La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Le deuxième Défi ouvert canadien de mathématiques

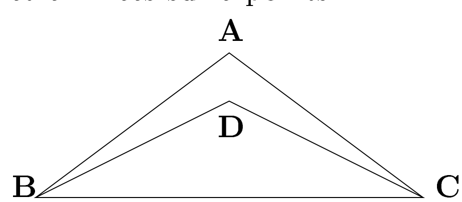
le mercredi 26 novembre 1997

Questionnaire

Partie A

Remarque: Les questions de la partie A vont être notées sur 5 points.

1. Dans le triangle ABC, $\angle A$ mesure 120 degrees. Le point D est situé à l'intérieur du triangle, de manière à ce que $\angle DBC = 2 \cdot \angle ABD$ et $\angle DCB = 2 \cdot \angle ACD$. Déterminer la mesure de $\angle BDC$, en degrés.



2. Résoudre le système d'équations.

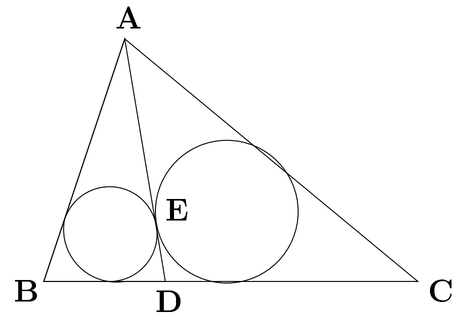
$$xy^2 = 10^8, \ \frac{x^3}{y} = 10^{10}.$$

3. On considère la droite qui passe par les points $(-4, 11)$ et $(16, -1)$. Déterminer tous les points sur cette droite qui ont pour coordonnées des entiers positifs.

4. Étant donné trois chiffres distincts a, b et c, il est possible, en choisissant deux chiffres à la fois, de former 6 nombres de deux chiffres. Déterminer tous les ensembles $\{a, b, c\}$ pour lesquels la somme des 6 nombres de deux chiffres est égale à 484.

5. On a deux cubes dont les faces sont peintes en rouge ou en bleu. Le premier cube a cinq faces rouges et une face bleue. Lorsqu'on lance les deux cubes en même temps, la probabilité que les deux faces du dessus soient de la même couleur est de $\frac{1}{2}$. Combien de faces rouges y a-t-il sur le deuxième cube?

6. Les côtés du $\triangle ABC$ sont tels que $AB = 137$, $AC = 241$, et $BC = 200$. Il existe un point D, sur BC, tel que les cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD touchent le segment AD au point E. Déterminer la longueur du segment CD.



7. Déterminer la valeur minimale de $f(x)$, où

$$f(x) = (3\sin x - 4\cos x - 10)(3\sin x + 4\cos x - 10).$$

8. Un sablier est construit de deux cônes identiques. Au départ, le cône du haut est rempli de sable, tandis que le cône du bas est vide. Le sable coule, à taux constant, du cône du haut au cône du bas. Il faut exactement une heure pour que le cône du haut se vide. Combien de temps faut-il pour que la profondeur du sable dans le cône du bas soit égale à la moitié de la profondeur du sable dans le cône du haut? (On supposera qu'en tout temps la surface du sable dans chaque cône reste plate et horizontale.)

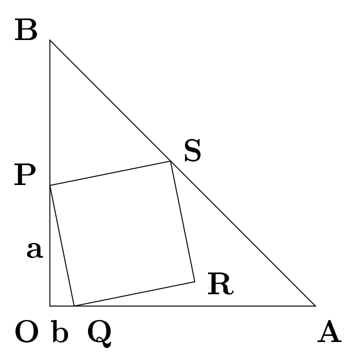
Partie B

Remarque: Les questions de la partie B vont être notées sur 10 points.

1. La droite d_1 d'équation $x - 2y + 10 = 0$ rencontre le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 100$ au point B dans le premier quadrant. Une droite passant par B, perpendiculaire à la droite d_1 coupe l'axe des y au point $P(0, t)$. Déterminer la valeur de t.

2. On considère les dix nombres $ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{10}$. Déterminer leur produit, sachant que leur somme est égale à 18, et que la somme de leurs inverses est égale à 6.

3. On considère un triangle rectangle isocèle AOB. On choisit des points P, Q et S sur les côtés respectifs OB, OA et AB, de manière à former un carré $PQRS$. Si les longeurs respectives de OP et OQ sont dénotées par a et b, et si l'aire du carré $PQRS$ est $\frac{2}{5}$ fois l'aire du triangle AOB, déterminer le rapport $a : b$.



4. Déterminer toutes les valeurs réelles de x, y et z qui vérifient le système déquations

$$\begin{aligned} x - \sqrt{yz} &= 42 \\ y - \sqrt{xz} &= 6 \\ z - \sqrt{xy} &= -30. \end{aligned}$$