Le centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Le
Défi ouvert
canadien de mathématiques

Le mercredi 26 novembre 2003

Solutions

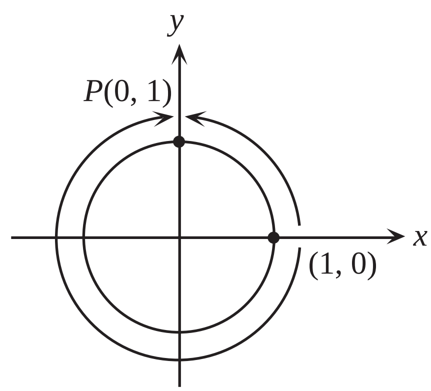
Partie A

1. Soit G l'âge de Gilles présentement, en années.
   Donc l'âge de Julie est égal à $G-1$ et l'âge d'Isabelle est égal à $G+2$.
   Puisque la somme de leur âge est égale à 118 ans, alors:
   $$(G-1)+G+(G+2)=118$$
   $$G=39$$
   Gilles a 39 ans.

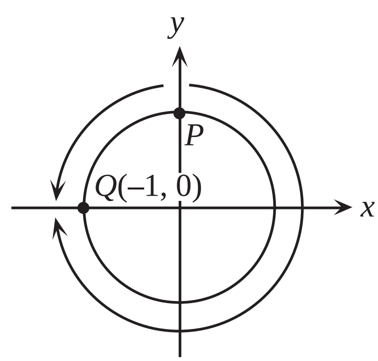
2. Lorsque le point $(4,-2)$ est réfléchi dans l'axe des abscisses, l'image est le point $(4,2)$.
   Lorsque le point $(4,2)$ est réfléchi dans la droite d'équation $y=x$, son image est le point $(2,4)$.
   Les coordonnées de l'image finale sont $(2,4)$.

3. La particule qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre a une vitesse trois fois plus grande que l'autre. Dans un même intervalle de temps, la particule qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre parcourt une distance trois fois plus grande que l'autre.

   Donc pendant que la particule rapide parcourt $\frac{3}{4}$ du cercle, la particule lente parcourt $\frac{1}{4}$ du cercle et elles se rencontrent donc au point $P(0,1)$.



   Par un argument semblable, on voit que les particules se rencontrent la deuxième fois au point $Q(-1,0)$.



4. *Solution 1*

Il y a 10 choix possibles de deux nombres, soit $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ et $(3,4)$. Les seuls choix où la somme des nombres est plus grande que leur produit sont ceux qui contiennent un 0 ou un 1. Il y a 7 tels choix. La probabilité demandée est donc égale à $\frac{7}{10}$.

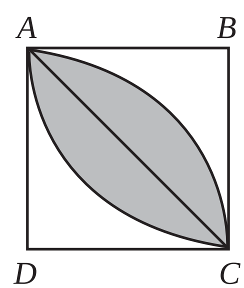
Solution 2

On construit un tableau des possibilités.

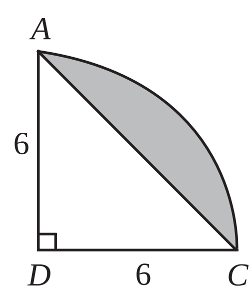
Nombres choisis	Somme	Produit
0 et 1	1	0
0 et 2	2	0
0 et 3	3	0
0 et 4	4	0
1 et 2	3	2
1 et 3	4	3
1 et 4	5	4
2 et 3	5	6
2 et 4	6	8
3 et 4	7	12

Il y a donc 10 choix possibles de deux nombres différents. Il y a 7 choix favorables où la somme des deux nombres est plus grande que leur produit.
La probabilité est égale à $\frac{7}{10}$.

5. On joint *A* et *C*.
Le segment coupe la région ombrée en deux parties identiques.



On considère la partie ombrée au-dessus du segment *AC*.
Cette région est formée en prenant le quart de disque, de centre *D* et de rayon 6, et en enlevant le triangle ADC.
L'aire du quart de disque est égale à $\frac{1}{4}\pi(6^2)$ ou 9π.



Le triangle ADC est la moitié du carré. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(6)$ ou 18.

L'aire de la région ombrée au-dessus du segment est égale à $9\pi - 18$.
L'aire de la région ombrée au complet est égale à $2(9\pi - 18)$ ou $18\pi - 36$ unités carrées.

6. Si $x < 0$, alors $\frac{3}{x} < 0$ et $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \le \frac{3}{x} < 0$. De même, $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor < 0$. Il est alors impossible que $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor$ soit égal à 5. L'équation $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$ n'admet donc aucune solution lorsque $x < 0$.

Si $x > 0$, alors $\frac{3}{x} < \frac{4}{x}$ et $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor$.
Puisque $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor$ sont des entiers, l'équation $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$ admet trois possibilités :

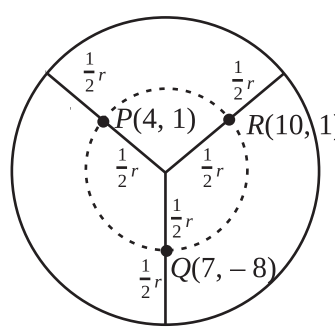
i) $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 0$ et $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$

ii) $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 1$ et $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 4$

iii) $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 2$ et $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 3$

Si $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 0$, alors $0 \le \frac{3}{x} < 1$, d'où $x > 3$. Si $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$, alors $5 \le \frac{4}{x} < 6$, d'où $\frac{2}{3} < x \le \frac{4}{5}$. Puisque *x* ne peut être dans chaque intervalle à la fois, il n'y a aucune solution dans ce cas.
Si $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 1$, alors $1 \le \frac{3}{x} < 2$, d'où $\frac{3}{2} < x \le 3$. Si $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 4$, alors $4 \le \frac{4}{x} < 5$, d'où $\frac{4}{5} < x \le 1$. Puisque *x* ne peut être dans chaque intervalle à la fois, il n'y a aucune solution dans ce cas.
Si $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 2$, alors $2 \le \frac{3}{x} < 3$, d'où $1 < x \le \frac{3}{2}$. Si $\left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 3$, alors $3 \le \frac{4}{x} < 4$, d'où $1 < x \le \frac{4}{3}$. Dans ce cas, il y a des valeurs de *x* qui appartiennent à chaque intervalle. On voit que si $1 < x \le \frac{4}{3}$, alors $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$.
L'étendue des valeurs de *x* pour lesquelles $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$ est l'intervalle $1 < x \le \frac{4}{3}$.

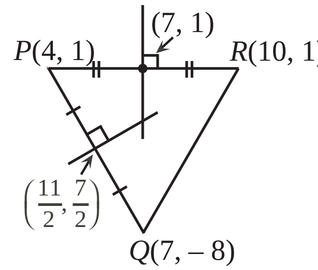
7. *Solution*
Soit *r* le rayon du cercle *C*.
Puisque chacun des points *P*, *Q* et *R* est le milieu d'un rayon du cercle *C*, chaque point est situé sur un cercle ayant le même centre que *C*, dont le rayon est la moitié du rayon de *C*.



1^re méthode – À l'aide des médiatrices

Le centre du cercle qui contient les points *P*, *Q* et *R* est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle *PQR*.

On considère le côté *PR*. Puisque *PR* est un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses, sa médiatrice a pour équation $x = 7$.

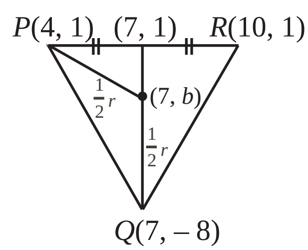


On considère le côté *PQ*. Puisque *P* et *Q* ont pour coordonnées respectives $(4,1)$ et $(7,-8)$, alors *PQ* a pour pente –3. Son milieu a pour coordonnées $\left(\frac{11}{2},-\frac{7}{2}\right)$. La médiatrice de *PQ* a donc une pente de $\frac{1}{3}$ et son équation est $y+\frac{7}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{11}{2}\right)$.

Au point d'intersection des deux médiatrices, on a $y+\frac{7}{2}=\frac{1}{3}\left(7-\frac{11}{2}\right)$, d'où $y=-3$.
Le centre du cercle est le point $(7,-3)$. Puisque le point $(7,-8)$ est situé sur le cercle, le petit cercle a donc un rayon de 5. Le cercle *C* a donc un rayon de 10.

2^e *méthode* – À l'aide d'une médiatrice

Comme dans la méthode précédente, on cherche le centre du cercle *C*. On sait que le centre est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle PQR. On obtient facilement l'équation de la médiatrice de *PR*, soit $x = 7$. Le centre vérifie donc l'équation $x = 7$. Le centre *O* a donc pour coordonnées $(7, b)$.



Puisque les rayons du cercle sont congrus, on a :

$$OP^2 = OQ^2$$
$$(7-4)^2+(b-1)^2=(7-7)^2+(b+8)^2$$
$$9+b^2-2b+1=b^2+16b+64$$
$$b=-3$$

Le rayon du cercle qui passe par les points *P*, *Q* et *R* mesure $\sqrt{3^2+(-4)^2}$ ou 5 et le grand cercle *C* a donc un rayon de 10.

8. On doit d'abord remarquer que puisqu'on cherche des entiers positifs k, l et m tels que

$$\frac{4k}{5}+\frac{5l}{6}+\frac{6m}{7}=82,$$

alors k doit être divisible par 5, l doit être divisible par 6 et m doit être divisible par 7.

On reporte donc $k=5K$, $l=6L$ et $m=7M$ dans les équations données, K, L et M étant des entiers positifs. On obtient donc :

$$5K+6L+7M=97$$
$$4K+5L+6M=82$$

On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir :

$$K+L+M=15$$
$$4K+5L+6M=82$$

On soustrait la deuxième équation de 6 fois la première, membre par membre, pour obtenir :

$$K+L+M=15$$
$$2K+L=8$$

Puisque K, L et M sont des entiers positifs, la deuxième équation nous donne les valeurs possibles suivantes de K et de L. Les valeurs correspondantes de M sont obtenues de la première équation. On obtient aussi les valeurs correspondantes de k, l et m :

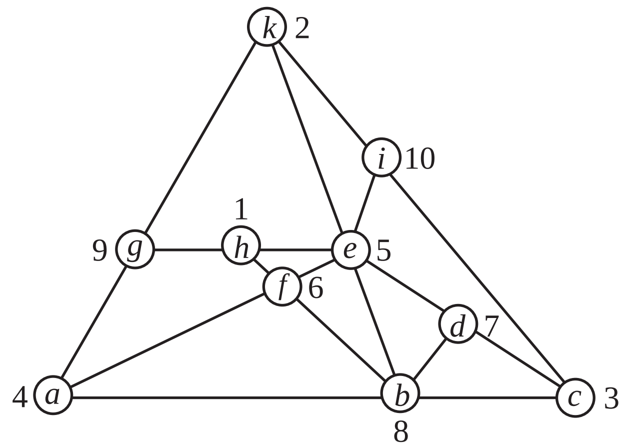
K	L	M	k	l	m
1	6	8	5	36	56
2	4	9	10	24	63
3	2	10	15	12	70

Il y a donc trois triplets (k, l, m) d'entiers strictement positifs qui vérifient le système d'équations.

Partie B

1. a) À partir des données, $k = 2$ et $e = 5$, on procède de façon graduelle.
[On utilise la notation (5, i) et (5, 7, c) pour indiquer qu'il y a une droite qui contient les entiers 5 et i ou 5, 7 et c. De là, on a $5 + i = 15$ et $5 + 7 + c = 15$, d'où $i = 10$ et $c = 3$.]

$i = 10$	(5, i)
$b = 8$	(2, 5, b)
$d = 7$	(8, d)
$c = 3$	(5, 7, c)
$a = 4$	(a, 8, 3)
$g = 9$	(4, g, 2)
$f = 6$	(4, f, 5)
$h = 1$	(9, h, 5)



On peut vérifier que la somme des nombres sur chaque droite est égale à 15.

b) i) *Solution 1*
On a $k = 2$ et e est une inconnue.
Donc :

$i = 15 - e$ $\quad (e, i)$

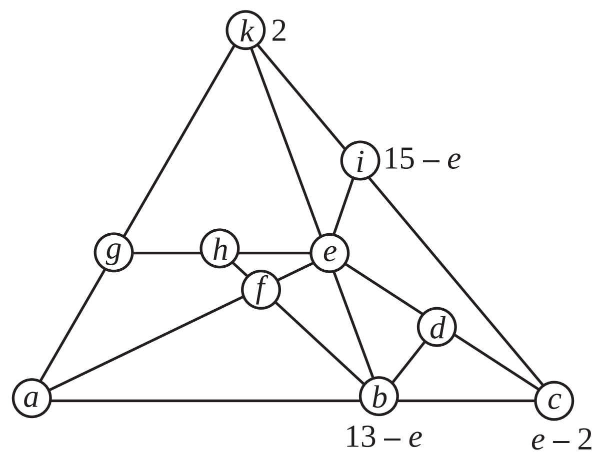
$c = 15 - 2 - (15 - e)$

$\quad = e - 2$ $\quad (2, 15 - e, c)$

$b = 15 - 2 - e$

$\quad = 13 - e$ $\quad (2, e, b)$

Donc $b = 13 - e$ et $c = e - 2$.



Solution 2

On a $k = 2$ et e est une inconnue. Donc :

$i = 15 - e \qquad (e, i)$

$c = 15 - 2 - (15 - e)$

$\;\; = e - 2 \qquad (2, 15 - e, c)$

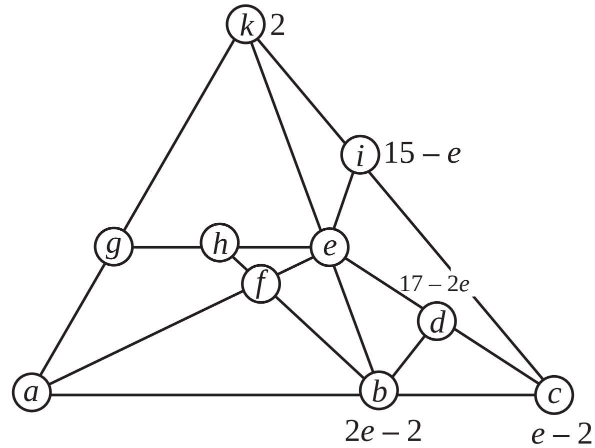
$d = 15 - e - (e - 2)$

$\;\; = 17 - 2e \qquad (e, d, e - 2)$

$b = 15 - (17 - 2e)$

$\;\; = 2e - 2 \qquad (b, 17 - 2e)$

Donc $b = 2e - 2$ et $c = e - 2$.



ii) *Solution*

D'après la partie i), on a $k = 2$, $b = 13 - e$ et $c = e - 2$. Donc :

$d = 15 - b$

$\;\; = 15 - (13 - e).$

$\;\; = 2 + e$

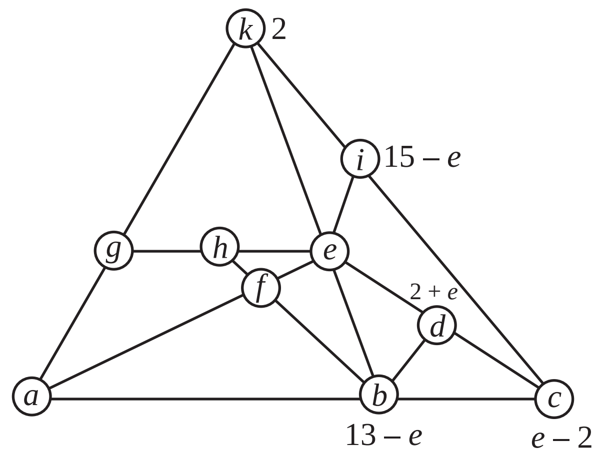
Or $e + d + c = 15$. Donc :

$e + (2 + e) + (e - 2) = 15$

$3e = 15$

$e = 5$

Donc $e = 5$.



c) *Solution*

On utilise la même approche que dans b).

On a $k = x$ et e est une inconnue. On exprime certains cercles en fonction de x et de e :

$i = 15 - e \qquad (e, i)$

$c = 15 - x - (15 - e)$

$\;\; = e - x \qquad (x, 15 - e, c)$

$b = 15 - x - e \qquad (x, e, b)$

$d = 15 - (15 - x - e)$

$\;\; = x + e \qquad (15 - x - e, d)$

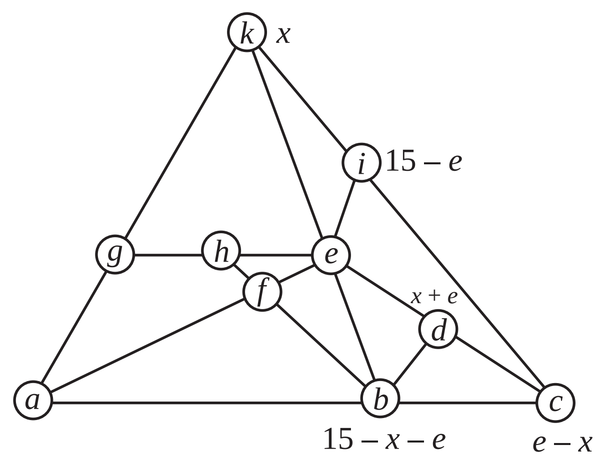
Or $e + d + c = 15$. Donc :

$e + (x + e) + (e - x) = 15$

$3e = 15$

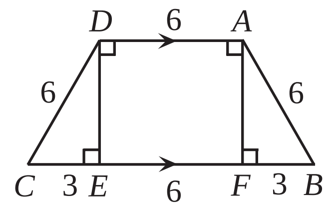
$e = 5$

Donc e est encore égal à 5.



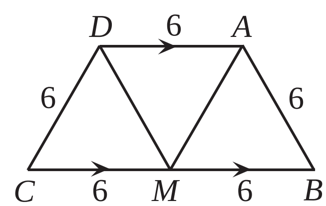
2. a) *Solution 1*

Aux points *A* et *D*, on abaisse des perpendiculaires au côté *BC*, soit *AF* et *DE*.
Puisque *DA* est parallèle à *CB*, alors *DE* et *AF* sont perpendiculaires à *DA*.
Puisque *DAFE* est un rectangle, alors $EF = 6$.
Dans les triangles rectangles *DEC* et *AFB*, on a $DC = AB$ et $DE = AF$. Les triangles sont donc congruents. Donc $CE = BF = 3$.



Dans le triangle rectangle *DEC*, on a, d'après le théorème de Pythagore, $DE = \sqrt{6^2 - 3^2}$, d'où $DE = \sqrt{27}$ ou $DE = 3\sqrt{3}$.
Les longueurs des côtés du triangle *DEC* forment un rapport $1:\sqrt{3}:2$. Le triangle *DEC* est donc un triangle 30°-60°-90°, dans lequel $\angle DCE = 60^0$ et $\angle CDE = 30^0$.
Puisqu'on a des triangles congruents, $\angle DCB = \angle ABC = 60^0$ et $\angle CDA = \angle DAB = 90° + 30°$, c'est-à-dire que $\angle CDA = \angle DAB = 120°$.

Solution 2
On joint *D* et le milieu *M* du côté *CB*.
Donc $CM = MB = 6$.
Puisque *DA* et *MB* sont parallèles et qu'ils ont la même longueur, *ABMD* est un parallélogramme. *AB* et *DM* sont donc parallèles et ils ont la même longueur.
Donc $DM = 6$ et le triangle *DCM* est donc équilatéral.

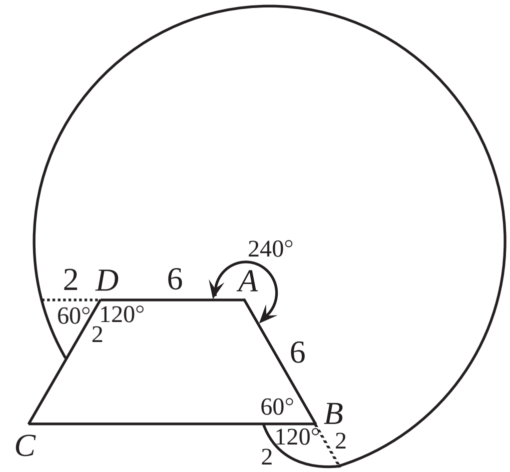


Donc $\angle DCB = \angle DCM = 60^0$. Par un argument semblable, on a $\angle ABC = \angle DCB = 60^0$.
Puisque *DA* et *CB* sont parallèles, $\angle CDA = \angle DAB = 120^0$.

b) i) Si la chaîne était attachée à un point *P* et s'il n'y avait aucune obstruction, Charlot pourrait le promener à l'intérieur d'un cercle de rayon 8 m. (Si la chaîne était bien tendue, Charlot pourrait tracer un cercle de rayon 8 m, mais il peut aussi bouger à l'intérieur de ce cercle.) Or dans ce problème, il y a une obstruction, soit la grange.

Au point *A*, l'angle intérieur de la grange mesure 120^0. L'angle extérieur mesure donc 240^0. Charlot peut donc se promener dans un secteur de 240°, de centre *A* et de rayon 8 m. (Si Charlot se déplace aussi loin que possible, en ligne droite de manière que la chaîne longe le côté *AD*, il peut ensuite marcher dans le sens des aiguilles d'une montre en gardant la chaîne bien tendue, jusqu'à ce qu'elle longe le côté *AB*. La chaîne balaiera un angle de 240^0. La région balayée est un secteur de cercle.)

Or lorsque la chaîne est tendue le long de *AD*, Charlot est à une distance de 2 m au-delà du point *D*. Il est donc en mesure de marcher vers le mur *DC* de la grange. S'il marche de la sorte en tenant la chaîne tendue, il tracera un arc de cercle de centre *D* et de rayon 2 m. (Seule la partie de la chaîne qui dépasse le point *D* bouge pour balayer un secteur de cercle.) Puisque l'angle extérieur de la grange au point *D* mesure 240^0, l'angle entre le prolongement de *AD* et le côté *DC* mesure 60^0. Charlot peut donc balayer un secteur de 60^0 de centre *D* et de rayon 2 m.



De la même manière, lorsque la chaîne est tendue le long de *AB*, Charlot est à une distance de 2 m au-delà du point *B*. Il est donc en mesure de marcher vers le mur *BC* de la grange. S'il marche de la sorte en tenant la chaîne tendue, il tracera un arc de cercle de rayon 2 m et de centre *B*. (Seule la partie de la chaîne qui dépasse le point *B* bouge pour balayer un secteur de cercle.) Puisque l'angle extérieur de la grange au point *B* mesure 300^0 (l'angle intérieur au point *B* mesure 60^0), l'angle entre le prolongement de *AB* et le côté *BC* mesure 120^0. Charlot peut donc balayer un secteur de 120^0 de centre *B* et de rayon 2 m.

Un secteur de cercle de θ^0 et de rayon *r* a une aire égale à $\dfrac{\theta}{360}\pi r^2$.

L'aire totale de la région que Charlot peut parcourir est égale à :
$\dfrac{240}{360}\pi(8)^2+\dfrac{60}{360}\pi(2)^2+\dfrac{120}{360}\pi(2)^2$, c'est-à-dire à $\dfrac{2}{3}(64\pi)+\dfrac{1}{6}(4\pi)+\dfrac{1}{3}(4\pi)$ ou $\dfrac{134\pi}{3}$ m^2.

ii) Soit x la distance en mètres de *A* à *P* le long de *AB*.
Puisque la grange a un périmètre de 30 m et que la chaîne a une longueur de 15 m, Charlot peut balayer un certain point le long de la grange en enroulant la chaîne dans le sens des aiguilles d'une montre ou en le faisant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ce point changera de position selon la position du point *P*. Par exemple, si la chaîne est attachée au point *A* (c.-à-d. si $x=0$), Charlot peut balayer le point sur *CB* situé à 3 m de *C* en procédant dans un sens ou dans l'autre. Si la chaîne est attachée au point *B* (c.-à-d. si $x=6$), Charlot peut rejoindre le milieu de *CD* en procédant dans un sens ou dans l'autre. À mesure que le point *P* bouge de *A* vers *B*, le point le plus éloigné que Charlot peut rejoindre, le long de la grange, glisse le long de *BC* jusqu'à *C* et ensuite le long de *CD* en direction de *D*. Si *P* est au milieu de *AB* (c.-à-d. si $x=3$), le point le plus éloigné que Charlot peut rejoindre le long de la grange est le point *C*. Dans notre analyse, il faut donc considérer le cas où x est dans l'intervalle $0\le x\le 3$ et le cas où x est dans l'intervalle $3\le x\le 6$.

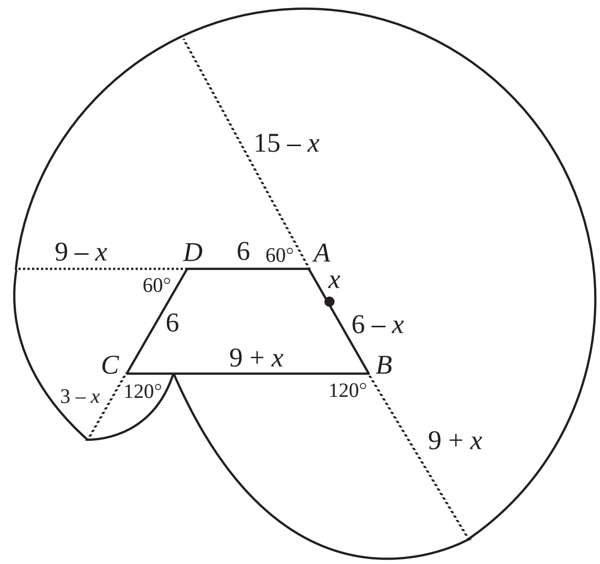
Quelle que soit la valeur de x, Charlot peut balayer un secteur de 180° de rayon 15 m et de centre P.

On considère un mouvement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Quelle que soit la valeur de x, Charlot peut balayer un secteur de rayon $15 - x$ et de centre A (le point A agit comme pivot pour la chaîne).

Quelle que soit la valeur de x, Charlot peut balayer un secteur de 60^0, de rayon $(15 - x) - 6$, ou $9 - x$, et de centre D (le point D agit comme pivot pour la chaîne).

Si $3 \le x \le 6$, alors $9 - x \le 6$ et Charlot ne peut aller au-delà du point C.



Si $0 \le x \le 3$, alors $9 - x \ge 6$ et Charlot peut aller au-delà du point C. Il peut alors balayer un secteur de 120^0, de rayon $(9 - x) - 6$, ou $3 - x$, et de centre C (le point C sert de pivot pour la chaîne).

On considère maintenant un mouvement le sens des aiguilles d'une montre.

Quelle que soit la valeur de x, Charlot peut balayer un secteur de 120^0, de rayon $15 - (6 - x)$, ou $9 + x$, (la distance de B à P est égale à $6 - x$) et de centre B (le point B sert de pivot pour la chaîne).

Si $0 \le x \le 3$, alors $9 + x \le 12$ et Charlot ne peut aller au-delà du point C.

Si $3 \le x \le 6$, alors $9 + x \ge 12$ et Charlot peut aller au-delà du point C. Il peut alors balayer un secteur de 120^0, de rayon $(9 + x) - 12$, ou $x - 3$, et de centre C (le point C sert de pivot pour la chaîne).

On calcule maintenant l'aire totale de la région que Charlot peut rejoindre.

Si $0 \le x \le 3$, cette aire est égale à :

$$\frac{180}{360}\pi 15^2 + \frac{60}{360}\pi(15 - x)^2 + \frac{60}{360}\pi(9 - x)^2 + \frac{120}{360}\pi(3 - x)^2 + \frac{120}{360}\pi(9 + x)^2$$

$$= \frac{1}{2}\pi(225) + \frac{1}{6}\pi\left(225 - 30x + x^2\right) + \frac{1}{6}\pi\left(81 - 18x + x^2\right) + \frac{1}{3}\pi\left(9 - 6x + x^2\right) + \frac{1}{3}\pi\left(81 + 18x + x^2\right)$$

$$= \frac{1}{6}\pi\left(675 + 225 - 30x + x^2 + 81 - 18x + x^2 + 18 - 12x + 2x^2 + 162 + 36x + 2x^2\right)$$

$$= \frac{1}{6}\pi\left(1171 - 24x + 6x^2\right)$$

$$= \pi x^2 - 4\pi x + \frac{387}{2}\pi$$

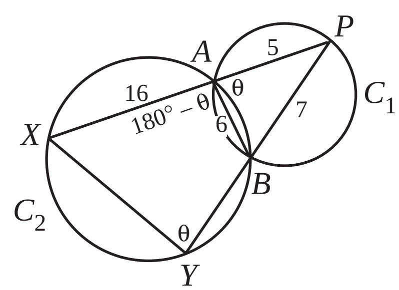
Si $3 \le x \le 6$, l'aire est égale à :

$$\frac{180}{360}\pi 15^2+\frac{60}{360}\pi(15-x)^2+\frac{60}{360}\pi(9-x)^2+\frac{120}{360}\pi(9+x)^2+\frac{120}{360}\pi(x-3)^2$$
$$=\pi x^2-4\pi x+\frac{387}{2}\pi$$

Quelle que soit la valeur de x, l'aire de la région que Charlot peut rejoindre est donnée par l'expression $A=\pi x^2-4\pi x+\frac{387}{2}\pi$. Le graphique de A en fonction de x est une parabole ouverte vers le haut. La valeur minimale de A est obtenue au sommet de la parabole, soit lorsque $x=-\frac{-4\pi}{2(\pi)}$ ou $x=2$. Cette valeur, $x=2$, est située à l'intérieur de l'intervalle permis, $0\le x\le 6$.

La position de P qui restreint Charlot à une région d'aire minimale est située à un point sur le mur entre A et B, à 2 m de A.

3. a) *Solution 1*

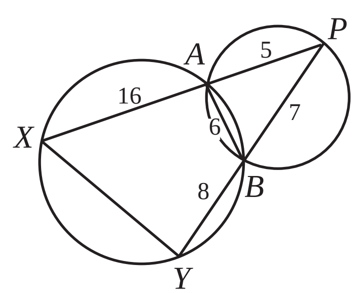


Soit $\angle PAB=\theta°$.
Donc $\angle XAB=180^0-\theta°$. Puisque le quadrilatère $XYBA$ est inscrit dans un cercle, la somme des mesures des angles opposés est égale à 180^0. Donc $\angle XYB=\theta°$.
Les triangles PAB et PYX sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en P et chacun un angle de mesure $\theta°$.
Donc $\frac{XY}{BA}=\frac{PX}{PB}$, d'où $XY=\frac{BA\cdot PX}{PB}$, c'est-à-dire que $XY=\frac{6(5+16)}{7}$ ou $XY=18$.

Solution 2

D'après la loi du cosinus dans le triangle PAB :
$$AB^2=PA^2+PB^2-2(PA)(PB)\cos(\angle APB)$$
$$36=25+49-2(5)(7)\cos(\angle APB)$$
Donc $\cos(\angle APB)=\frac{38}{70}$ ou $\cos(\angle APB)=\frac{19}{35}$.

Puisque PX et PY sont deux sécantes du cercle C_2, menées d'un même point P, on a :



$$PA\cdot PX=PB\cdot PY$$
$$5(5+16)=7(7+BY)$$
$$105=7(7+BY)$$
$$15=7+BY$$
$$BY=8$$

Dans le triangle PXY, on sait que $PX = 21$ et que $PY = 15$ et on connaît le cosinus de l'angle *XPY*, ou *APB*. On peut donc utiliser la loi du cosinus pour déterminer *XY*.

$$XY^2 = PX^2 + PY^2 - 2(PX)(PY)\cos(\angle XPY)$$
$$XY^2 = 441 + 225 - 2(21)(15)\left(\tfrac{19}{35}\right)$$
$$XY^2 = 441 + 225 - 2(3)(3)(19)$$
$$XY^2 = 441 + 225 - 342$$
$$XY^2 = 324$$
$$XY = 18$$

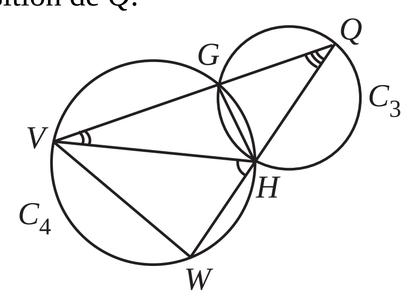
La longueur *XY* est égale à 18.

b) *Solution 1*

Puisque le cercle C_4 est fixe, la longueur *VW* est constante si la mesure de l'angle inscrit VHW, qui intercepte la corde *VW*, ne dépend pas de la position de *Q*.

Or :

$$\angle VHW = 180^0 - \angle VHQ$$
$$= 180^0 - \left(180^0 - \angle GVH - \angle GQH\right)$$
$$= \angle GVH + \angle GQH$$



Puisque la corde *GH* est commune aux deux cercles, sa longueur ne change pas selon la position de *Q*. Les angles inscrits dans un même cercle et qui interceptent la corde *GH* sont donc congrus et leur mesure est constante. Donc les angles GVH et GQH ont chacun une mesure constante qui ne dépend pas de la position de *Q*.

Puisque $\angle VHW = \angle GVH + \angle GQH$, la mesure de l'angle *VHW* est constante.

La longueur *VW* est donc constante.

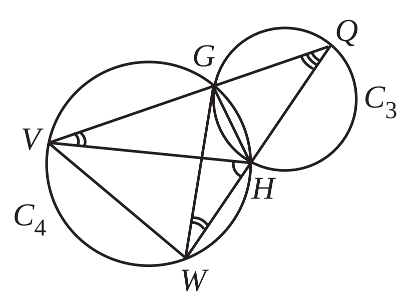
Solution 2

La corde *GH*, qui est commune aux cercles C_3 C_4, a une longueur constante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la position de *Q*.

Dans le cercle C_3, soit $\angle GQH = \alpha$.

Dans le cercle C_4, soit $\angle GVH = \angle GWH = \beta$.

Ces angles ont une mesure constante, puisqu'ils interceptent la corde *GH* de longueur constante.



Donc $\angle VHQ = \angle QGW = 180^0 - (\alpha + \beta)$, d'où $\angle VGW = \angle WHV = \alpha + \beta$.

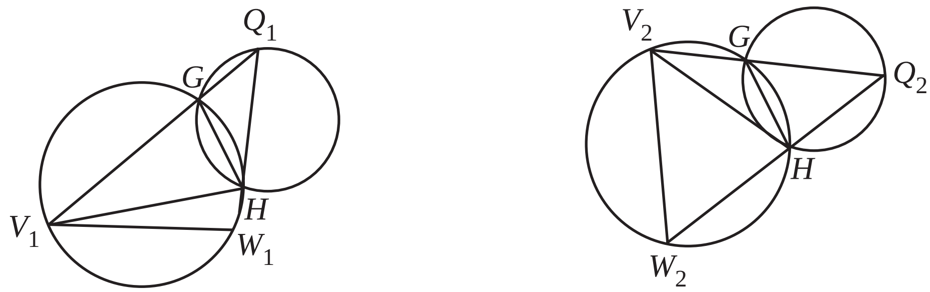
Puisque les angles *VGW* et *WHV* ont une mesure constante, quelle que soit la position de *Q*, alors *VW* est une corde de longueur constante.

Solution 3

On considère deux positions, Q_1 et Q_2, du point *Q*. Ces points fixeront deux positions, V_1W_1 et V_2W_2, du segment *VW*.

Pour montrer que la longueur de *VW* est constante, on doit démontrer que $V_1W_1 = V_2W_2$.

On sait que la position des points *G* et *H* est fixe. La longueur de *GH* est donc constante.



Comme dans la solution 1 de la partie a), les triangles Q_1HG et $Q_1V_1W_1$ sont semblables et les triangles Q_2HG et $Q_2V_2W_2$ sont semblables. (Les deux positions de *Q* jouent le même rôle que *P*, les points *G* et *H* jouent les rôles de *A* et de *B* et les points *V* et *W* jouent les rôles de *X* et de *Y*.)

Puisque les triangles Q_1HG et $Q_1V_1W_1$ sont semblables, $\dfrac{V_1W_1}{HG} = \dfrac{Q_1V_1}{Q_1H}$, d'où $V_1W_1 = HG \cdot \dfrac{Q_1V_1}{Q_1H}$.

Puisque les triangles Q_2HG et $Q_2V_2W_2$ sont semblables, $\dfrac{V_2W_2}{HG} = \dfrac{Q_2V_2}{Q_2H}$, d'où

$V_2W_2 = HG \cdot \dfrac{Q_2V_2}{Q_2H}$.

Puisque la longueur de *HG* est constante, on doit démontrer que $\dfrac{Q_1V_1}{Q_1H} = \dfrac{Q_2V_2}{Q_2H}$ pour démontrer que V_1W_1 et V_2W_2 ont la même longueur.

On joint H à V_1 et à V_2.

Puisque *GH* est une corde de longueur constante, un angle inscrit qui l'intercepte a une mesure constante.

Donc $\angle GQ_1H = \angle GQ_2H$ et $\angle GV_1H = \angle GV_2H$.

Les triangles Q_1HV_1 et Q_2HV_2 sont donc semblables.

Donc $\dfrac{Q_1V_1}{Q_2V_2} = \dfrac{Q_1H}{Q_2H}$ ou $\dfrac{Q_1V_1}{Q_1H} = \dfrac{Q_2V_2}{Q_2H}$.

Donc $V_1W_1 = HG \cdot \dfrac{Q_1V_1}{Q_1H} = HG \cdot \dfrac{Q_2V_2}{Q_2H} = V_2W_2$ et la longueur de *VW* est donc constante.

4. a) *Solution 1*

$$a+b+c=6$$
$$ab+ac+bc=5$$
$$abc=1$$

selon la relation entre les coefficients et les racines de l'équation du troisième degré.
Puisque a, b et c sont les racines de l'équation, on a :

$$a^3-6a^2+5a-1=0$$
$$b^3-6b^2+5b-1=0$$
$$c^3-6c^2+5c-1=0$$

ou

$$\begin{aligned} a^3 &= 6a^2-5a+1 \\ b^3 &= 6b^2-5b+1 \qquad (*) \\ c^3 &= 6c^2-5c+1 \end{aligned}$$

On additionne les trois équations, membre par membre :

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= 6a^2+6b^2+6c^2-5a-5b-5c+3 \\ &= 6\left(a^2+b^2+c^2\right)-5(a+b+c)+3 \end{aligned}$$

On sait que $a+b+c=6$. Si on connaissait aussi la valeur de $a^2+b^2+c^2$, on connaîtrait la valeur de $a^3+b^3+c^3$. Or :

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \\ 6^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \\ a^2+b^2+c^2 &= 36-2(5) \\ a^2+b^2+c^2 &= 26 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= 6\left(a^2+b^2+c^2\right)-5(a+b+c)+3 \\ &= 6(26)-5(6)+3 \\ &= 129 \end{aligned}$$

On considère les équations (*). On multiplie chaque membre de la première par a, chaque membre de la deuxième par b et chaque membre de la troisième par c pour obtenir :

$$\begin{aligned} a^4 &= 6a^3-5a^2+a \\ b^4 &= 6b^3-5b^2+b \qquad (**) \\ c^4 &= 6c^3-5c^2+c \end{aligned}$$

On additionne, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= 6\left(a^3+b^3+c^3\right)-5\left(a^2+b^2+c^2\right)+(a+b+c) \\ &= 6(129)-5(26)+6 \\ &= 650 \end{aligned}$$

On répète la procédure sur les équations de (**) en multipliant chaque de la première par a, chaque membre de la deuxième par b et chaque membre de la troisième par c pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
a^5+b^5+c^5 &= 6\left(a^4+b^4+c^4\right)-5\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\\
&= 6(650)-5(129)+26\\
&= 3281
\end{aligned}
$$

Donc $a^5+b^5+c^5$ est égal à 3281.

Solution 2

Puisque a, b et c sont les racines de l'équation $x^3-6x^2+5x-1=0$, on a

$$
\begin{aligned}
s &= a+b+c & t &= ab+ac+bc & p &= abc\\
&= 6 & &= 5 & &= 1
\end{aligned}
$$

selon la relation entre les coefficients et les racines de l'équation du troisième degré.

On exprimera $a^5+b^5+c^5$ en fonction de s, t et p, ce qui nous permettra de calculer la valeur de $a^5+b^5+c^5$.

Premièrement :

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$a^2+b^2+c^2 = s^2-2t$$

Deuxièmement :

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c) = a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3 &= s\left(s^2-2t\right)-\left[a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\right]\\
&= s\left(s^2-2t\right)-\left[(ab+ac+bc)(a+b+c)-3abc\right]\\
&= s\left(s^2-2t\right)-[ts-3p]\\
&= s^3-3st+3p
\end{aligned}
$$

Troisièmement :

$a^5+b^5+c^5$
$=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left[a^2b^3+a^2c^3+b^2a^3+b^2c^3+c^2a^3+c^2b^3\right]$
$=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left[\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)(a+b+c)-\left(a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2\right)\right]$
$=\left(s^2-2t\right)\left(s^3-3st+3p\right)-\left[\left[(ab+ac+bc)^2-2\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)\right](a+b+c)-abc(ab+ac+bc)\right]$
$=\left(s^2-2t\right)\left(s^3-3st+3p\right)-\left[\left[t^2-2abc(a+b+c)\right]s-pt\right]$
$=\left(s^2-2t\right)\left(s^3-3st+3p\right)-\left[\left[t^2-2ps\right]s-pt\right]$
$=\left(6^2-2(5)\right)\left(6^3-3(6)(5)+3(1)\right)-\left[\left[5^2-2(1)(6)\right](6)-1(5)\right]$
$=(26)(129)-\left[[13](6)-5\right]$
$=3354-[73]$
$=3281$
Donc $a^5+b^5+c^5$ est égal à 3281.

b) On procédera par étapes.

1re étape : Déterminer des valeurs approximatives de a, b et c.
2e étape : Démontrer que $a^n+b^n+c^n$ est un entier pour toutes les valeurs de n.
3e étape : Conclusion

1re étape : Déterminer des valeurs approximatives de a, b et c.

Soit $f(x)=x^3-6x^2+5x-1$.
Si $x<0$, chaque terme du polynôme est négatif. Donc $f(x)=x^3-6x^2+5x-1<0$ pour chaque valeur de x dans cet intervalle.
L'équation $f(x)=0$ n'admet donc aucune racine négative. On voit aussi que 0 n'est pas une racine de l'équation $f(x)=0$. Donc a, b et c sont strictement positifs.
On calcule ensuite quelques valeurs de $f(x)$. On obtient $f(0)=-1$, $f(1)=-1$, $f(2)=-7$, $f(3)=-13$, $f(4)=-13$, $f(5)=-1$ et $f(6)=29$.
Une des racines de l'équation est donc située entre 5 et 6.
Or on a vu, dans la partie a), que $a+b+c=6$. Puisque les racines sont toutes positives, qu'une des racines est supérieure à 5 et que leur somme est égale à 6, les deux autres racines sont inférieures à 1. On a donc $5<c<6$, $0<a<1$ et $0<b<1$.
Puisque $5<c<6$ et que $a+b+c=6$, alors $0<a+b<1$.
On sait aussi que $abc=1$. Puisque $5<c<6$, alors $\frac{1}{6}<ab<\frac{1}{5}$. Puisque a et b sont inférieurs à 1, alors a et b doivent être supérieurs à $\frac{1}{6}$.
Puisque a et b sont supérieurs à $\frac{1}{6}$ et que $0<a+b<1$, alors $\frac{1}{6}<a<\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{6}<b<\frac{5}{6}$.
(On aurait pu procéder de façon moins formelle en calculant $f(0{,}1)=-0{,}559$, $f(0{,}2)=-0{,}232$, $f(0{,}3)=-0{,}013$, $f(0{,}4)=0{,}104$, $f(0{,}5)=0{,}125$, $f(0{,}6)=0{,}056$ et

$f(0,7) = -0{,}097$, pour conclure que a est situé entre 0,3 et 0,4, et que b est situé entre 0,6 et 0,7.)

2^e^ étape : Démontrer que $a^n + b^n + c^n$ est un entier pour toutes les valeurs de n.

Dans la partie a), on a vu que $a^n + b^n + c^n$ est un entier lorsque n est égal à 1, à 2 et à 3.
On considère les équations (*) de la solution 1 de la partie a). On multiplie chaque membre de la 1^re^ équation par a^{n-3}, chaque membre de la 2^e^ par b^{n-3} et chaque membre de la 3^e^ par c^{n-3} pour obtenir :

$$a^n = 6a^{n-1} - 5a^{n-2} + a^{n-3}$$
$$b^n = 6b^{n-1} - 5b^{n-2} + b^{n-3} \qquad (***)$$
$$c^n = 6c^{n-1} - 5c^{n-2} + c^{n-3}$$

On additionne, membre par membre, pour obtenir :

$$a^n + b^n + c^n = 6\left(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}\right) - 5\left(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}\right) + \left(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}\right) \quad (****)$$

pour chaque valeur de n supérieure ou égale à 4.
Posons $n = 4$. Puisque $a^k + b^k + c^k$ est un entier lorsque k est égal à 1, à 2 et à 3, alors $a^4 + b^4 + c^4$ est un entier selon (****).
Posons $n = 5$. Puisque $a^k + b^k + c^k$ est un entier lorsque k est égal à 2, à 3 et à 4, alors $a^5 + b^5 + c^5$ est un entier selon (****).
On peut continuer par récurrence, puisque si $a^k + b^k + c^k$ est un entier lorsque k est égal à $n-3$, à $n-2$ et à $n-1$, alors $a^n + b^n + c^n$ est un entier selon (****).
Donc $a^{2003} + b^{2003} + c^{2003}$ et $a^{2004} + b^{2004} + c^{2004}$ sont des entiers.
Posons $a^{2003} + b^{2003} + c^{2003} = M$ et $a^{2004} + b^{2004} + c^{2004} = N$.

3^e^ étape : Conclusion

Puisque a et b sont situés entre 0 et 1, alors $a^{2003} > a^{2004}$ et $b^{2003} > b^{2004}$, d'où $a^{2003} + b^{2003} > a^{2004} + b^{2004}$.
Puisque a est inférieur à $\frac{5}{6}$, alors a est inférieur à 0,9. Donc $a^2 < 0{,}81$, $a^4 < (0{,}81)^2 < 0{,}7$, $a^8 < (0{,}7)^2 < 0{,}5$ et $a^{16} < (0{,}5)^2 = 0{,}25$.
De même, puisque b est inférieur à $\frac{5}{6}$, alors $b^{16} < 0{,}25$.
Donc $a^{16} + b^{16} < 0{,}5$. Puisque a et b sont inférieurs à 1, alors $a^{2004} + b^{2004} < a^{2003} + b^{2003} < a^{16} + b^{16} < 0{,}5$.
Puisque $c^{2003} = M - \left(a^{2003} + b^{2003}\right)$ et $a^{2003} + b^{2003} < 0{,}5$, alors l'entier le plus près de c^{2003} est M et la distance entre eux est égale à $a^{2003} + b^{2003}$. De même, l'entier le plus près de c^{2004} est N et la distance entre eux est égale à $a^{2004} + b^{2004}$.
Or $a^{2004} + b^{2004} < a^{2003} + b^{2003}$. Donc c^{2004} est plus près de N que c^{2003} ne l'est de M, ce qu'il fallait démontrer.