La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Le troisième Défi ouvert canadien de mathématiques

le mercredi 25 novembre 1998

Solutionnaire

Partie A

Remarque: Les questions de la parie A ont été notées sur 5 points.

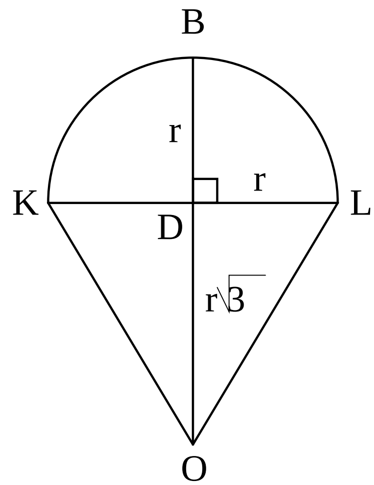
1. La façon la plus simple de résoudre ce problème est de transférer 3^x du côté gauche, le mettre en facteur, ce qui fait, $3^x(8) = 216$. La solution est donc $x = 3$.

   La moyenne était de 4.0.

2. Étant donné que les côtés opposés de la boîte sont égaux, on arrive à l'équation suivante, $2(2a^2) + 2(2a) + 2(2a) = 54$ or $2a^2 + 3a - 27 = 0$. Donc $a = 3$ et le volume est de 18.

   La moyenne était de 4.3.

3. En prenant une partie du diagramme avec les indications appropriées, nous voyons que $DL = r$ et que $DO = r\sqrt{3}$. Donc, $OB = r(1+\sqrt{3}) = 6$ ou $r = \dfrac{6}{1+\sqrt{3}}$.



   La moyenne était de 1.7.

4. La façon la plus simple de résoudre ce problème est de reconnaître que la moyenne des 24 termes impairs est de $\frac{1272}{24} = 53$. C'est également la moyenne des 47 termes. La somme des 47 termes est alors de $47 \times 53 = 2491$. On aura pu y arriver avec des formules et une méthode plus conventionnelle.

   La moyenne était de 1.8.

5. Étant donné que $log_a a^n = n log_a a = n$ la valeur numérique de la série est donc $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 98 + 99 = 50$.

   La moyenne était de 3.2.

6. D'abord, $DC = 60$ et $BD = 40$. En nous servant de la loi du cosinus dans le $\triangle ACD$ et du fait que le $\cos C = \frac{3}{5}$, nous voyons que $AD = \sqrt{2880}$. Nous aurions également pu tracer un perpendiculaire de D à AC et procéder au moyen de triangles similaires.

   La moyenne était de 1.7.

7. Il y a plusieurs façons rapides de résoudre ce problème. Il y a $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ groupes de trois lettres à choisir. Il y a 5 façons de choisir un A, 3 façons de chosir un B et 2 façons de choisir un C, donc $5 \times 3 \times 2$ façons de choisir un A, un B et un C. La probabilité est donc de $\dfrac{5 \times 3 \times 2}{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}} = \dfrac{1}{4}$.

La moyenne était de 0.6.

8. En nous servant des propriétés élémentaires de la symétrie, nous notons que le coin de la boîte, le centre de la petite sphère et le centre de la grande sphère se trouvent sur une même ligne droite partant du point d'origine. La distance du coin de la boîte au centre de la petite sphère est de $r\sqrt{3}$. Si la distance du coin de la boîte au centre de la grande sphère est de $16\sqrt{3}$, nous avons maintenant, $r\sqrt{3}+r+15=16\sqrt{3}$ ou $r=\frac{16\sqrt{3}-15}{\sqrt{3}+1}$.

   La moyenne était de 0.6.

Partie B

Remarque: Les questions de la partie B ont été notées sur 10 points.

1. On peut facilement résoudre ce problème en trouvant d'abord les coordonnées des sommets du $\triangle ABC$. On trouve ensuite les coordonnées de P au moyen des propriétés des bissectrices à angle droit des côtés. On trouve ainsi que $P(6,4)$ est le point en question. L'équation déterminant la ligne en question est donc $x-5y+14=0$. ***N.B.:*** Les étudiants devraient d'abord dessiner un diagramme en faisant ce problème.

   La moyenne était de 5.0.

2. Appelons DC "y" et AD "x". YC devient donc $\frac{6}{y}$ et $AX=\frac{10}{x}$. De là, $BY=\frac{xy-6}{y}$ et $BX=\frac{xy-10}{x}$ ce qui fait que $\frac{xy-10}{x}\cdot\frac{xy-6}{y}=8$ puisque $|\triangle BXY|=4$. La solution est donc $|\triangle DXY|=2\sqrt{21}$.

   La moyenne était de 1.8.

3.

(a) En somme, Alphonse adopte une stratégie qui forcera Beryl à pénétrer le premier dans le dernier anneau. Il s'assure ainsi la victoire parce que dans le dernier anneau les déplacements doivent nécessairement se succéder et les aires sont en nombre pair. Alphonse s'assure donc les 2e, 4e, 6e et 8e positions, c'est-à-dire la position gagnante.

(b) Beryl choisit la stratégie qui lui permettra d'être le premier à pénétrer les anneaux trois et cinq. Beryl s'assure ainsi qu'il gagnera toujours puisque Alphonse sera toujours dans une position paire dans ces anneaux (si nous appelons les régions 1, 2, 3,…,9) lorsque c'est à Beryl à jouer.

La moyenne était de 2.7.

4. Complétons d'abord le diagramme avec les indications appropriées. Nous voyons que $\alpha + \beta + \theta = 180°$ au moyen de la formule de la double tangente, nous voyons que $\tan(\alpha+\beta) = -\tan\theta$; puis en substituant $4r^2 = (6-x)(x)$ nous arrivons à $a = 2$. On voit aisément que $ZB + ZC = 2 + (6-x) + 2 + x = 10$ tel que requis. On peut également résoudre ce problème au moyen de la formule de Heron.

La moyenne était de 0.8.