La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Le deuxième Défi ouvert canadien de mathématiques

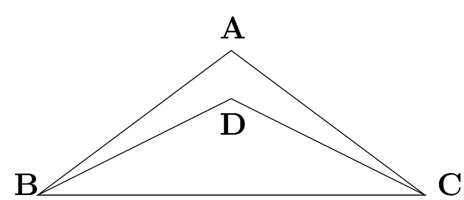
le mercredi 26 novembre 1997

Solutionnaire

Partie A

Remarque: Les questions de la partie A ont été notées sur 5 points.

1. Dans le triangle ABC, $\angle A$ mesure 120 degrees. Le point D est situé à l'intérieur du triangle, de manière à ce que $\angle DBC = 2 \cdot \angle ABD$ et $\angle DCB = 2 \cdot \angle ACD$. Déterminer la mesure de $\angle BDC$, en degrés.



   Si $\angle DBC = 2x$ et $\angle DCB = 2y$, on obtient une équation avec $3x + 3y + 120$, ce qui donne que $\angle BDC = 140°$.

   La note moyenne à été de 4.0.

2. Résoudre le système d'équations.

$$xy^2 = 10^8, \ \frac{x^3}{y} = 10^{10}.$$

   Il y a plusieurs solutions, la plus directe étant probablement d'établir la valeur de x en fonction de y dans la première équation, et de la substituer dans la deuxième équation. La réponse est $x = 10^4, \ y = 10^2$.

   La note moyenne à été de 3.8

3. On considère la droite qui passe par les points $(-4, 11)$ et $(16, -1)$. Déterminer tous les points sur cette droite qui ont pour coordonnées des entiers positifs.

   En utilisant les points donnés, la pente de la droite est $-\frac{3}{5}$. En utilisant cette pente, on établit facilement les points suivants $(11, 2), (6, 5)$, et $(1, 8)$.

   La note moyenne à été de 3.7.

4. Étant donné trois chiffres distincts a, b et c, il est possible, en choisissant deux chiffres à la fois, de former 6 nombres de deux chiffres. Déterminer tous les ensembles $\{a, b, c\}$ pour lesquels la somme des 6 nombres de deux chiffres est égale à 484.

   Les six nombres possibles sont $10a + b, 10a + c, 10b + a, 10b + c, 10c + a, 10c + b$. Leur somme est $22(a + b + c)$. Les ensembles acceptables sont donc $\{6, 7, 9\}$ et $\{5, 8, 9\}$, puisque les trois chiffres sont distincts.

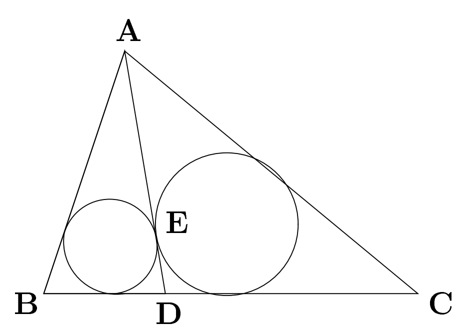
   La note moyenne à été de 2.8.

5. On a deux cubes dont les faces sont peintes en rouge ou en bleu. Le premier cube a cinq faces rouges et une face bleue. Lorsqu'on lance les deux cubes en même temps, la probabilité que les deux faces du dessus soient de la même couleur est de $\frac{1}{2}$. Combien de faces rouges y a-t-il sur le deuxième cube?

   La couleur sur le dessus du premier cube importe peu. Une fois le cube lancé, il nous faut trois faces rouges et trois faces bleues sur le deuxième cube pour avoir une probabilité de faces de la même couleur de $\frac{1}{2}$.

   La note moyenne à été de 2.7.

6. Les côtés du $\triangle ABC$ sont tels que $AB = 137$, $AC = 241$, et $BC = 200$. Il existe un point D, sur BC, tel que les cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD touchent le segment AD au point E. Déterminer la longueur du segment CD.



   La solution de ce problème s'obtient en utilisant la propriété suivante, à savoir que les tangentes d'un cercle à partir d'un point extérieur sont égales. En utilisant ce fait, et en appliquant les variables algébriques nécessaires, on obtient à partir des équations résultantes que $CD = 152$.

   La note moyenne à été de 0.5.

7. Déterminer la valeur minimale de $f(x)$, où

$$f(x) = (3\sin x - 4\cos x - 10)(3\sin x + 4\cos x - 10).$$

   On peut utiliser le calcul, mais ce n'est pas nécessaire. Multipliez les expressions données et remplacez les $\cos^2 x$. Le résultat est quadratique en $\sin x$, et en complétant le carré (en notant que $|\sin x| \leq 1$), on obtient une valeur minimale de 49.

   La note moyenne à été de 1.2.

8. Un sablier est construit de deux cônes identiques. Au départ, le cône du haut est rempli de sable, tandis que le cône du bas est vide. Le sable coule, à taux constant, du cône du haut au cône du bas. Il faut exactement une heure pour que le cône du haut se vide. Combien de temps faut-il pour que la profondeur du sable dans le cône du bas soit égale à la moitié de la profondeur du sable dans le cône du haut? (On supposera qu'en tout temps la surface du sable dans chaque cône reste plate et horizontale.)

   Au moment requis, la profondeur du sable dans le cône du haut est au 2 tiers de sa profondeur originale. Puisque le volume varie comme le cube d'une dimension dans les solides réguliers, il faudra attendre $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$ d'une heure.

   La note moyenne à été de 0.7.

Partie B

Remarque: Les questions de la partie B ont été notées sur 10 points.

1. La droite d_1 d'équation $x - 2y + 10 = 0$ rencontre le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 100$ au point B dans le premier quadrant. Une droite passant par B, perpendiculaire à la droite d_1 coupe l'axe des y au point $P(0, t)$. Déterminer la valeur de t.

   On arrive à une solution pour le point B en substituant de la première équation à la seconde, et on obtient que $B(6, 8)$. La droite qui passe par B, perpendiculaire à d_1 coupe l'axe des y-axis au point $(0, 20)$.

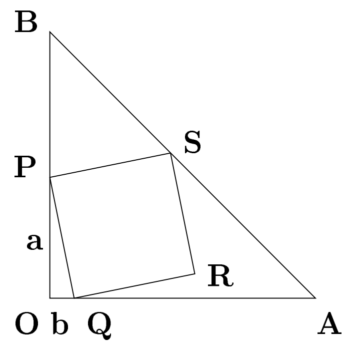
   La note moyenne à été de 5.9

2. On considère les dix nombres $ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{10}$. Déterminer leur produit, sachant que leur somme est égale à 18, et que la somme de leurs inverses est égale à 6.

   En tenant compte des conditions données, il suffit de diviser les équations une par l'autre pour obtenir $a^2r^{11} = 3$. Le résultat requis est donc $a^{10}r^{55} = 3^5$.

   La note moyenne à été de 2.1.

3. On considère un triangle rectangle isocèle AOB. On choisit des points P, Q et S sur les côtés respectifs OB, OA et AB, de manière à former un carré $PQRS$. Si les longeurs respectives de OP et OQ sont dénotées par a et b, et si l'aire du carré $PQRS$ est $\frac{2}{5}$ fois l'aire du triangle AOB, déterminer le rapport $a : b$.



On tire une droite ST perpendiculaire au segment OB; on obtient ainsi des triangles congruents qui donnent rapidement $OB = 2a + b$. Une autre méthode utilise les lois du sinus et du cosinus sur $\triangle BPS$, et de la géométrie analytique. Dans les deux cas on obtient que $a : b = 2 : 1$.

La note moyenne à été de 0.7.

4. Déterminer toutes les valeurs réelles de x, y et z qui vérifient le système déquations

$$\begin{array}{rcl} x - \sqrt{yz} & = & 42 \\ y - \sqrt{xz} & = & 6 \\ z - \sqrt{xy} & = & -30. \end{array}$$

On pose $x = a^2,\ y = b^2,\ z = c^2$, éliminant ainsi les radicaux. En combinant les équations deux-à-deux on obtient que $b = \frac{a+c}{2}$. Cela permet de faire passer le nombre de variables de trois à deux, et d'obtenir $x = 54,\ y = 24,\ z = 6$.

La note moyenne à été de 0.4.