La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

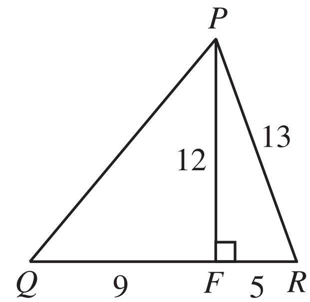
Défi ouvert canadien de mathématiques

Le mercredi 27 novembre 2002

Solutions

Partie A

1. Selon le théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle PFR, $PF^2 = 13^2 - 5^2$, d'où $PF = 12$.
   Selon le théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle PFQ, $PQ^2 = 9^2 + 12^2$, d'où $PQ = 15$.
   Les côtés du triangle PQR ont pour longueurs 13, 14 et 15. Le triangle a donc un périmètre de 42.



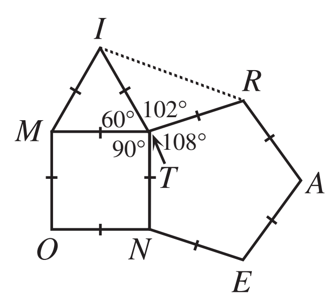
2. *Solution 1*

$$\begin{aligned} x^2 + 5xy + y^2 &= x^2 + 2xy + y^2 + 3xy \\ &= (x+y)^2 + 3xy \\ &= 4^2 + 3(-12) \\ &= -20 \end{aligned}$$

   Solution 2
   Par observation, on voit que $x = 6$ et $y = -2$ forment une solution des deux équations données.
   Donc $x^2 + 5xy + y^2 = 6^2 + 5(6)(-2) + (-2)^2$, ou –20.

   Solution 3
   On isole x dans la première équation et on reporte x dans la deuxième.
   D'après la première équation, $x = 4 - y$.
   On reporte $x = 4 - y$ dans la deuxième équation pour obtenir $(4 - y)y = -12$, ou $0 = y^2 - 4y - 12$.
   On factorise pour obtenir $0 = (y-6)(y+2)$, d'où $y = 6$ ou $y = -2$. Les valeurs correspondantes de x sont $x = -2$ et $x = 6$. On continue comme dans la solution 2 pour obtenir $x^2 + 5xy + y^2 = -20$.

3. Pour déterminer la mesure de l'angle TIR, on observe les angles autour du point T.
   On sait que $\angle ITR + \angle RTN + \angle NTM + \angle MTI = 360^\circ$.
   Puisque le triangle MIT est équilatéral, $\angle MTI = 60^\circ$.
   Puisque $MONT$ est un carré, $\angle NTM = 90^\circ$.
   Puisque $ENTRA$ est un pentagone régulier, $\angle RTN = \frac{1}{5}(540^\circ)$, ou 108°.



   Donc :

$$\begin{aligned}\angle ITR &= 360^\circ - \angle RTN - \angle NTM - \angle MTI \\ &= 360^\circ - 108^\circ - 90^\circ - 60^\circ \\ &= 102^\circ\end{aligned}$$

Puisque le triangle MIT est équilatéral, que $MONT$ est un carré et que $ENTRA$ est un pentagone régulier, leurs côtés doivent avoir la même longueur, car MIT et $MONT$ ont un côté commun et $MONT$ et $ENTRA$ ont un côté commun. On a donc $TI = TR$.
Le triangle TIR est donc isocèle et les angles TIR et TRI sont donc congrus. On a donc $\angle TIR + \angle TRI = 180° - 102°$, ou 78°. Donc $\angle TIR = 39°$.

4. *Solution 1*
La somme des 3e, 4e et 5e termes de la suite est égale à la somme des cinq premiers termes moins la somme des deux premiers.
Cette somme est donc égale à $\left[5(5)^2 + 6(5)\right] - \left[5(2)^2 + 6(2)\right]$, ce qui donne $155 - 32$, ou 123.

Solution 2
On détermine chacun des cinq premiers termes, puis on additionne les 3e, 4e et 5e termes.
D'après la formule, la « somme » du premier terme est égale à 11.
Le premier terme est donc 11.
D'après la formule, la somme des 2 premiers termes est égale à 32. Puisque le premier terme est 11, le deuxième est 21.
D'après la formule, la somme des 3 premiers termes est égale à 63. Puisque les deux premiers termes sont 11 et 21, le troisième est 31. (On aurait pu utiliser la *somme* des deux premiers termes pour déterminer le troisième.)
De la même façon, la somme des 4 premiers termes est égale à 104 et le 4e terme est 41.
Enfin, la somme des 5 premiers termes est 155 et le 5e terme est 51.
La somme des 3e, 4e et 5e termes est égale à $31 + 41 + 51$, ou 123.

Solution 3
Puisque la formule pour la somme des *n* premiers termes est un polynôme du second degré, la différence entre les termes consécutifs de la suite est constante. La suite est donc arithmétique.
La somme des 3e, 4e et 5e termes est donc égale à trois fois le 4e terme.
Le 4e terme est égal à la somme des quatre premiers termes moins la somme des trois premiers. Il est donc égal à $104 - 63$, ou 41.
La somme des 3e, 4e et 5e termes est donc égale à 3×41, ou 123.

5. *Solution 1*

Puisque la valeur numérique de l'expression est la même pour chaque entier strictement positif a, on peut déterminer cette valeur en reportant $a=1$ dans la formule.

Donc $\dfrac{[(2a-1)\nabla(2a+1)]}{[(a-1)\nabla(a+1)]}=\dfrac{[1\nabla 3]}{[0\nabla 2]}$, d'où $\dfrac{[(2a-1)\nabla(2a+1)]}{[(a-1)\nabla(a+1)]}=\dfrac{1+2+3}{0+1+2}$, ou 2.

L'expression a donc une valeur de 2.

Solution 2

Puisque a est un entier, le seul entier entre $2a-1$ et $2a+1$ est $2a$. De même, le seul entier entre $a-1$ et $a+1$ est a.

Donc $\dfrac{[(2a-1)\nabla(2a+1)]}{[(a-1)\nabla(a+1)]}=\dfrac{(2a-1)+2a+(2a+1)}{(a-1)+a+(a+1)}$, d'où $\dfrac{[(2a-1)\nabla(2a+1)]}{[(a-1)\nabla(a+1)]}=\dfrac{6a}{3a}$, ou 2.

L'expression a donc une valeur de 2.

6. Comme l'indique le diagramme, soit U et W les extrémités des miroirs.

Puisque le trajet SA du rayon lumineux est parallèle au miroir WV, on a $\angle UAS = 30^\circ$.

Puisqu'un angle de réflexion et un angle d'incidence sont congrus, le rayon lumineux réfléchi forme aussi un angle de 30° avec le miroir UV.

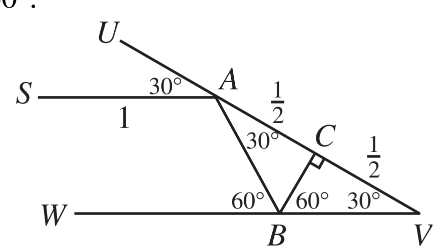
Soit B le point où le rayon lumineux réfléchi frappe le miroir WV.

Puisque $\angle VAB = \angle AVB = 30^\circ$, l'angle d'incidence ABW mesure 60°, car il est un angle extérieur du triangle ABV. (On aurait pu utiliser le fait que $\angle SAB = 120^\circ$ et que SA est parallèle à WV.)

Donc l'angle de réflexion, au point B, mesure aussi 60°.

Soit C le point où le rayon lumineux réfléchi frappe le miroir UV. Puisque $\angle CVB = 30^\circ$ et $\angle VBC = 60^\circ$, alors $\angle BCV = 90^\circ$. Le rayon lumineux est donc renvoyé, par des réflexions, du point C au point S.

La distance que l'on cherche est donc égale à $2(SA+AB+BC)$.



Or $SA = AV = 1$. Puisque le triangle ABV est isocèle et que BC est une hauteur du triangle, alors $AC = CV = \frac{1}{2}$ et on a donc $BC = \frac{1}{\sqrt{3}}(AC)$, ou $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, et $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}(AC)$, ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc $2(SA+AB+BC) = 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, d'où $2(SA+AB+BC) = 2+\frac{3}{\sqrt{3}}$, ou $2+\sqrt{3}$.

La distance totale parcourue par le rayon lumineux est égale à $\left(2+\sqrt{3}\right)$ m, ou environ 3,73 m.

7. *Solution 1*

Puisque P est construit en plaçant un 1 à l'extrémité droite de N, alors $P = 10N + 1$.
Puisque Q est construit en plaçant un 1 à l'extrémité gauche des cinq chiffres de N, alors $Q = 100\,000 + N$.
Puisque $P = 3Q$, on a :

$$\begin{aligned} 10N + 1 &= 3(100\,000 + N) \\ 10N + 1 &= 300\,000 + 3N \\ 7N &= 299\,999 \\ N &= 42\,857 \end{aligned}$$

Donc N est égal à $42\,857$.

Solution 2

Soit $abcde$ l'écriture décimale de N. Puisque $P = 3Q$, on a $abcde1 = 3(1abcde)$.
Puisque le chiffre des unités du membre de gauche est 1, celui du membre de droite est 1 et on doit donc avoir $e = 7$.
On a donc $abcd71 = 3(1abcd7)$. Puisque le chiffre des dizaines du membre de gauche est 7 et que l'on a une retenue de 2 en multipliant le 7 du membre de droite par 3, alors le chiffre des unités du produit $3 \times d$ est un 5. Donc $d = 5$.
On a donc $abc571 = 3(1abc57)$. Puisque le chiffre des centaines du membre de gauche est 5 et que l'on a une retenue de 1 en multipliant les deux derniers chiffres du membre de droite par 3, alors le chiffre des unités du produit $3 \times c$ est un 4. Donc $c = 8$.
On a donc $ab8571 = 3(1ab857)$. De la même façon, on obtient $b = 2$ et $a = 4$.
Donc N est égal à $42\,857$.

8. L'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 999, 1000\}$ contient 1000 nombres. De plus, la probabilité pour qu'un nombre x, choisi au hasard, soit un diviseur de M est égale à $\frac{1}{100}$. M doit donc admettre 10 diviseurs de 1 à 1000.
Puisque $M \leq 1000$, alors M admet exactement 10 diviseurs positifs.
Donc M doit être de la forme p^9, p étant un nombre premier, ou de la forme p^4q, p et q étant des nombres premiers.
(On se rappellera que pour déterminer le nombre de diviseurs positifs d'un nombre M, on écrit M en factorisation première. On choisit chaque exposant, auquel on ajoute 1, puis on calcule le produit de ces nombres. Par exemple, si $M = 48$, on a $M = 2^4 \cdot 3$. Le nombre de diviseurs positifs de M est alors égal à $(4+1)(1+1)$, ou 10.)
On doit maintenant déterminer la valeur maximale d'un nombre M représenté par chacune de ces deux formes.

1^er^ cas : $M = p^9$

Puisque $M \leq 1000$, alors $p = 2$, d'où $M = 512$. (Si $p = 3$, alors $p^9 = 19\,683$ serait trop grand.)

2^e^ cas : $M = p^4 q$

Puisque $M \leq 1000$ et que $5^4 = 625$, on doit avoir $p = 2$ ou $p = 3$.
Si $p = 2$, alors le plus grand nombre premier q pour lequel $M \leq 1000$ est 61, ce qui donne $M = 16 \times 61$, ou 976.
Si $p = 3$, alors le plus grand nombre premier q pour lequel $M \leq 1000$ est 11, ce qui donne $M = 81 \times 11$, ou 891.
La plus grande valeur possible de M est donc 976.

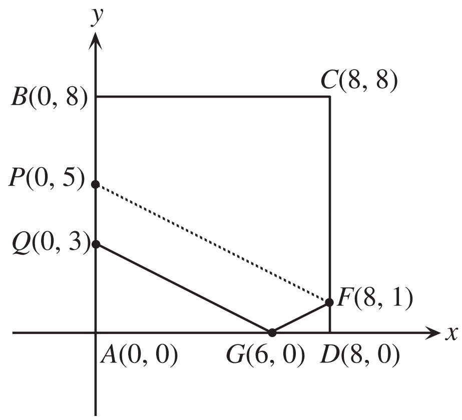
Partie B

1. a) La pente de la droite qui passe par P et F est $\dfrac{5-1}{0-8}$, ou $-\frac{1}{2}$.

La droite qui nous intéresse a donc, elle aussi, une pente de $-\frac{1}{2}$.

Puisque cette droite passe par le point Q, qui est situé sur l'axe des y, la droite a une ordonnée à l'origine de 3.
L'équation de la droite est donc $y=-\frac{1}{2}x+3$.

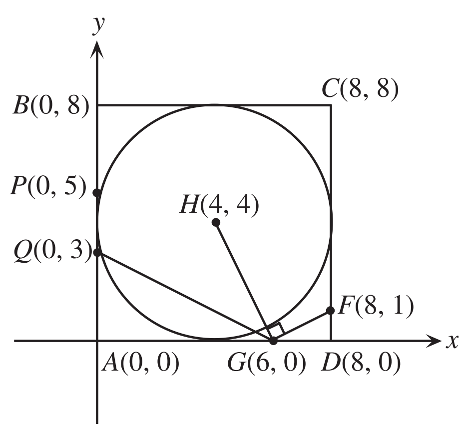
b) Puisque le segment AD est situé sur l'axe des x, l'abscisse du point G doit être l'abscisse à l'origine de la droite de la partie a). Posons $y=0$ dans l'équation de a). On obtient $0=-\frac{1}{2}x+3$, d'où $x=6$.



On cherche donc l'équation de la droite qui passe par les points $G(6,0)$ et $F(8,1)$. Sa pente est donc égale à $\dfrac{1-0}{8-6}$, ou $\frac{1}{2}$, et son équation est $y-0=\frac{1}{2}(x-6)$, ou $y=\frac{1}{2}x-3$.

c) Le segment FG a une pente de $\frac{1}{2}$. Donc une droite qui est perpendiculaire à FG a une pente de -2, puisque le produit des pentes égale -1.
Puisque la droite qui nous intéresse passe par le point $H(4,4)$, son équation est $y-4=-2(x-4)$, ou $y=-2x+12$.

d) Le cercle a pour centre $H(4,4)$. Puisqu'il est tangent aux quatre côtés du carré, il a un rayon de 4 unités.
Ce cercle coupe-t-il la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-3$, c'est-à-dire la droite qui passe par les points F et G?



On calcule la distance entre le centre du cercle et la droite, pour déterminer si cette distance est inférieure ou supérieure à 4, le rayon du cercle. Cette distance est calculée perpendiculairement à la droite. Or on a déjà déterminé l'équation, $y=-2x+12$, de la droite qui passe par H et qui est perpendiculaire à la droite FG. Pour déterminer le point d'intersection de ces deux droites, posons :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x-3&=-2x+12\\ \tfrac{5}{2}x&=15\\ x&=6 \end{aligned}$$

Les droites se coupent donc au point $G(6,0)$. La distance du centre H jusqu'à la droite FG est donc égale à la distance de H à G, c'est-à-dire $\sqrt{(6-4)^2+(4-0)^2}$, ou $\sqrt{20}$.
Cette distance est plus grande que le rayon du cercle, 4.
Le cercle ne coupe donc pas la droite qui passe par F et G.

2. a) Puisque le produit $(2A5)(13B)$ est divisible par 36, il est divisible par 4 et par 9. Puisque $2A5$ est impair, 2 n'est pas un de ses diviseurs
Donc $13B$ est divisible par 4.
Pour qu'un entier soit divisible par 4, le nombre formé par ses deux derniers chiffres doit être divisible par 4. Donc. $3B$ doit être divisible par 4, d'où $B=2$ ou $B=6$.

1^er^ cas : $B=2$
Dans ce cas, 132 est divisible par 3, mais pas par 9. Pour que le produit soit divisible par 9, il faut donc que $2A5$ soit divisible par 3.
Pour qu'un entier soit divisible par 3, la somme de ses chiffres doit être divisible par 3.
Donc $2+A+5$, ou $A+7$, est divisible par 3.
Donc $A=2$, $A=5$ ou $A=8$.

2^e^ cas : $B=6$
Dans ce cas, le nombre 136 n'est pas divisible par 3. Pour que le produit soit divisible par 9, il faut que $2A5$ soit divisible par 9.
Pour qu'un entier soit divisible par 9, il faut que la somme de ses chiffres soit divisible par 9. Donc $2+A+5$, ou $A+7$, est divisible par 9. Donc $A=2$.

Les quatre couples (A,B) possibles sont $(2,2)$, $(5,2)$, $(8,2)$ et $(2,6)$.

b) i) Puisque $10a+b=7m$, alors $b=7m-10a$.
Donc $a-2b=a-2(7m-10a)$, d'où $a-2b=21a-14m$, ou $a-2b=7(3a-2m)$.
Puisque $3a-2m$ est un entier, alors $a-2b$ est un multiple de 7.

ii) *Solution 1*
Si $5c+4d$ est un multiple de 7, alors $5c+4d=7k$ pour un entier quelconque k.
Donc $d=\tfrac{1}{4}(7k-5c)$.
Donc $4c-d=4c-\frac{1}{4}(7k-5c)$, d'où $4c-d=\frac{1}{4}(21c-7k)$, ou
$4c-d=\dfrac{7(3c-k)}{4}$.

Puisque $4c-d$ est un entier, $7(3c-k)$ doit être divisible par 4. Or 4 et 7 n'admettent aucun diviseur commun. Donc 4 doit être un diviseur de $3c-k$.
Donc $\dfrac{3c-k}{4}$ est un entier.
Donc $4c-d=7\left(\dfrac{3c-k}{4}\right)$ et $4c-d$ est donc un multiple de 7.

Solution 2
On remarque que $4c-d=(14c+7d)-2(5c+4d)$.
Puisque chacun des deux termes du membre de droite est un multiple de 7, $4c-d$ est aussi un multiple de 7.

Solution 3
Si on multiplie l'expression $4c-d$ par 5, ou bien les expressions $4c-d$ et $20c-5d$ seront toutes deux des multiples de 7 ou elles ne le seront pas toutes les deux.
Donc en déterminant si $20c-5d$ est un multiple de 7, on détermine en même temps si $4c-d$ est un multiple de 7.
Puisque $5c+4d=7t$ pour un entier quelconque *t*, alors $4(5c+4d)=28t$, d'où $20c=28t-16d$.
On considère l'expression $20c-5d$. On a :

$$\begin{aligned} 20c-5d &= (28t-16d)-5d \\ &= 28t-21d \\ &= 7(4t-3d) \end{aligned}$$

Puisque $20c-5d$ est un multiple de 7, alors $4c-d$ est un multiple de 7.

3. a) Il y a deux cas possibles. Alphonse peut enlever une ou deux billes du bol.
S'il enlève une bille, Béatrice peut en enlever deux et Carla peut en enlever une. Alphonse est perdant puisqu'il doit enlever la dernière bille. (Béatrice et Carla peuvent se mettre d'accord sur la stratégie au début de la partie.)
Si Alphonse enlève deux billes, Béatrice et Carla peuvent en enlever chacune une et Alphonse est perdant.
Donc Béatrice et Carla peuvent travailler ensemble pour s'assurer qu' Alphonse perde.

b) *Solution 1*
Béatrice et Carla peuvent enlever un total de 2, 3 ou 4 billes lors de leurs deux choix consécutifs. Alphonse peut enlever 1 ou 2 billes. Si elles le voulaient, Béatrice et Carla pourraient toujours s'assurer que les nombres consécutifs de billes enlevées par les trois joueurs donnent un total de 4 ou 5 billes. (Elles ne pourraient pas s'assurer d'un total de 3 ou de 6 à cause des choix possibles d' Alphonse.)

Si N représente un nombre de billes pour lequel Béatrice et Carla peuvent s'assurer qu' Alphonse perde, alors $N+4$ et $N+5$ représentent aussi de tels nombres, car elles peuvent s'assurer qu'après une ronde de jeu, il restera N billes dans le bol.

D'après la partie a), on sait que 5 est un nombre perdant pour Alphonse. De plus, 1 est un nombre perdant pour lui. D'après le paragraphe précédent, puisque 1 est un nombre perdant, 5 et 6 sont des nombres perdants.

Puisque 5 et 6 sont des nombres perdants, alors 9, 10 et 11 le sont aussi, de même que 13, 14, 15 et 16. En ajoutant 4 à chacun de ces nombres et en continuant de la sorte, on voit que N est un nombre perdant pour Alphonse pour tout N supérieur ou égal à 13.

Il reste à examiner les autres possibilités, c'est-à-dire les nombres 2, 3, 4, 7, 8 et 12.
Si $N=2$ ou $N=3$, Alphonse peut enlever 1 bille et Béatrice ou Carla est forcée d'enlever la dernière bille. Ces nombres sont donc des nombres gagnants pour Alphonse.
Si $N=4$, Alphonse peut enlever 2 billes et Béatrice ou Carla est forcée d'enlever la dernière bille. Il s'agit donc d'un nombre gagnant pour Alphonse.

On remarque que lorsqu' Alphonse enlève 1 bille, le total de billes enlevées dans cette ronde peut égaler 3, 4 ou 5, selon la stratégie choisie par Béatrice et Carla. Lorsqu'il enlève 2 billes, le total de billes enlevées dans cette ronde peut égaler 4, 5 ou 6, selon la stratégie choisie par Béatrice et Carla.
Donc si $N=7$, Alphonse peut enlever 1 bille et s'assurer qu'à son prochain tour il recevra 2, 3 ou 4 billes, ce qui lui assure des positions gagnantes. Donc 7 est un nombre gagnant.
Si $N=8$, Alphonse peut enlever 2 billes et s'assurer qu'à son prochain tour, il recevra 2, 3 ou 4 billes, ce qui lui assure des positions gagnantes. Donc 8 est un nombre gagnant.

Il reste $N=12$.
Si Alphonse enlève 1 bille, Béatrice et Carla peuvent enlever chacune 1 bille et laisser 9 billes pour Alphonse. Il s'agit d'un nombre perdant pour Alphonse.
Si Alphonse enlève 2 billes, Béatrice et Carla peuvent enlever chacune 2 billes et laisser 6 billes pour Alphonse. Il s'agit d'un nombre perdant pour Alphonse.
Donc 12 est un nombre perdant pour Alphonse.

Les valeurs de N pour lesquelles Béatrice et Carla peuvent travailler ensemble pour s'assurer qu' Alphonse perde sont 1, 5, 6, ainsi que toutes les valeurs de N pour lesquelles $N \geq 9$.

Solution 2
On remarque que si Alphonse enlève 1 bille, le nombre total de billes enlevées dans cette ronde sera égal à 3, 4 ou 5, selon la stratégie choisie par Béatrice et Carla. S'il enlève 2 billes, le nombre total de billes enlevées dans une ronde sera égal à 4, 5 ou 6, selon la stratégie choisie par Béatrice et Carla.

On dira qu'un nombre est perdant si, devant ce nombre de billes, Alphonse peut être forcé à perdre. Un nombre est gagnant si, devant ce nombre de billes, Alphonse peut s'assurer d'une victoire.

D'après la partie a), 5 est un nombre perdant. De plus, 1 est un nombre perdant.
Si $N = 2$ ou $N = 3$, Alphonse peut enlever une bille et Béatrice ou Carla devra enlever la dernière bille. Ces nombres sont donc gagnants.
Si $N = 4$, Alphonse peut enlever 2 billes et Béatrice ou Carla devra enlever la dernière bille. Il s'agit donc d'un nombre gagnant.

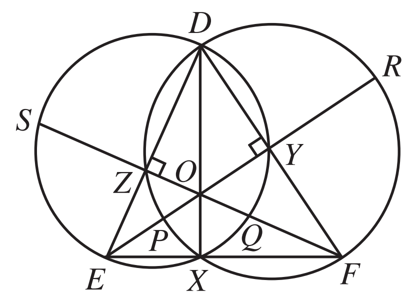
Comment peut-on s'assurer qu'un nombre N, où $N \geq 6$, est un nombre perdant?
N sera un nombre perdant si un des nombres $N-3$, $N-4$ et $N-5$ est perdant *et* si un des nombres $N-4$, $N-5$ et $N-6$ est perdant. (Si Alphonse enlève une bille, alors Béatrice et Carla, qui peuvent assurer un nombre total de 3, 4 ou 5 billes dans la ronde, peuvent laisser le nombre perdant de billes pour Alphonse parmi les nombres $N-3$, $N-4$ et $N-5$. De même, si Alphonse enlève deux billes, alors Béatrice et Carla peuvent laisser le nombre perdant de billes pour Alphonse parmi les nombres $N-4$, $N-5$ et $N-6$.)

À l'aide de ce critère, on vérifie si les nombres suivants sont perdants.
$N = 6$: Il est perdant, puisque $N-5$, ou 1, est perdant dans chaque groupe de trois.
$N = 7$: Il n'est pas perdant, puisque $N-3$, $N-4$ et $N-5$ (c.-à-d. 4, 3 et 2) sont gagnants.
$N = 8$: Il n'est pas perdant, puisque $N-4$, $N-5$ et $N-6$ (c.-à-d. 4, 3 et 2) sont gagnants.
$N = 9$: Il est perdant, puisque $N-4$, ou 5, est perdant dans chaque groupe de trois.
$N = 10$: Il est perdant, puisque $N-5$, ou 5, est perdant dans chaque groupe de trois.
$N = 11$: Il est perdant, puisque $N-5$, ou 6, est perdant dans chaque groupe de trois.
$N = 12$: Il est perdant, puisque $N-3$ et $N-6$ (c.-à-d. 9 et 6) sont perdants.

On a donc obtenu 4 nombres perdants consécutifs. Ceci nous assure que tout nombre N, à partir de 13, sera perdant, car le nombre $N-4$ sera perdant dans chaque groupe de trois.

Les valeurs de N pour lesquelles Béatrice et Carla peuvent travailler ensemble pour s'assurer qu' Alphonse perde sont 1, 5, 6, et tous les entiers N pour lesquels $N \geq 9$.

4. *Solution 1*



On trace les hauteurs prolongées ER et FS.
Soit O le point d'intersection de EY et de FZ.
Puisque EY et FZ sont des hauteurs du triangle DEF, la troisième hauteur, DX, passe donc par le point O, qui est l'orthocentre du triangle DEF.
Puisque DX est une hauteur, $\angle DXE = 90^{\circ}$. Puisque le cercle C_2 a pour diamètre DE, le point X doit être situé sur le cercle C_2.

De même, le point X est situé sur le cercle C_1.
Donc DX est une corde du cercle C_1 et du cercle C_2.
D'après le théorème des cordes :
$SO \cdot OQ = DO \cdot OX$ (d'après le cercle C_2)
$RO \cdot OP = DO \cdot OX$ (d'après le cercle C_1)
Donc $SO \cdot OQ = RO \cdot OP$.

Comment peut-on conclure que P, Q, R et S sont situés sur un même cercle?
On peut écrire l'égalité sous la forme $\frac{SO}{OP} = \frac{RO}{OQ}$, ce qui démontre que les triangles SOP et ROQ sont semblables. Donc $\angle PSQ = \angle PRQ$.
Soit le cercle passant par les points P, Q et R. Puisque les angles PRQ et PSQ sont congrus, le point S, lui aussi, est situé sur ce cercle.
Donc les points P, Q, R et S sont situés sur un même cercle.

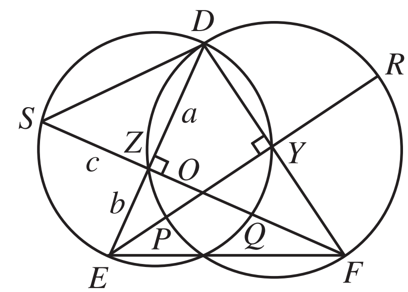
Solution 2

Pour démontrer que les quatre points sont situés sur un même cercle, on démontrera que les points sont équidistants d'un cinquième point, soit le centre du cercle en question.
On considère d'abord les points Q et S. Tous les points équidistants de Q et de S sont situés sur la médiatrice du segment QS. Puisque Q et S sont tous les deux situés sur le cercle C_2, que DE est un diamètre de C_2, et que QS est perpendiculaire à DE (puisqu'ils sont situés sur la hauteur du triangle), alors la droite DE est la médiatrice de QS.

De même, la droite DF est la médiatrice de PR.
Donc un point qui est équidistant des quatre points P, Q, R et S doit être situé sur les médiatrices DE et DF. Il faut donc que ce soit le point D. (Puisque D est sur la médiatrice DE de QS, alors $DS = DQ$. Puisque D est sur la médiatrice DF de PR, alors $DP = DR$.)

Si on réussit à démontrer que $DS = DR$, la démonstration sera complète.

Méthode 1



Soit $SZ = c$, $DZ = a$ et $EZ = b$.
On a $DS^2 = DZ^2 + SZ^2$ (théorème de Pythagore), ou $DS^2 = a^2 + c^2$.
On considère le triangle DSE. Puisque DE est un diamètre du cercle C_2, alors $\angle DSE = 90^\circ$. Les triangles DSZ et SEZ sont donc semblables, d'où $\dfrac{DZ}{SZ} = \dfrac{SZ}{EZ}$, ou $c^2 = ab$.
Donc $DS^2 = a^2 + ab$, ou $DS^2 = a(a+b)$, d'où $DS^2 = DZ \cdot DE$.
De même, au moyen du triangle DRF, on obtient $DR^2 = DY \cdot DF$.

On considère les points E, Z, Y et F. Puisque $\angle EZF = \angle EYF = 90^\circ$, alors les points Y, Z, E et F doivent être situés sur un cercle de diamètre EF.
Donc DE et DF sont des sécantes de ce cercle, le coupant aux points respectifs Z et Y.
D'après le théorème des sécantes, $DZ \cdot DE = DY \cdot DF$.
D'après ce résultat et les deux résultats précédents, on a $DS^2 = DR^2$, ou $DS = DR$.
Donc $DP = DQ = DR = DS$.

Méthode 2

Comme précédemment, on a $DS^2 = a^2 + ab$, ou $DS^2 = a(a+b)$, d'où $DS^2 = DZ \cdot DE$.
Puisque $\angle DZF = 90^\circ$, alors $DZ = DF\cos(\angle ZDF)$, ou $DZ = DF\cos(\angle EDF)$.
Puisque $DS^2 = DZ \cdot DE$, alors $DS^2 = DE \cdot DF\cos(\angle EDF)$.
On répète ce développement pour l'autre côté du triangle et on obtient $DR^2 = DY \cdot DF$, d'où $DR^2 = DF \cdot DE\cos(\angle EDF)$.
Donc $DR^2 = DS^2$.
Donc $DP = DQ = DR = DS$.
Les points P, Q, R et S sont donc situés sur un même cercle.