La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Défi ouvert canadien de mathématiques

Le mercredi 29 novembre 2000

Durée : 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice N'EST PAS permis.

Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A
Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la réponse correcte dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B
Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné 8 1/2 x 14.
Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUE : **À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.**

Défi ouvert canadien de mathématiques

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que $4\pi,\ 2+\sqrt{7}$, etc.
4. L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** permis.

PARTIE A

1. On définit l'opération "Δ" comme suit : $a\,\Delta\,b = 1-\dfrac{a}{b},\ b \neq 0$.

   Quelle est la valeur de $(1\,\Delta\,2)\Delta(3\,\Delta\,4)$?

2. La suite 9, 18, 27, 36, 45, 54, … est formée des multiples de 9, dans l'ordre. On transforme cette suite en multipliant chaque deuxième terme par –1, en commençant par le premier, ce qui donne la suite $-9, 18, -27, 36, -45, 54, \ldots$ Déterminer la valeur de n pour laquelle la somme des n premiers termes de cette dernière suite est égale à 180.

3. Le symbole $n!$ représente le produit $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$.

   Par exemple, $4! = 4(3)(2)(1)$. Déterminer la valeur de n pour laquelle $n! = \left(2^{15}\right)\left(3^{6}\right)\left(5^{3}\right)\left(7^{2}\right)(11)(13)$.

4. Le symbole $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 5,7 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
   Calculer la valeur de la somme

   $$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \lfloor \sqrt{4} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{48} \rfloor + \lfloor \sqrt{49} \rfloor + \lfloor \sqrt{50} \rfloor.$$

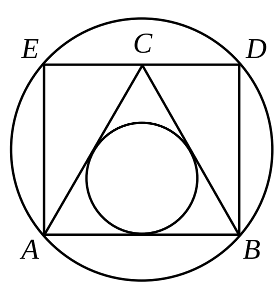
5. Combien y a-t-il d'entiers positifs de cinq chiffres dont le produit des chiffres est égal à 2000?

6. Résoudre l'équation $4\left(16^{\sin^2 x}\right) = 2^{6\sin x}$, où $0 \le x \le 2\pi$.

7. On définit la suite de nombres $\ldots,\ a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ comme suit :

   Pour tout entier n, $a_n - (n+1)a_{2-n} = (n+3)^2$. Évaluer a_0.

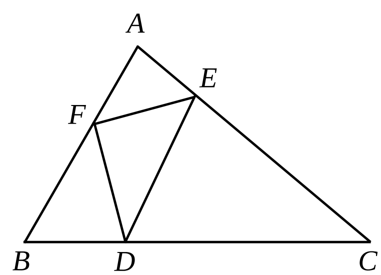
8. Le diagramme illustre un triangle équilatéral ABC. Le cercle inscrit a un rayon de 1. Le grand cercle passe par les sommets du rectangle $ABDE$. Quel est le diamètre du grand cercle?



PARTIE B

1. Le triangle ABC a pour sommets $A(0,0)$, $B(9,0)$ et $C(0,6)$. Les points P et Q sont situés sur le côté AB, de manière que $AP = PQ = QB$. De même, les points R et S sont situés sur le côté AC, de manière que $AR = RS = SC$. On joint le sommet C aux points P et Q. On joint le sommet B aux points R et S.
   a) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points R et B.
   b) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points P et C.
   c) Soit X le point d'intersection des segments PC et RB et Y le point d'intersection des segments QC et SB. Démontrer que les points A, X et Y sont alignés, c'est-à-dire qu'ils sont situés sur une même droite.

2. Dans le triangle ABC, les points D, E et F sont situés sur les côtés respectifs BC, CA et AB, de manière que $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle BDF = \angle CDE$ et $\angle CED = \angle AEF$.
   a) Démontrer que $\angle BDF = \angle BAC$.
   b) Déterminer la longueur de BD, sachant que $AB = 5$, $BC = 8$ et $CA = 7$.



3. a) Alphonse et Béatrice jouent un jeu avec la forme géométrique de la Figure 1. Alphonse commence en découpant la forme initiale en deux le long d'une des lignes. Il remet ensuite à Béatrice le morceau qui contient le triangle noir, tout en jetant l'autre morceau. Béatrice fait de même avec le morceau qu'elle reçoit, c'est-à-dire qu'elle le découpe le long d'une ligne, remet le morceau qui contient le triangle noir à Alphonse et jète l'autre morceau. On continue de cette façon, le gagnant étant celui ou celle qui reçoit le triangle noir seulement. Démontrer qu'il est possible pour Béatrice de toujours avoir une stratégie gagnante. Justifier sa réponse.

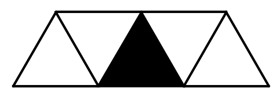


Figure 1

   b) Alphonse et Béatrice jouent le même jeu, avec les mêmes règlements, en employant cette fois-ci la forme géométrique de la Figure 2 et Béatrice jouant en premier. Comme dans la partie a), les coupes doivent être faites le long d'une ligne entière. Existe-t-il une stratégie qui permet à Béatrice de toujours gagner? Justifier sa réponse.

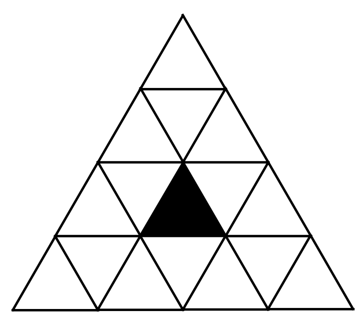


Figure 2

4. On définit une suite $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$ de n termes comme suit :
$$t_1 = 1,\ t_2 = 4 \text{ et } t_k = t_{k-1} + t_{k-2} \text{ lorsque } k = 3, 4, ..., n.$$
   Soit T l'ensemble de tous les termes de la suite, c'est-à-dire que $T = \{t_1, t_2, t_3, ..., t_n\}$.
   a) Combien d'entiers strictement positifs peuvent être exprimés comme la somme d'exactement deux termes distincts de l'ensemble T?
   b) Combien d'entiers strictement positifs peuvent être exprimés comme la somme d'exactement trois termes distincts de l'ensemble T?