La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Défi ouvert canadien de mathématiques

Le mercredi 26 novembre 2003

Durée : 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice N'EST PAS permis.

Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A
Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la réponse correcte dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B
Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUE : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

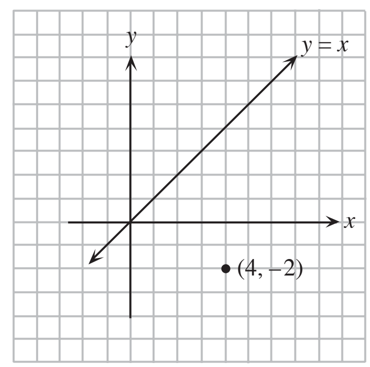
Défi ouvert canadien de mathématiques

Remarques :	1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.
	4. L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** permis.

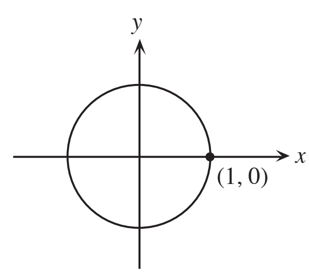
PARTIE A

1. Julie, Gilles et Isabelle ont le même anniversaire de naissance. Gilles a un an de plus que Julie et Isabelle a deux ans de plus que Gilles. Cette année, la somme de leur âge est égale à 118 ans. Quel est l'âge de Gilles?

2. Le point $(4,-2)$ est réfléchi dans l'axe des abscisses. L'image obtenue est réfléchie dans la droite d'équation $y=x$. Quelles sont les coordonnées de l'image finale?

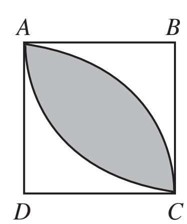


3. On considère un cercle de rayon 1 et de centre à l'origine. Deux particules partent au même instant du point $(1,0)$ et tournent autour du cercle en sens opposés. Une particule tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à une vitesse constante v, tandis que l'autre tourne dans le sens des aiguilles d'une montre à une vitesse constante $3v$. Après avoir quitté le point $(1,0)$, les deux particules se rencontrent une première fois au point P et elles se rencontrent une deuxième fois au point Q. Déterminer les coordonnées du point Q.



4. On choisit au hasard deux nombres *différents* de l'ensemble $\{0,1,2,3,4\}$. Quelle est la probabilité pour que leur somme soit plus grande que leur produit?

5. Dans le diagramme, le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 6. Les arcs de cercles de rayon 6 ont pour centres respectifs B et D. Quelle est l'aire de la région ombrée?



6. L'expression $\lfloor a \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à a.
Par exemple, on a $\lfloor 5{,}7 \rfloor = 5$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$ et $\lfloor -4{,}2 \rfloor = -5$.
Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$.

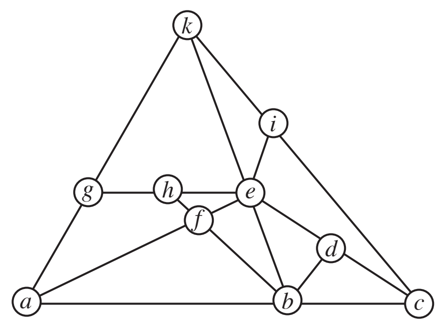
7. Chacun des points $P(4, 1)$, $Q(7, -8)$ et $R(10, 1)$ est le milieu d'un rayon du cercle C. Déterminer la longueur du rayon du cercle C.

8. Déterminer le nombre de triplets (k, l, m) d'entiers strictement positifs tels que :

$$k + l + m = 97$$
$$\frac{4k}{5} + \frac{5l}{6} + \frac{6m}{7} = 82$$

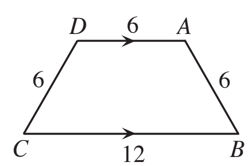
PARTIE B

1. On doit placer des entiers non négatifs dans les cercles du diagramme de manière que, pour chacune des dix droites, la somme des nombres dans ses cercles soit égale à 15. Par exemple, $a + g + k = 15$ et $e + i = 15$.



   a) Si $k = 2$ et $e = 5$, placer les entiers non négatifs appropriés dans les autres cercles du diagramme.
   b) Supposons que $k = 2$ et que la valeur de e est inconnue.
      i) Exprimer b et c en fonction de e. Comme explication, il suffit de présenter un diagramme bien étiqueté.
      ii) Démontrer que e doit être égal à 5.
   c) Supposons maintenant que $k = x$, x étant une inconnue. Démontrer que e doit encore être égal à 5.

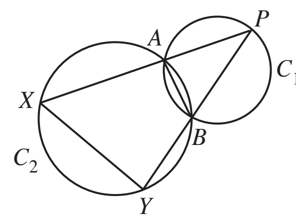
2. La fondation d'une grange a la forme d'un trapèze ayant trois côtés de 6 m et un côté de 12 m, comme dans le diagramme.



   a) Déterminer la mesure de chacun des angles intérieurs du trapèze.
   b) Charlot le lama est attaché par une chaîne à un point sur le mur extérieur de la grange. Charlot est plus astucieux que le lama moyen. Il sait qu'il lui est possible de se rendre à n'importe quel endroit à l'intérieur de la région délimitée par sa chaîne lorsqu'elle est complètement étendue.
      i) Si la chaîne est attachée au point A et qu'elle a une longueur de 8 m, quelle est l'aire de la région que Charlot peut parcourir?
      ii) Si la chaîne est attachée à un point P sur le mur entre A et B et qu'elle a une longueur de 15 m, déterminer la position de P qui restreint Charlot à une région d'aire *minimale*.

... à suivre

3. a) Deux cercles, C_1 et C_2, ont une corde commune AB. Un point P est choisi sur C_1 de manière qu'il soit à l'extérieur de C_2. Les segments PA et PB sont prolongés de manière à couper C_2 aux points respectifs X et Y. Si $AB = 6$, $PA = 5$, $PB = 7$ et $AX = 16$, déterminer la longueur XY.



b) Deux cercles C_3 et C_4 ont une corde commune GH. Un point Q est choisi sur C_3 de manière qu'il soit à l'extérieur de C_4. Les segments QG et QH sont prolongés de manière à couper C_4 aux points respectifs V et W. Démontrer que peu importe la position choisie pour Q, la longueur VW est constante.

4. L'équation algébrique $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ admet trois racines réelles a, b et c.

a) Déterminer la valeur de $a^5 + b^5 + c^5$.

b) Si $a < b < c$, démontrer que la distance, sur la droite numérique, entre c^{2004} et son entier le plus près est inférieure à la distance entre c^{2003} et son entier le plus près.