La Société mathématique du Canada
in collaboration with
Le centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Le troisième
Défi ouvert canadien
de mathématiques

le mercredi 25 novembre 1998

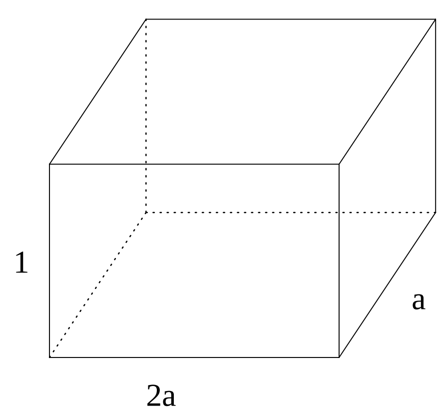
Questionnaire

Partie A

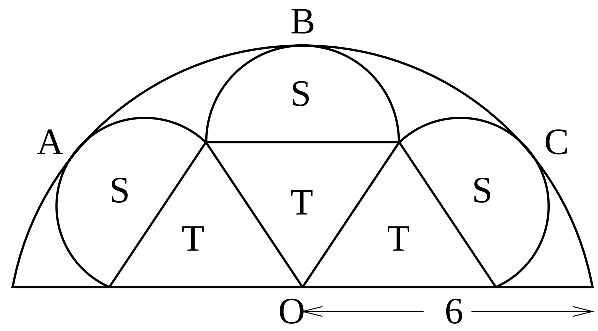
Remarque: Les questions de la partie A vont être notées sur 5 points.

1. Trouvez x, si $3^{x+2} = 3^x + 216$.

2. Une boîte rectangulaire (illustrée), ayant comme dimensions a, $2a$ and 1 a une surface de 54, lorsque a est un entier. Trouvez le volume de la boîte.



3. Dans la figure, chaque aire T est un triangle équilatéral et chaque aire S, un demi-cercle. La figure complète est un demi-cercle ayant un rayon de 6 et le centre à O. Les trois demi-cercles plus petits touchent le grand demi-cercle aux points A, B et C. Quel est le rayon du demi-cercle S?

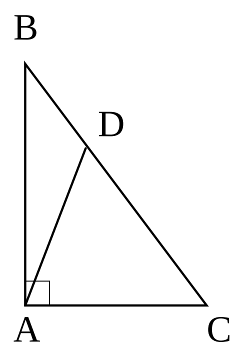


4. Dans une suite arithmétique $t_1, t_2, t_3, ..., t_{47}$, la somme des termes impairs est 1272. Quelle est la somme des 47 termes de la suite?

5. Calculez la somme des 99 prmiers termes de la séries suivant:

$$\log_a a - log_a a^2 + log_a a^3 - log_a a^4 + log_a a^5 - log_a a^6 + \dots$$

6. Les côtés du triangle ABC sont de $60, 80$ et 100 et $\angle A = 90°$. La ligne AD divise le triangle ABC en deux triangles de périmètres égaux. Calculez la longueur de AD.



7. Il y a dix prix, cinq A, trois B et deux C, placés dans des enveloppes scellées et identiques pour les dix meilleurs participants à un concours de mathématique. Chaque gagnant choisit une enveloppe au hasard parmi celles qui demeurent. Lorsque le huitième concurrent choisit son prix, quelle est la probabilité que les trois prix qui restent sont un A, un B et un C?

8. Neuf sphères sont placées dans une boîte de forme cubique d'une longueur de 32 cm. Quatre petites sphères de rayon r sont placées dans les coins inférieurs de la boîte. Elles touchent les côtés adjacents de la boîte mais ne touchent pas les unes les autres. Une grande sphère d'un rayon de 15 cm est placée de façon à toucher les quatre sphères plus petites mais non le fond de la boîte. On ajoute quatre sphères de rayon r dans les coins supérieurs et on ferme la boîte de façon à ce que le couvercle touche au quatre petites sphères. Calculez la valeur de r.

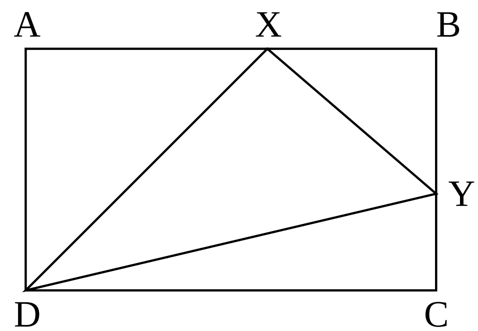
Partie B

Remarque: Les questions de la partie B vont être notées sur 10 points.

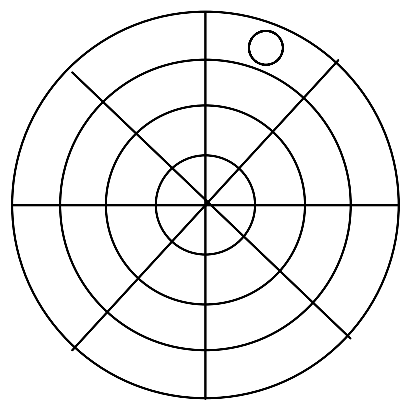
Répondez à toutes les questions. Les problèmes dans cette partie valent 10 points chacun. La note sera accordée selon la présentation. La bonne solution mal présentée ne recevra pas la note parfaite.

1. Les côtés du triangle ABC sont déterminés de la façon suivante: le côté AB par la ligne $3x - 2y + 3 = 0$; le côté BC par la ligne $x + y - 14 = 0$; et AC par la ligne $y = 3$. Si le point P est placé de façon à ce que $PA = PB = PC$, trouvez l'équation qui détermine la ligne contenant A et P.

2. $ABCD$ est un rectangle et on trace les lignes DX, DY et XY avec X sur AB et Y sur BC. La surface du triangle AXD est 5, celle du triangle BXY est 4 et celle du triangle CYD est 3. Trouvez la surface du triangle DXY.



3. Alphonse et Beryl déplacent à tour de rôle un disque sur une planche circulaire. Le jeu commence avec le disque déjà en place tel qu'illustré. Un joueur peut avancer d'une place à droite, à gauche ou vers le centre mais ne peut pas retourner à une case qui a déjà été occupé. La dernière personne qui peut bouger gagne la partie.



(a) Si Alphonse joue le premier, y a-t-il une stratégie qui peut lui assurer la victoire à chaque foisÉ

(b) Y a-t-il une stratégie gagnante pour un ou l'autre joueur si la planche a cinq cercles concentriques avec neuf aires dans chaque anneau et si Alphonse joue le premier? (Les règles du jeu demeurent les mêmes.)

4. Une ligne BC mesure 6. Le point A est chosi de façon à ce que $\angle BAC$ est un angle droit. Pour toute position de A un point D est choisi sur BC de façon à ce que AD est perpendiculaire à BC. Un cercle ayant AD comme diamètre a des tangentes tirées de C et B touchant le cercle à M et N, respectivement. Les tangentes se croisent à Z. Prouvez que $ZB + ZC$ est une constante.