La société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Le premier défi ouvert canadien de mathématiques

Le mercredi 27 novembre 1996

Examen

Durée: 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice N'EST PAS permis.

Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

Cette partie est composée de 10 questions de 3 points chacune. On peut obtenir les trois points d'une question en écrivant la réponse correcte dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier–réponse sera évalué et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B

Cette partie est composée de 3 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivant être écrites aux endroits appropriés du cahier–réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné 8 $1/2 \times 14$. Insérer ces feuilles dans le cahier–réponse.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUE : À la fin du concoures, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier–réponse.

Défi ouvert canadien de mathématiques

Remarques:	1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2. Inscrire toutes les réponses dans le cahier–réponse fourni à cet effet.
	3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que $4\pi, 2+\sqrt{7}$, etc.
	4. L'usage de la calculatrice n'est pas permis.

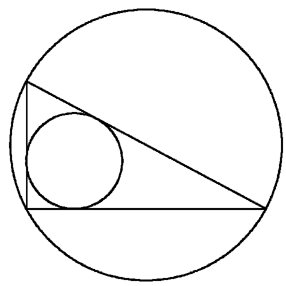
PARTIE A

Répondre à toutes les questions. Chaque problème dans cette section vaut trois points. On accorde trois points pour une réponse correcte, sans travail. Il est cependant possible de recevoir une partie des points pour un travail incomplet.

1. Les racines de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ sont aussi des racines de l'équation $2x^3 + 9x - 6x - 5 = 0$.
Quelle est la troisième racine de la deuxième équation?

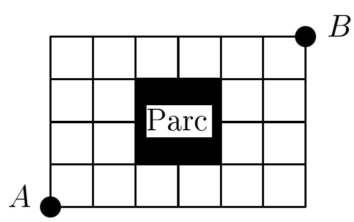
2. Les nombres a, b, c sont les chiffres d'un nombre de trois chiffres. Ils vérifient l'équation $49a + 7b + c = 286$. Quel est le nombre de trois chiffres $(100a + 10b + c)$?

3. Les sommets d'un triangle rectangle sont situés sur un cercle de rayon R. Les côtés du triangle sont tangents à un autre cercle, de rayon r. Sachant que les côtés qui forment l'angle droit ont des longueurs respectives de 16 et de 30, déterminer la valeur de $R + r$.



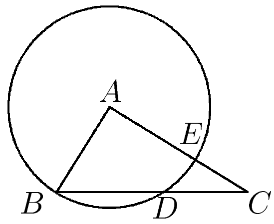
4. Déterminer le plus petit entier positif n qui vérifie l'équation $n^3 + 2n^2 = b$, b étant le carré d'un entier impair.

5. Le diagramme est un plan de la ville de Treillis. Le pérmètre du parc est une rue, mais il n'y a pas de rue qui traverse le parc. Un chemin le plus court, du point A au point B, est un chemin par lequel on ne s'éloigne jamais du point B. Combien y a–t–il de chemins les plus courts de A à B?



6. Dans une ligue de baseball de 14 équipes, chaque équipe a reconté chaque autre équipe 10 fois. À la fin de la saison, après avoir placé les équipes en ordre selon leur nombre de victoires, on a constaté que la différence dans le nombre de victoires de n'importe quelles deux équipes en positions adjacentes était toujours la même. Sachant qu'il n'y a pas eu de partie nulle, déterminer le plus grand nombre de parties que la dernière équipe a pu gagner.

7. Le triangle ABC est rectangle en A. Le cercle de centre A et de rayon AB coupe BC et AC aux points respectifs D et E, tel qu'illustré. Si $BD = 20$ et $DC = 16$, déterminer AC^2.



8. Déterminer tous les couples des nombres entiers, (x, y), qui vérifient l'équation

$$6x^2 - 3xy - 13x + 5y = -11.$$

9. Si $\log_{2n}(1944) = \log_n \left(486\sqrt{2}\right)$, calculer la valeur de n^6.

10. Déterminer la somme des mesures des angles A et B tels que $0° \leq A, B \leq 180°$ et

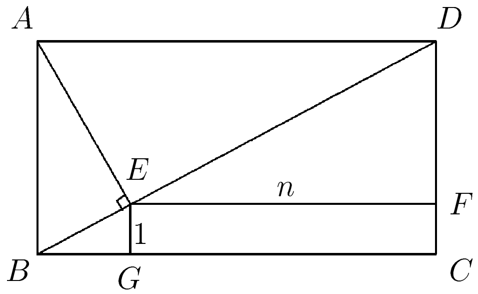
$$\sin A + \sin B = \sqrt{\frac{3}{2}}, \ \cos A + \cos B = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Partie B

Répondre à toutes les questions. Chaque problème de cette section vaut 10 points. Des points seront accordés pour la qualité de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Trois nombres forment une suite arithmétique dont la raison est 11. Si on diminue le premier nombre de 6, si on diminue le duexième nombre de 1 et si on double le troisième nombre, on obtient alors trois nombres qui forment une suite géométrique. Déterminer les trois nombres qui forment la suite arithmétique.

2. Un rectangle $ABCD$ a une diagonale de longueur d. On abaisse une perpendiculaire AE à la diagonale BD. Les côtés du rectangle $EFCG$ ont des longueur de 1 et de n. Démontrer que $d^{2/3} = n^{2/3} + 1$.



3. **(a)** On considère les nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ et la fonction polynôme du second degré

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 \ .$$

Démontrer que $f(x)$ atteint sa valeur maximale en $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, et démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \ .$$

(b) La somme de seize nombres positifs est égale à 100 et la somme de leurs carré est égale à 1000. Démontrer qu'aucun des seize nombres n'est supérieur à 25.