La Société mathématique du Canada
en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Défi ouvert canadien de mathématiques

Le mercredi 27 novembre 2002

Durée : 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice N'EST PAS permis.

Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A
Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la réponse correcte dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B
Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

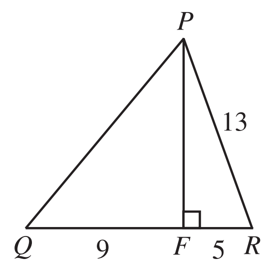
REMARQUE : **À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.**

Défi ouvert canadien de mathématiques

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.
4. L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** permis.

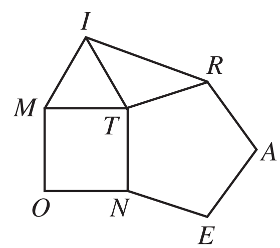
PARTIE A

1. Dans le triangle PQR, F est un point sur QR de manière que PF soit perpendiculaire à QR. Si $PR = 13$, $RF = 5$, et $FQ = 9$, quel est le périmètre du triangle PQR?



2. Si $x + y = 4$ et $xy = -12$, quelle est la valeur de $x^2 + 5xy + y^2$?

3. Un pentagone régulier est un polygone à cinq côtés dont tous les angles sont congrus et tous les côtés sont congrus. Dans le diagramme, $ENTRA$ est un pentagone régulier, MIT est un triangle équilatéral et $MONT$ est un carré. Déterminer la mesure de l'angle TIR.



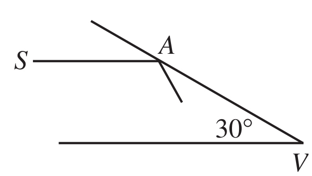
4. Dans une suite de nombres, la *somme* des n premiers termes est égale à $5n^2 + 6n$. Quelle est la somme des 3[e], 4[e] et 5[e] termes de la suite donnée?

5. Si m et n sont des entiers non négatifs et si $m < n$, on définit $m\nabla n$ comme étant la somme des entiers de m à n, incluant m et n. Par exemple, $5\nabla 8 = 5 + 6 + 7 + 8$, ou 26.

   Pour chaque entier strictement positif a, la valeur numérique de $\dfrac{[(2a-1)\nabla(2a+1)]}{[(a-1)\nabla(a+1)]}$ est la même.

   Déterminer cette valeur.

6. On a placé deux miroirs de manière à former un angle de 30° au point V. Le diagramme illustre un rayon lumineux dont la source est au point S, dont le trajet est parallèle à un miroir et qui frappe l'autre miroir au point A. Après un certain nombre de réflexions, le rayon lumineux revient au point S. Si SA et AV ont chacun une longueur de 1 m, déterminer la distance totale parcourue par le rayon lumineux.



7. N est un entier positif de cinq chiffres. On construit un entier positif P de six chiffres en plaçant un 1 à l'extrémité droite de N. On construit un deuxième entier positif de six chiffres, Q, en plaçant un 1 à l'extrémité gauche de N. Sachant que P est égal à trois fois Q, déterminer la valeur de N.

8. On considère un entier positif M qui vérifie la propriété suivante : Si on choisit au hasard un nombre x dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 999, 1000\}$, la probabilité pour que x soit un diviseur de M est égale à $\frac{1}{100}$. Si $M \leq 1000$, déterminer la plus grande valeur possible de M.

PARTIE B

1. Un carré $ABCD$ a pour sommets $A(0, 0)$, $B(0, 8)$, $C(8, 8)$ et $D(8, 0)$. Les points $P(0, 5)$ et $Q(0, 3)$ sont sur le côté AB et le point $F(8, 1)$ est sur le côté CD.
   a) Quelle est l'équation de la droite qui passe par Q et qui est parallèle à la droite passant par P et F?
   b) Si la droite de la partie a) coupe AD au point G, quelle est l'équation de la droite qui passe par F et G?
   c) Le point $H(4, 4)$ est le centre du carré. Déterminer l'équation de la droite qui passe par H et qui est perpendiculaire à FG.
   d) On construit un cercle de centre H de manière qu'il soit tangent aux quatre côtés du carré. Ce cercle coupe-t-il la droite qui passe par F et G? Justifier sa réponse. (Un dessin n'est pas considéré comme une justification suffisante.)

2. a) Soit deux chiffres A et B. (A et B sont donc des symboles de 0 à 9 utilisés pour écrire les entiers.) Sachant que le produit des deux nombres de trois chiffres, $2A5$ et $13B$, est divisible par 36, déterminer les quatre couples (A, B) possibles. Justifier sa réponse.
   b) On dit qu'un entier n est un multiple de 7 si $n = 7k$ pour un entier quelconque k.
      i) Si a et b sont des entiers tels que $10a + b = 7m$ pour un entier quelconque m, démontrer que $a - 2b$ est un multiple de 7.
      ii) Si c et d sont des entiers tels que $5c + 4d$ est un multiple de 7, démontrer que $4c - d$ est aussi un multiple de 7.

3. Il y a un nombre de billes dans un bol. À tour de rôle, Alphonse, Béatrice et Carla enlèvent chacun une ou deux billes du bol. Alphonse est premier, Béatrice est deuxième, Carla est troisième, puis Alphonse joue de nouveau et ainsi de suite. La personne qui enlève la dernière bille est perdante et les deux autres sont gagnantes.
   a) S'il y a 5 billes dans le bol au début, Béatrice et Carla peuvent-elles travailler ensemble pour s'assurer qu'Alphonse perde?
   b) On recommence avec N billes dans le bol. Pour quelles valeurs de N est-ce que Béatrice et Carla peuvent travailler ensemble pour s'assurer qu'Alphonse perde?

4. Le triangle DEF est acutangle. On a tracé un cercle C_1 de diamètre DF et un cercle C_2 de diamètre DE. Les points respectifs Y et Z sont sur DF et DE de manière que EY et FZ soient des hauteurs du triangle DEF. EY coupe C_1 au point P et FZ coupe C_2 au point Q. Le prolongement de EY coupe C_1 au point R et le prolongement de FZ coupe C_2 au point S. Démontrer que les points P, Q, R et S sont situés sur un même cercle.