soit aligné sur le côté AB. Sans déplier, la feuille est pliée au sommet B de manière que le côté CB soit aligné sur le côté AB. La feuille forme alors un triangle. Une partie de ce triangle a une épaisseur de quatre feuilles. Quelle est l'aire de cette région en fonction de r ?

Solution

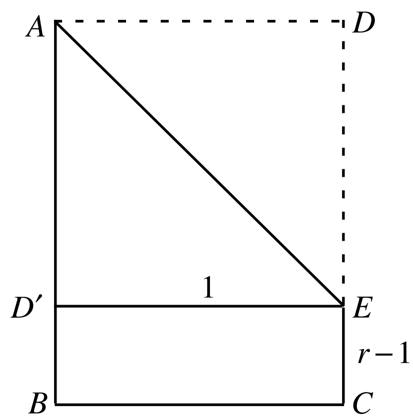
On place d'abord la feuille avec le sommet A dans le coin supérieur gauche et le sommet B dans le coin inférieur gauche. On plie la feuille au sommet A de manière que le côté AD soit aligné sur le côté AB. Soit D' le point où D touche le côté AB et soit E le point sur DC où le pli AE se termine.

Puisque $AD = AD'$, alors $AD' = 1$.

Puisque $D'E$ est perpendiculaire à $D'A$ (puisque DC ètait perpendiculaire à AD), alors $D'E$ est parallèle à BC.

Donc $D'E = 1$.

On a aussi $D'B = EC = r - 1$, puisque $AB = r$.



On plie la feuille de nouveau au sommet B de manière que le côté CB soit aligné sur AB. On dèplie de manière à montrer ce dernier pli. Puisque CB était aligné sur AB, le pli est la bissectrice de l'angle ABC. Le pli forme donc un angle de 45° avec les côtés AB et BC.

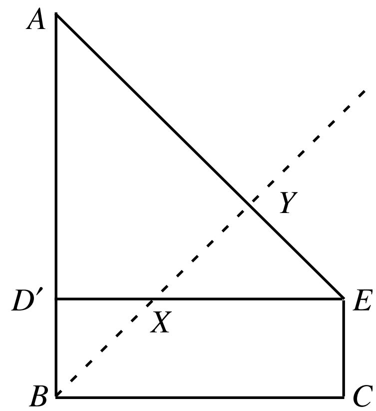
Soit X et Y les points respectifs où le pli coupe $D'E$ et AE.

Pour que le dernier pli forme une région qui a une épaisseur de quatre feuilles, il faut superposer deux régions qui ont chacune une épaisseur de deux feuilles.

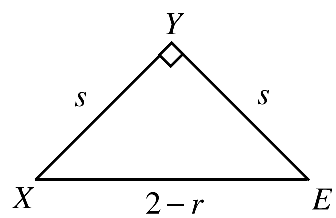
Puisque le triangle XYE est la seule région du dessous formée de deux épasseurs et que cette région sera complètement recouverte d'une autre région à deux épaisseurs, l'aire de la région à quatre épaisseurs est celle de ce triangle.

Puisque $\angle ABX = 45°$, le triangle $BD'X$ est isoscèle et rectangle.

Donc $D'X = D'B = r - 1$.



Donc $EX = 1 - D'X$, d'où $EX = 1 - (r - 1)$, ou $EX = 2 - r$.
Puisque $\angle D'XB = 45°$, alors $\angle YXE = 45°$.
Puisque le triangle $AD'E$ est isoscèles, alors $\angle YEX = 45°$ et le triangle XYE est donc isocèle rectangle.



Soit $XY = s$. Donc $XE = \sqrt{2}s$. Or on sait que $XE = 2 - r$..
Donc $\sqrt{2}s = 2 - r$, d'où $2s^2 = (2 - r)^2$.
L'aire du triangle XYE est égale à $\frac{1}{2}s^2$; elle est donc égale à $\frac{1}{4}(2 - r)^2$.
La région qui a une épasseur de quatre feuilles a une aire de $\frac{1}{4}(2 - r)^2$.

Réponse: $\frac{1}{4}(2 - r)^2$

Part B

1. Les points $A(-8,6)$ and $B(-6,-8)$ sont situés sur le cercle d'équation $x^2+y^2=100$.

   (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe par A et B.

   Solution
   La pente du segment AB est égale à $\dfrac{-8-6}{-6-(-8)}$, ou -7. L'équation a donc la forme $y=-7x+b$. Puisque le point A vérife l'équation, on a $6=-7(-8)+b$, d'où $b=-50$. L'equation de la droite est $y=-7x-50$. (Plusieurs autres méthods sont possibles.)

   (b) Déterminer l'équation de la médiatrice du segment AB.

   Solution
   Puisque la médiatrice est perpendiculaire au segment, sa pente est égale à $\frac{1}{7}$.
   Son équation a donc la forme $y=\frac{1}{7}x+b$.
   Le milieu du segment AB a pour coordonnées $\left(\frac{-8+(-6)}{2},\frac{6+(-8)}{2}\right)$, ou $(-7,-1)$.
   Puisque ce point est sur la médiatrice, alors $-1=\frac{1}{7}(-7)+b$, d'où $b=0$.
   La médiatrice du segment AB a pour équation $y=\frac{1}{7}x$.

   (c) La médiatrice de AB coupe le cercle en deux points, soit P dans le quadrant I et Q dans le quadrant III. Déterminer les coordonnées de P et de Q.

   Solution 1
   On cherche les points d'intersection du cercle d'équation $x^2+y^2=100$ et de la droite d'équation $y=\frac{1}{7}x$. Les coordonnées de ces points vérifient les deux équations. On reporte $x=7y$ dans $x^2+y^2=100$:

$$\begin{aligned}(7y)^2+y^2&=100\\ 49y^2+y^2&=100\\ 50y^2&=100\\ y^2&=2\\ y&=\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

   D'après l'équation $x=7y$, si $y=\sqrt{2}$, alors $x=7\sqrt{2}$. Si $y=-\sqrt{2}$, alors $x=-7\sqrt{2}$.
   Puisque P est dans le quadrant I, ses coordonnées sont $(7\sqrt{2},\sqrt{2})$.
   Puisque Q est dans le quadrant III, ses coordonnées sont $(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

   Solution 2
   On cherche les points d'intersection du cercle d'équation $x^2+y^2=100$ et de la droite

d'équation $y = \frac{1}{7}x$. Les coordonnées de ces points vérifient les deux équations.
On reporte $y = \frac{1}{7}x$ dans $x^2 + y^2 = 100$:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{1}{7}x\right)^2 &= 100 \\ x^2 + \frac{1}{49}x^2 &= 100 \\ \frac{50}{49}x^2 &= 100 \\ x^2 &= 98 \\ x &= \pm\sqrt{98} \\ x &= \pm 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

D'après l'équation $y = \frac{1}{7}x$, si $x = 7\sqrt{2}$, alors $y = \sqrt{2}$. Si $x = -7\sqrt{2}$, alors $y = -\sqrt{2}$.
Puisque P est dans le quadrant I, ses coordonnées sont $(7\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Puisque Q est dans le quadrant III, ses coordonnées sont $(-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(d) Quelle est la longueur de PQ ? Justifier sa réponse.

Solution 1
Les points P et Q sont situés sur la droite d'équation $y = \frac{1}{7}x$, qui passe à l'origine. P et Q sont donc les extrémités d'un diamètre du cercle. Puisque le cercle a un rayon de 10, il a un diamètre de 20.
Donc $PQ = 20$.

Solution 2
Puisque P et Q ont pour coordonnées respectives $(7\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, alors :

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(7\sqrt{2} - (-7\sqrt{2}))^2 + (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2} \\ &= \sqrt{(14\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{392 + 8} \\ &= \sqrt{400} \\ &= 20 \end{aligned}$$

2. (a) Déterminer les deux valeurs de x qui vérifient $x^2 - 4x - 12 = 0$.

Solution
Par factorisation du membre de gauche, on obtient $(x-6)(x+2) = 0$.
Donc $x - 6 = 0$ ou $x + 2 = 0$, d'où $x = 6$ ou $x = -2$.
Les deux valeurs de x sont 6 et -2.

(b) Déterminer *la* valeur de x qui vérifie $x - \sqrt{4x+12} = 0$. Justifier sa réponse.

Solution
Pour éliminer la racine carrée, il faut l'isoler. On obtient $x = \sqrt{4x+12}$.
Puisque les deux membres de cette équation sont égaux, le carré du membre de gauche est égal au carré de membre de droite. On obtient donc :

$$\begin{aligned} x^2 &= 4x + 12 \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ (x-6)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x - 6 = 0$ ou $x + 2 = 0$, d'où $x = 6$ ou $x = -2$. Or, ces nombres sont des racines de l'équation $x^2 = 4x + 12$ et pas nécessairement celles de l'équation $x = \sqrt{4x+12}$. On doit vérifier si elles le sont.
Si $x = 6$, le membre de gauche est égal à 6 et le membre de droite est égal á 6. Il s'agit donc d'une racine. Si $x = -2$, le membre de gauche est égal à -2, tandis que le membre de droite est égal à 2. Donc, -2 n'est pas une racine de l'équation.
La valeur de x qui $x - \sqrt{4x+12} = 0$ est 6.

(c) Déterminer toutes les valeurs réelles de c pour lesquelles l'équation

$$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$$

admet exactement deux racines réelles distinctes.

Solution
On entrepend la résolution de cette équation et on examinera le discriminant pour vérifier les valeurs de c.
Puisque $8x^2 - 32x - 8c = 8(x^2 - 4x - c)$, posons $T = x^2 - 4x - c$.
L'équation donnée devient :

$$\begin{aligned} T - \sqrt{8T} &= 0 \qquad (*) \\ T &= \sqrt{8T} \\ T^2 &= 8T \\ T(T-8) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $T = 0$ ou $T = 8$. On peut vérifier que 0 et 8 sont bien des racines d l'équation (*).
Donc $x^2 - 4x - c = 0$ ou $x^2 - 4x - c = 8$.
Le discriminant de l'équation $x^2 - 4x - c = 0$ est égal à $(-4)^2 - 4(-c)$, soit $16 + 4c$.

i. L'équation n'admet aucune racine réelle si $16 + 4c < 0$, c'est-à-dire si $c < -4$.

ii. Elle admet exactement une racine réelle si $16 + 4c = 0$, c'est-à-dire si $c = -4$.

iii. Elle admet deux racines réelles distinctes si $16 + 4c > 0$, c'est-à-dire si $c > -4$.

L'équation $x^2 - 4x - c = 8$ peut s'écrire sous forme $x^2 - 4x - (c+8) = 0$. Son discriminant est égal à $(-4)^2 - 4(-(c + 8))$, soit $48 + 4c$.

i. L'équation n'admet aucune racine réelle si $48 + 4c < 0$, c'est-à-dire si $c < -12$.

ii. Elle admet exactement une racine réelle si $48 + 4c = 0$, c'est-à-dire si $c = -12$.

iii. Elle admet deux racines réelles distinctes si $48 + 4c > 0$, c'est-à-dire si $c > -12$.

On sait qu'une racine d'une des deux équations ne peut être une racine de l'autre, car le même membre de gauche, soit $x^2 - 4x - c$, ne peut pas être égal à 0 et à 8 à la fois.
On présente les résultats dans un tableau.

	$c < -12$	$c = -12$	$-12 < c < -4$	$c = -4$	$c > -4$
$x^2 - 4x - c = 0$	0 racine	0 racine	0 racine	1 racine	2 racines
$x^2 - 4x - c = 8$	0 racine	1 racine	2 racines	2 racines	2 racines
Nombre total de racines	0 racine	1 racine	2 racines	3 racines	4 racines

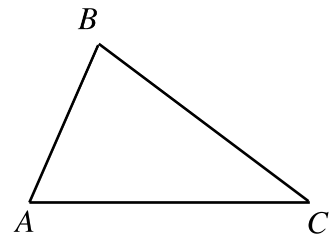
L'équation donnée admet exactement deux racines réelles distinctes lorsque $-12 < c < -4$.

3. Une carte indique où sont situés tous les restaurants *La poutine dorée* en Amérique du nord. Sur cette carte, on a tracé un segment entre chaque restaurant et le restaurant qui est plus près de lui. Chaque restaurant a un seul voisin le plus près. (On remarquera qu'il est possible qu'un restaurant A soit le restaurant le plus près de B sans que B soit le restaurant le plus près de A.)

   (a) Démontrer qu'il est impossible pour trois des segments de former un triangle.

Solution 1

On suppose que trois des segments forment un triangle et on démontrera que cela mène à une contradiction.
On remarque que si les restaurants X et Y sont reliés par un segment, alors X est le restaurant le plus prés de Y ou Y est le restaurant le plus prés de X, ou les deux.
Supposons que A, B, et C sont trois points sur la carte reliés par des segments. Supposons que le A est le restaurant le plus prés de B. (On aurait pu supposer le contraire et argumenter de la même mainière.) On peut conclure que C n'est pas le restaurant le plus près de B. Donc $BA < BC$.



Puisque B et C sont reliés et que C n'est pas le restaurant le plus près de B, on peut conclure que B est le restaurant le plus près de C. Donc $CB < CA$.
Puisque C et A sont reliés et que A n'est pas le restaurant le plus prés de C, on peut conclure que C est le restaurant le plus près de A. Donc $AC < AB$.

On a donc $BA < BC$, $BC < AC$ et $AC < BA$, ce qui est impossible. Puisque les étapes de l'argument sont logiques, c'est l'hypothèse initiale que est fausse. Il est donc impossible pour trois segments de former un triangle.

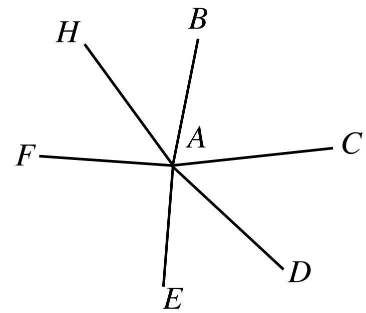
Solution 2
Dans cette solution, on démontre qu'il est impossible de construire un triangle.
On considère deux restaurants, A et B, reliés par un segment. On peut supposer que A est le restaurant le plus près de B (si B est le restaurant le plus près de A, on utilise le même argument en changeant les lettres A et B l'une pour l'autre. Si chacun est le restaurant le plus près de l'autre, on utilise le même argument.)

A est donc le restaurant le plus près de B. On ajoute un autre restaurant, C, relié à B. B doit donc être le restaurant le plus près de C, puisque C ne peut être, avec A, le restaurant le plus près de B.
Si on relie C et A, alors C est le restaurant le plus près de A ou A est celui qui est le plus près de C. Or A ne peut être, avec B, le restaurant le plus près de C. Donc, C doit être le restaurant le plus près de A.
Donc, AC est plus court que AB et AB est plus court que BC, puisque A est le restaurant le plus près de B. On peut donc conclure que AC est plus court que BC et cela indique A est le restaurant le plus près de C, ce qui est faux. Il est donc impossible de relier C et A. Il est donc impossible de construire un tel triangle ABC.

(b) Démontrer qu'il est impossible pour un restaurant d'être relié par des segments à plus de cinq autres restaurants.

Solution
On suppose qu'il est possible pour le restaurant A d'être relié à six autres restaurants, soit B, C, D, E, F et H, placés comme dans la figure ci-contre. On montrera que cela mène à une contradiction, ce qui invalidera l'hypothèse.

On en conclura qu'il est impossible pour un restaurant d'être reliè par des segments à plus de cinq autres restaurants, car il lui serait impossible d'être relié aux six premiers.



On considère les restaurants A, B et C. On sait que B et C sont reliés à A, mais qu'ils ne peuvent pas tous les deux être le restaurant le plus près de A. Il faut donc que A soit le restaurant le plus près de l'un d'eux, disons B. (Si c'était C, on procéderait avec un argument semblable.)

Puisque A est le restaurant le plus près de B, alors $BA < BC$.

On considère le segment qui relie A et C. Si C est le restaurant le plus près de A, alors $AC < AB$, ce qui donne $AC < AB < BC$. Si A est le restaurant le plus près de C, alors $CA < CB$, ce qui donne $CA < CB$ et $BA < CB$. Dans chacun des deux cas, BC est seul le plus grand côté du triangle ABC. Il doit donc être à l'opposé de l'angle le plus grand du triangle.

Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, cet angle doit mesurer plus de 60°. On a donc $\angle BAC > 60°$.

On peut utiliser le même raisonnement pour conclure que le mesure de chacun des angles CAD, DAE, EAF, FAH et HAB est supérieure à 60°. La somme de ces mesures est donc supérieure à 360°, ce qui est impossible. L'hypothèse initiale est donc fausse.

Il est donc impossible pour un restaurant d'être relié par des segments à plus de cinq autres restaurants.

4. Dans une *suite sumac*, t_1, t_2, t_3, ..., t_m, chaque terme est un entier supérieur ou égal à 0. De plus, à partir du troisième terme, chaque terme est égal à la différence des deux termes précédents, c'est-à-dire que, $t_{n+2} = t_n - t_{n+1}$ lorsque $n \geq 1$. La suite se termine au terme t_m si $t_{m-1} - t_m < 0$. Par exemple, la suite 120, 71, 49, 22, 27 est une suite sumac de longueur 5.

   (a) Déterminer l'entier positif B pour lequel la suite sumac 150, B, ... admet un nombre maximal de termes.

   Solution

   Soit une suite sumac dont $t_1 = 150$ et $t_2 = B$. Voici les termes suivants, pourvu qu'ils existent :

$$t_3 = 150 - B \qquad t_4 = 2B - 150 \qquad t_5 = 300 - 3B \qquad t_6 = 5B - 450$$
$$t_7 = 750 - 8B \qquad t_8 = 13B - 1200 \qquad t_9 = 1950 - 21B \qquad t_{10} = 34B - 3150$$

   Pour maximiser le nombre de termes, on doit choisir une valeur de B pour laquelle le plus grand nombre possible de termes soient non négatifs. Le premier « terme » négatif indique que la suite s'est terminée au terme précédent.

   Pour que $t_2 \geq 0$, il faut que $B \geq 0$.
   Pour que $t_3 \geq 0$, il faut que $150 - B \geq 0$ c'est-à-dire que $B \leq 150$.
   Pour que $t_4 \geq 0$, il faut que $2B - 150 \geq 0$ c'est-à-dire que $B \geq 75$.
   Pour que $t_5 \geq 0$, il faut que $300 - 3B \geq 0$ c'est-à-dire que $B \leq 100$.
   Pour que $t_6 \geq 0$, il faut que $5B - 450 \geq 0$ c'est-à-dire que $B \geq 90$.
   Pour que $t_7 \geq 0$, il faut que $750 - 8B \geq 0$ c'est-à-dire que $B \leq \frac{750}{8} = 93\frac{6}{8}$.
   Pour que $t_8 \geq 0$, il faut que $13B - 1200 \geq 0$ c'est-à-dire que $B \geq \frac{1200}{13} = 92\frac{4}{13}$.
   Pour que $t_9 \geq 0$, il faut que $1950 - 21B \geq 0$ c'est-à-dire que $B \leq \frac{1950}{21} = 92\frac{18}{21}$.

   Puisque B doit prendre une valeur entière, on choisit $B = 93$, puisque pour maximiser le nombre de termes, on doit avoir $92\frac{4}{13} \leq B \leq 93\frac{3}{4}$. Les huit premiers termes sont alors non négatifs. Le 9^{e} terme, soit -3, est négatif.

   Lorsque $B = 93$, la suite sumac a un nombre maximal de termes. Ces termes sont 150, 93, 57, 36, 21, 15, 6 et 9.

   (b) Soit m un entier tel que $m \geq 5$. Déterminer le nombre de suites sumac de longueur m, de manière que $t_m \leq 2000$ et qu'aucun des termes ne soit divisible par 5.

   Solution

   Voici quelques remarques au sujet des suites sumac.

   – Une suite sumac est complètement déterminée par ses deux premiers termes. En effet, le 3^{e} terme est défini par les deux premiers, le 4^{e} terme est défini par les 2^{e} et 3^{e} termes, etc. Elle se termine lorsque le « terme suivant » est négatif.

– Pour chaque terme t_n d'une suite sumac, on a $t_{n+2} = t_n - t_{n+1}$, d'où $t_n = t_{n+1} + t_{n+2}$. Il est donc possible de procéder à rebours. Lorsqu'on connaît les derniers termes d'une suite sumac, on peut déterminer les termes précédents.
– D'après la première remarque, les deux premiers termes d'une suite sumac déterminent la suite. En est-il de même des deux derniers termes ? Non. Lorsqu'on procède à rebours, chaque nouveau terme est la somme des deux derniers. Puisqu'on additionne toujours des termes non négatifs, il n'y a aucune restriction pour arrêter la procédure. (Par example, si les derniers termes sont 1 et 2, on peut obtenir les suites sumac 3, 1, 2 et 4, 3, 1, 2.
– Si on connaît les deux derniers termes, ainsi que la longueur de la suite, la suite est complètement déterminée et il sera toujours possible d'obtenir ses termes.

Soit m un entier tel que $m \geq 5$ et soit $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}, t_m$ une suite sumac de longueur m.
Puisqu'une condition est imposée au dernier terme, on procède à rebours.
Soit $x = t_m$ et $y = t_{m-1}$. On remarque que la suite est déterminée par x, y et m.
Puisque x et y sont les deux derniers termes de la suite sumac, alors $t_{m-1} - t_m < 0$, d'où $x > y$. On veut donc déterminer le nombre de suites sumacs de longueur m, de manière que $x \leq 2000$, $y < x$ et qu'aucun terme ne soit divisible par 5.

On écrit d'abord les cinq derniers termes de la suite, en ordre inverse : x, y, $x+y$, $x+2y$, $2x+3y$. (Puisque $m \geq 5$, on sait que la suite a au moins cinq termes.)
Puisque aucun des termes ne doit être divisible par 5, on considère x et y modulo 5 pour examiner les conséquences. Il y a 25 couples (x, y) possibles modulo 5.
Puisque aucun terme n'est divisible par 5, on élimine $x \equiv 0 \pmod 5$ et $y \equiv 0 \pmod 5$, ce qui laisse 16 couples (x, y) à examiner.
On examine les valeurs de $x, y, x+y, x+2y$ et $2x+3y$ modulo 5 pour chacun des 16 cas. Dans une ligne, on cesse d'évaluer les termes dès qu'une valeur est égale à 0, puisque ce cas est rejeté.

x	y	$x+y$	$x+2y$	$2x+3y$
1	1	2	3	0
1	2	3	0	
1	3	4	2	1
1	4	0		
2	1	3	4	2
2	2	4	1	0
2	3	0		
2	4	1	0	
3	1	4	0	
3	2	0		
3	3	1	4	0
3	4	2	1	3
4	1	0		
4	2	1	3	4
4	3	2	0	
4	4	3	2	0

Les seuls couples (x, y) acceptables, modulo 5, sont $(1,3), (2,1), (3,4)$ et $(4,2)$.

Si on considère le couple $(x, y) = (1,3)$, les termes de la suite, en ordre inverse, sont 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, ... modulo 5. Les nombres sont répétés à tous les quatre termes et aucun terme n'est nul. Les trois autres couples produisent des cycles semblables de quatre termes répétés.

Pour chacun des quatre couples, il faut déterminer le nombre de couples (x, y) d'entiers, congrus modulo 5 au couple, tels que $x \leq 2000$ et $y < x$. Chacun de ces couples définira une suite sumac de longueur m, $m \geq 5$, dont aucun des termes n'est divisible par 5. On remarque que le nombre de suites est indépendant de m, puisque la divisiblité des termes par 5 n'intervient plus dans ces suites.

1$^{\text{er}}$ cas : $(x, y) \equiv (1,3) \pmod 5$

x peut pendre les valeurs 1996, 1991, ..., 6, 1.

Si $x = 1996$, y peut égaler 1993, 1988, ..., 8, 3. (399 valeurs possibles)

Si $x = 1991$, y peut égaler 1988, 1983, ..., 8, 3. (398 valeurs possibles)

Pour chaque valeur successive de x, le nombre de valeurs possibles de y diminue de 1, jusqu'à ce que pour $x = 6$, y ne prend qu'une valeur possible, soit 3.

Dans ce cas, le nombres de couples (x, y) possibles est égal à 399 + 398 + ... + 2 + 1, c'est-à-dire à $\frac{399 \times 400}{2}$, ou 79 800.

2$^{\text{e}}$ cas : $(x, y) \equiv (2,1) \pmod 5$

x peut prendre les valeurs 1997, 1992, ..., 7, 2.

Si $x = 1997$, y peut égaler 1996, 1991, $\ldots$,6, 1. (400 valeurs possibles)

Si $x = 1992$, y peut égaler 1991, 1986, $\ldots$,6, 1. (399 valeurs possibles)

Pour chaque valeur successive de x, le nombre de valeurs possibles de y diminue de 1, jusqu'à ce que pour $x = 2$, y ne prend qu'une valeur possible, soit 1.

Dans ce case, le nombres de couples (x, y) possibles est égale à 400 + 399 + $\ldots$ + 2 + 1, c'est-à-dire à $\frac{400\times 401}{2}$, ou 80 200.

3e cas : $(x, y) \equiv (3, 4) \pmod 5$

x peut prendre les valeurs 1999, 1993, $\ldots$, 8, 3.

Si $x = 1998$, y peut égaler 1994, 1989, $\ldots$, 9, 4. (399 valeurs possibles)

Si $x = 1993$, y peut égaler 1989, 1984, $\ldots$, 9, 4. (398 valeurs possibles)

Pour chaque valeur successive de x, y ne prend qu'une valeur possible, soit 4.

Dans ce cas, le nombres de couples (x, y) possibles est égal à 399 + 398 + $\ldots$ + 2 + 1, c'est-à-dire à 79 800.

4e cas : $(x, y) \equiv (4, 2) \pmod 5$

x peut prendre les valeurs 1999, 1994, $\ldots$, 9, 4.

Si $x = 1999$, y peut égaler 1997, 1992, $\ldots$, 7, 2. (400 valeurs possibles)

Si $x = 1994$, y peut égaler 1992, 1987, $\ldots$, 7, 2. (399 valeurs possibles)

Pour chaque valeur successive de x, le nombre de valeurs possibles de y diminue de 1 jusqu'à ce que pour $x = 8$, le nombre de valeurs possibles de y diminue de 1, jusqu'à ce que pour $x = 4$, y ne prend qu'une valeur possible, soit 2.

Dans ce cas, le nombres de couples (x, y) possibles est égal à 400 + 399 + $\ldots$ + 2 + 1, c'est-à-dire à 80 200.

En tout, le nombre de couples possibles est égal à $2(79\ 800) + 2(80\ 200)$, soit 320 000.

Il y a donc 320 000 suites sumac de longueur m, de manière que $t_m \leq 2000$ et qu'aucun des termes ne soit divisible par 5.