Défi ouvert canadien de mathématiques

Solutions et remarques
Partie A

1. On définit l'opération " Δ " comme suit : $a\,\Delta\,b = 1 - \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$.

   Quelle est la valeur de $(1\,\Delta\,2)\Delta(3\,\Delta\,4)$?

   Solution

   D'après la définition de l'opération " Δ " :

   $$1\,\Delta\,2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

   $$3\,\Delta\,4 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

   Donc $(1\,\Delta\,2)\Delta(3\,\Delta\,4) = \left(\frac{1}{2}\right)\Delta\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 1 - 2 = -1.$

   Réponse *:* –1

2. La suite 9, 18, 27, 36, 45, 54, … est formée des multiples de 9, dans l'ordre. On transforme cette suite en multipliant chaque deuxième terme par –1, en commençant par le premier, ce qui donne la suite –9, 18, –27, 36, –45, 54, …

   Déterminer la valeur de *n* pour laquelle la somme des *n* premiers termes de cette dernière suite est égale à 180.

   Solution

   On additionne d'abord le 1er terme au 2e, le 3e au 4e, le 5e au 6e, etc.
   Chaque somme égale 9.
   Il faut additionner 20 telles sommes pour obtenir une somme de 180.
   Il faut donc additionner 2×20, ou 40 termes.

   Réponse *:* 40

3. Le symbole $n!$ représente le produit $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$.
Par exemple, $4! = 4(3)(2)(1)$. Déterminer la valeur de n pour laquelle $n! = (2^{15})(3^6)(5^3)(7^2)(11)(13)$.

Solution
On remarque que si $m \le n$, alors m est un diviseur de $n!$. On peut donc conclure que :
puisque 13 est un facteur premier de $n!$, n est supérieur ou égal à 13;
puisque 17 n'est pas un facteur premier de $n!$, n est inférieur à 17.
Puisque 5^3 est un facteur de $n!$, alors $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$ doit avoir trois multiples de 5 comme facteurs.
Donc $n \ge 15$.
On a donc $n = 15$ ou $n = 16$.
Comptons le nombre de facteurs 2 dans la factorisation première de $16!$.
On examine ses facteurs pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 et 16.
Les facteurs 2, 6, 10 et 14 contribuent chacun 1 facteur 2.
Les facteurs 4 et 12 contribuent chacun 2 facteurs 2.
Le facteur 8 contribue 3 facteurs 2.
Le facteur 16 contribue 4 facteurs 2.
Il y a donc 15 facteurs 2 dans la factorisation première de $16!$. Donc $n = 16$.

Réponse *:* 16

4. Le symbole $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 5,7 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
Calculer la valeur de la somme

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \lfloor \sqrt{4} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{48} \rfloor + \lfloor \sqrt{49} \rfloor + \lfloor \sqrt{50} \rfloor.$$

Solution
On remarque que si k est un entier positif et si $k^2 \le n < (k+1)^2$, alors $k \le \sqrt{n} < k+1$, d'où $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$.
Donc : si $1 \le n \le 3$, alors $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$;
si $4 \le n \le 8$, alors $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 2$;
si $9 \le n \le 15$, alors $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 3$;
etc.
La somme est donc égale à :

$$\begin{aligned}
&(1+1+1)+(2+2+2+2+2)+(3+\cdots+3)+\cdots+(6+\cdots+6)+(7+7)\\
&= 3(1)+5(2)+7(3)+9(4)+11(5)+13(6)+2(7)\\
&= 3+10+21+36+55+78+14\\
&= 217
\end{aligned}$$

Réponse *:* 217

5. Combien y a-t-il d'entiers positifs de cinq chiffres dont le produit des chiffres est égal à 2000?

Solution
On considère qu'un entier positif de cinq chiffres a la forme $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}$, où $0 \le a, b, c, d, e \le 9$, $a \ne 0$.
Puisque le produit des chiffres doit égaler 2000, alors $abcde = 2000 = 2^4 5^3$.
Donc trois des chiffres doivent être 5 et les deux autres chiffres doivent avoir un produit de 2^4, ou 16.

Ces deux autres chiffres doivent donc être 4 et 4 ou bien 2 et 8.
On peut continuer de deux façons.

1re façon

1er cas : Les chiffres sont 5, 5, 5, 4 et 4. Il y a $\dfrac{5!}{3!2!}$, ou 10 entiers possibles.

2e cas : Les chiffres sont 5, 5, 5, 2 et 8. Il y a $\dfrac{5!}{3!}$, ou 20 entiers possibles.

En tout, il y a 30 entiers possibles.

OU

2e façon

Il y a $\binom{5}{3}$, ou 10 façons de choisir les 3 positions pour les chiffres 5. Pour chacune d'elles, on peut compléter l'entier de trois façons, c'est-à-dire en plaçant, dans l'ordre, 2 et 8, 4 et 4 ou bien 8 et 2 dans les deux autres positions.

Le nombre d'entiers possibles est égal à 10×3, ou 30.

Réponse **:** 30

6. Résoudre l'équation $4\left(16^{\sin^2 x}\right) = 2^{6 \sin x}$, où $0 \le x \le 2\pi$.

Solution

On écrit 4 et 16 comme puissances de 2.

$$4\left(16^{\sin^2 x}\right) = 2^{6 \sin x}$$
$$2^2\left(2^{4 \sin^2 x}\right) = 2^{6 \sin x}$$
$$2^{4 \sin^2 x + 2} = 2^{6 \sin x}$$

Donc :

$$4 \sin^2 x + 2 = 6 \sin x$$
$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$
$$(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

Donc $\sin x = \dfrac{1}{2}$ ou $\sin x = 1$.

Puisque $0 \le x \le 2\pi$, alors $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ ou $\dfrac{\pi}{2}$.

Réponse **:** $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$

7. On définit la suite de nombres $\ldots,\ a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ comme suit :

Pour tout entier n, $a_n - (n+1)a_{2-n} = (n+3)^2$. Évaluer a_0.

Solution

On constate que deux valeurs de n donnent une équation contenant le terme a_2, soit $n=0$ et $n=2$.

Si $n=0$, l'équation devient $a_0 - a_2 = 9$.

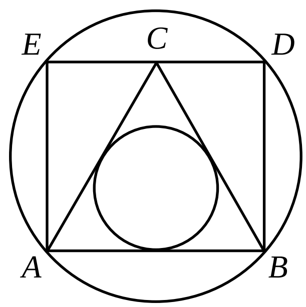
Si $n=2$, l'équation devient $a_2 - 3a_0 = 25$.

On additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $-2a_0 = 34$, d'où $a_0 = -17$.

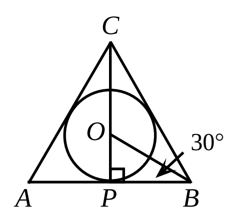
Réponse : -17

8. Le diagramme illustre un triangle équilatéral ABC. Le cercle inscrit a un rayon de 1. Le grand cercle passe par les sommets du rectangle $ABDE$.

Quel est le diamètre du grand cercle?



Solution



On détermine d'abord la longueur des côtés du triangle équilatéral ABC.

Soit O le centre du petit cercle et soit P le point de tangence du cercle au côté AB.

On trace les segments OP et OB.

Puisque P est le point de tangence, alors $\angle OPB = 90°$.

Puisque $\angle CBA = 60°$, alors $\angle OBP = 30°$ par symétrie.

Puisque $OP = 1$ et que le triangle BOP est un triangle 30°-60°-90°, alors $OB = 2$ et $BP = \sqrt{3}$.

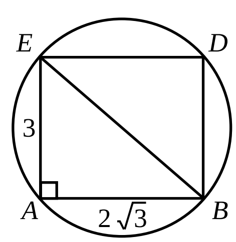
Donc $AB = 2\sqrt{3}$.

Par symétrie, $CO = OB = 2$, d'où $CP = 3$.

Puisque $ABDE$ est un rectangle et que CP est perpendiculaire à AB, alors $AE = 3$.

Examinons maintenant le rectangle $ABDE$ et son cercle circonscrit.

Puisque $ABDE$ est un rectangle, $\angle EAB = 90°$.



Donc BE est un diamètre.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BE^2 &= EA^2 + AB^2 \\ &= 3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Le diamètre du grand cercle mesure $\sqrt{21}$.

Réponse : $\sqrt{21}$

PARTIE B

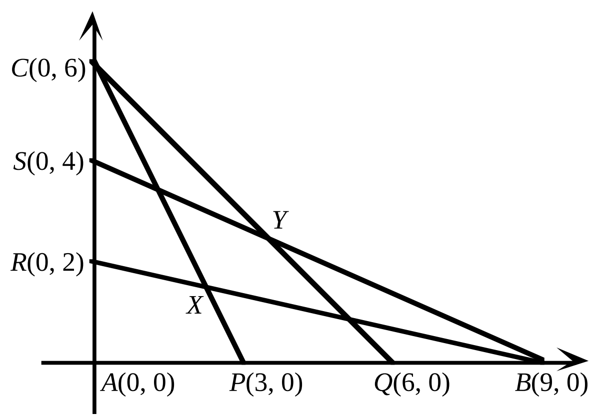
1. Le triangle ABC a pour sommets $A(0, 0)$, $B(9, 0)$ et $C(0, 6)$. Les points *P* et *Q* sont situés sur le côté AB, de manière que $AP = PQ = QB$. De même, les points *R* et *S* sont situés sur le côté AC, de manière que $AR = RS = SC$. On joint le sommet *C* aux points *P* et *Q*. On joint le sommet *B* aux points *R* et *S*.
   a) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points *R* et *B*.
   b) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points *P* et *C*.
   c) Soit *X* le point d'intersection des segments PC et RB et *Y* le point d'intersection des segments QC et SB. Démontrer que les points *A*, *X* et *Y* sont alignés, c'est-à-dire qu'ils sont situés sur une même droite.

Solution

Puisque $A(0, 0)$, $B(9, 0)$ et $AP = PQ = QB$, alors les coordonnées de *P* sont $(3, 0)$ et celles de *Q* sont $(6, 0)$.
De même, les coordonnées de *R* sont (0, 2) et celles de *S* sont (0, 4).

a) D'après les coordonnées de *R* et de *B*, la pente de RB est égale à $-\frac{2}{9}$ et l'équation de la droite qui passe par les points *R* et *B* est $y = -\frac{2}{9}x + 2$.

b) D'après les coordonnées de *P* et de *C*, la pente de PC est égale à –2 et l'équation de la droite qui passe par les points *P* et *C* est $y = -2x + 6$.



c) On déterminera d'abord les coordonnées de *X*, le point d'intersection des droites de a) et de b).
Pour un point d'intersection, on a :

$$-\frac{2}{9}x + 2 = -2x + 6$$
$$\frac{16}{9}x = 4$$
$$x = \frac{9}{4}$$

On reporte cette valeur dans l'équation $y = -2x + 6$ pour obtenir $y = -2\left(\frac{9}{4}\right) + 6$, ou $y = \frac{3}{2}$.
Les coordonnées de *X* sont $\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

On détermine ensuite l'équation des deux autres droites comme dans a) et b).
La pente de QC est égale à –1 et l'équation de la droite qui passe par les points *Q* et *C* $y = -x + 6$.
La pente de SB est égale à $-\frac{4}{9}$ et l'équation de la droite qui passe par les points *S* et *B* est $y = -\frac{4}{9}x + 4$.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection *Y* de ces deux droites, posons :

$$-x + 6 = -\frac{4}{9}x + 4$$
$$2 = \frac{5}{9}x$$
$$x = \frac{18}{5}$$

On reporte cette valeur dans l'équation $y = -x + 6$ pour obtenir $y = -\frac{18}{5} + 6$, ou $y = \frac{12}{5}$.
Les coordonnées de *Y* sont $\left(\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

La pente de AX est égale à $\dfrac{\frac{3}{2}-0}{\frac{9}{4}-0}$, ou $\dfrac{2}{3}$.

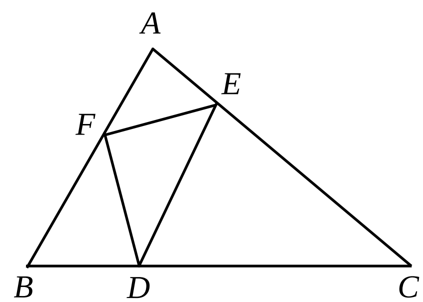
La pente de AY est égale à $\dfrac{\frac{12}{5}-0}{\frac{18}{5}-0}$, ou $\dfrac{2}{3}$.

Puisque les deux pentes sont égales, les points A, X et Y sont alignés.

2. Dans le triangle ABC, les points D, E et F sont situés sur les côtés respectifs BC, CA et AB, de manière que $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle BDF = \angle CDE$ et $\angle CED = \angle AEF$.

   a) Démontrer que $\angle BDF = \angle BAC$.

   b) Déterminer la longueur de BD, sachant que $AB = 5$, $BC = 8$ et $CA = 7$.



Solution

a) Soit $\angle AFE = \angle BFD = x$

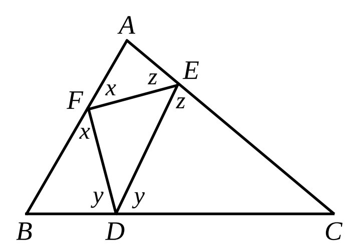
$\angle BDF = \angle CDE = y$

$\angle CED = \angle AEF = z$.

Donc : $\angle FAE = 180° - x - z$

$\angle FBD = 180° - x - y$

$\angle ECD = 180° - y - z$



Puisque la somme de ces mesures égale $180°$, alors :

$$540° - 2(x + y + z) = 180°$$
$$x + y + z = 180°$$

Dans le triangle AEF, on a : $\angle FAE + \angle AFE + \angle AEF = 180°$

$$\angle FAE + x + z = x + y + z$$
$$\angle FAE = y$$

Donc $\angle BDF = \angle BAC$.

b) Comme dans la partie a), on a $\angle ECD = \angle BFD = x$ et $\angle FBD = \angle CED = z$.

Puisque leurs angles sont congrus deux à deux, les triangles ABC, DBF, DEC et AEF sont semblables.

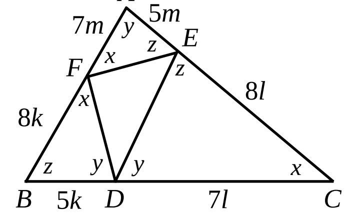
Donc $\dfrac{BD}{BF} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{5}{8}$, $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{7}{8}$ et $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{7}$.

Il existe donc des valeurs de k, l et m pour lesquelles $BD = 5k$, $BF = 8k$, $CD = 7l$, $CE = 8l$, $AE = 5m$ et $AF = 7m$.

Donc : $5k + 7l = 8 \quad (1)$

$7m + 8k = 5 \quad (2)$

$5m + 8l = 7 \quad (3)$



On calcule $7 \times (3) - 5 \times (2)$, pour éliminer m, et on obtient :

$$56l - 40k = 24$$
$$7l - 5k = 3 \quad (4)$$

On calcule (1) – (4) pour obtenir $10k = 5$, d’où $BD = 5k = \frac{5}{2}$.

3. a) Alphonse et Béatrice jouent un jeu avec la forme géométrique de la Figure 1. Alphonse commence en découpant la forme initiale en deux le long d’une des lignes. Il remet ensuite à Béatrice le morceau qui contient le triangle noir, tout en jetant l’autre morceau.

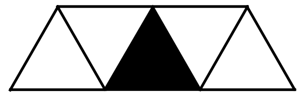


Figure 1

Béatrice fait de même avec le morceau qu’elle reçoit, c’est-à-dire qu’elle le découpe le long d’une ligne, remet le morceau qui contient le triangle noir à Alphonse et jète l’autre morceau. On continue de cette façon, le gagnant étant celui ou celle qui reçoit le triangle noir seulement. Démontrer qu’il est possible pour Béatrice de toujours avoir une stratégie gagnante. Justifier sa réponse.

Solution

On considère d’abord les premiers choix possibles d’Alphonse. On peut supposer qu’il découpe du côté gauche du triangle noir.

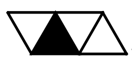
1er cas

Alphonse enlève deux triangles blancs, laissant .

Béatrice enlève alors un triangle blanc et remet  à Alphonse, le forçant à enlever le dernier triangle blanc.

Béatrice gagne.

2^{e} cas

Alphonse enlève un triangle blanc, laissant .

Béatrice enlève alors les deux triangles du côté droit, ce qui laisse Alphonse dans la même situation que dans le premier cas.

Béatrice peut donc toujours gagner, peu importe le jeu d’Alphonse.

b) Alphonse et Béatrice jouent le même jeu, avec les mêmes règlements, en employant cette fois-ci la forme géométrique de la Figure 2 et Béatrice jouant en premier. Comme dans la partie a), les coupes doivent être faites le long d'une ligne entière. Existe-t-il une stratégie qui permet à Béatrice de toujours gagner? Justifier sa réponse.

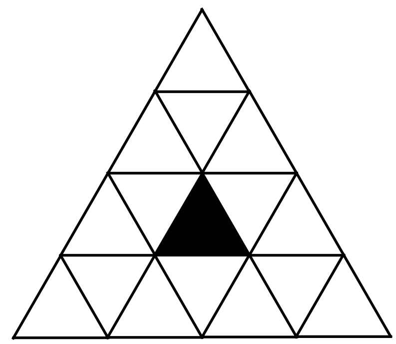


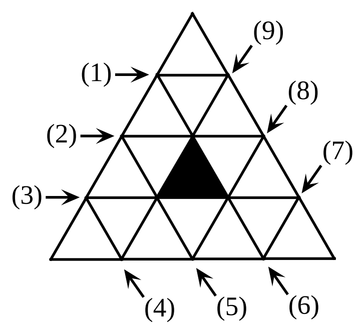
Figure 2

Solution

On démontrera qu'il existe une stratégie gagnante pour Béatrice.

Il s'agira de réduire la forme géométrique de la figure 2 à celle de la figure 1, tout en forçant Alphonse à jouer à ce moment-là.

On numérote les lignes de la figure.



À cause de la symétrie de la figure, on peut supposer que Béatrice fait sa première coupe le long des lignes (1), (2) ou (3).

Si elle découpait le long des lignes (2) ou (3), Alphonse pourrait découper le long de l'autre de ces deux lignes et lui remettre une forme comme celle de la figure 1. Béatrice perdrait.

Béatrice fait donc sa première coupe le long de la ligne (1).

Si Alphonse découpe le long des lignes (2) ou (3), Béatrice découpe le long de l'autre de ces deux lignes pour obtenir une forme comme celle de la figure 1, qu'elle remet à Alphonse. Béatrice gagne.

Si Alphonse découpe le long des lignes (8) ou (9), Béatrice découpe le long de l'autre de ces deux lignes pour obtenir une forme comme celle de la figure 1, qu'elle remet à Alphonse. Béatrice gagne.

La même situation se présente si Alphonse découpe le long des lignes (5) ou (6).

On suppose donc qu'Alphonse découpe le long des lignes (4) ou (7), disons (4).

Si Béatrice découpe le long des lignes (2), (3), (5), (6), (8) ou (9), Alphonse peut lui remettre une forme comme celle de la figure 1, ce qui permettrait à Alphonse de gagner. Béatrice fait donc sa deuxième coupe le long de la ligne (7).

Alphonse dont donc découper le long des lignes (2), (3), (5), (6), (8) ou (9), ce qui permet à Béatrice de lui remettre une forme comme celle de la figure 1. Alphonse est alors perdant.

Il y a donc une stratégie gagnante pour Béatrice.

4. On définit une suite $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$ de n termes comme suit :

$$t_1 = 1,\ t_2 = 4 \text{ et } t_k = t_{k-1} + t_{k-2} \text{ lorsque } k = 3, 4, ..., n.$$

Soit T l'ensemble de tous les termes de la suite, c'est-à-dire que $T = \{t_1, t_2, t_3, ..., t_n\}$.

a) Combien d'entiers strictement positifs peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux termes distincts de l'ensemble T?

Solution

$t_k > 0$ pour tout k, $1 \le k \le n$.

De plus, $t_k < t_{k+1}$ pour tout $k \le n-1$, puisque $t_{k+1} = t_k + t_{k-1}$.

La suite est donc croissante.

Il y a $\binom{n}{2}$ paires de termes, chacune donnant une somme qui est un entier.

Est-il possible que deux paires donnent la même somme?

Considérons deux sommes dont les éléments sont distincts, $t_a + t_b$ et $t_c + t_d$. (Si $t_a = t_c$ et que les sommes sont égales, alors $t_b = t_d$ et on a affaire à la somme des mêmes termes.)

Soit t_d le plus grand des quatre termes.

Alors $t_d = t_{d-1} + t_{d-2} \ge t_a + t_b$, puisque t_a et t_b ont des valeurs maximales respectives t_{d-1} et t_{d-2} et ne peuvent être égales.

Or puisque $t_c > 0$, alors $t_c + t_d > t_a + t_b$, ce qui démontre que les sommes sont distinctes.

Puisque les paires donnent des sommes distinctes, il y a $\binom{n}{2}$ entiers qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux termes distincts de l'ensemble T.

b) Combien d'entiers strictement positifs peuvent être exprimés comme la somme d'exactement trois termes distincts de l'ensemble *T*?

Solution

Il y a $\binom{n}{3}$ façons de choisir trois termes pour obtenir une somme.

On considère deux sommes de trois termes, $t_a + t_b + t_c$ et $t_d + t_e + t_f$. Si un des trois premiers termes est égal à un des trois derniers termes, on obtient deux sommes formées de deux termes distincts et selon la partie a), les deux sommes seraient distinctes. Puisque les termes sont distincts, soit t_f le plus grand.

Il est possible d'obtenir deux sommes égales en posant $t_a = t_{f-1}$, $t_b = t_{f-2}$, $t_d = t_{c-1}$ et $t_e = t_{c-2}$.

De combien de façons peut-on le faire pour une valeur donnée de *f*? On sait que $6 \le f \le n$.

Puisque $2 < c < f-2$, pour chaque valeur de *f*, il y a $f-5$ choix pour *c* et le nombre de façons est égal à

$$\sum_{f=6}^{n}(f-5) = 1+2+3+\dots+(n-5) = \binom{n-4}{2}.$$

Il y a donc un maximum de $\binom{n}{3} - \binom{n-4}{2}$ sommes possibles de trois termes.

Y a-t-il des sommes qui sont égales?

Les valeurs maximales de t_a, t_b et t_c sont t_{f+1}, t_{f-3}, et t_{f-4}. [Si, par exemple, $t_a = t_{f-1}$ et $t_b = t_{f-2}$, on aurait une situation analysée ci-haut.] Donc :

$$\begin{aligned} t_a + t_b + t_c &\le t_{f+1} + t_{f-3} + t_{f-4} \\ &< t_{f-1} + t_{f-3} + t_{f-4} \\ &= t_{f-1} + t_{f-2} \\ &= t_f. \end{aligned}$$

Or $t_d + t_e + t_f > t_f$.

Donc $t_a + t_b + t_c < t_d + t_e + t_f$.

Il y a donc $\binom{n}{3} - \binom{n-4}{2}$ entiers strictement positifs qui peuvent être exprimés comme la somme d'exactement trois termes distincts de l'ensemble *T*.