La Société mathématique du Canada
en collaboration avec
Le Centre d'Éducation en mathématiques et en informatique

Le quatrième Défi ouvert canadien de mathématiques

le mercredi 24 novembre 1999

Solutionnaire

Partie A

Remarque: Les questions de la partie A ont été notées sur 5 points.

1. *Réponse*
   495
   La moyenne obtenue à cette question était de 3.7.

   Commentaires
   Cette question était facile à résoudre en additionnant les séries de nombre ¡¡ de l'avant à l'arrière ¿¿ ou en utilisant une formule. Les étudiants auraient aussi pu additionner les termes de facon mécanique et obtenir la même réponse.

2. *Réponse*
   $-2 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 3, x \in \mathbf{R}$
   La moyenne obtenue à cette question était de 3.9.

   Commentaires
   Les coordonnées à l'origine de la fonction sont de -2, 0 ou 3, ce qui donne comme réponse $-2 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 3$. De facon générale,

les étudiants auraient dû commencer par résoudre les coordonnées à l'origine, puis se servir du diagramme pour obtenir les bons intervalles. Les étudiants doivent être attentifs lorsqu'ils ont affaire à des signes d'inégalité. De nombreux étudiants ont mis leurs signes à l'envers.

3. *Solution* Si nous faisons la conversion sur une base de $\frac{2}{3}$, nous obtenons,

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\left(\frac{8}{27}\right)^{1-x} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{1-x} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

Donc $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$

Puisques les bases sont égales, $-x+3=1$, $x=2$.

La moyenne obtenue à cette question était de 3.7.

Commentaires

Cette question a été assez bien réussie en général. Il faut souligner que la conversion à la base de $\frac{2}{3}$ est de loin la manière la plus facile d'aborder cette équation. La plus grande erreur a été la mauvaise utilisation des règles de puissance pour les exposants.

4. *Solution*

Si l'on met en facteur l'équation 3, $(x+2y-z)(x+2y+z)=15$.

Si l'on substitue $x+2y-z=5$, $5(x+2y+z)=15$ ou, $x+2y+z=3$.

Si l'on soustrait ceci de (2): $2x=8$

Donc, $x=4$.

La moyenne obtenue à cette question était de 3.4.

Commentaires

Bon nombre de très bonne solutions ont été données par les étudiants qui se sont servis des deux premières équation pour en arriver à $y = 4-x$ et $z=3-x$. C'est ce qui a permis de faire les substitutions dans la troisième équation. Cependant, le meilleur moyen de procéder était de mettre en facteur la troisième équation comme étant la différence entre les carrés, puis de faire la substitution directe de $x + 2y - z = 5$ tel que démontré précédemment.

5. *Solution*

   La mise en facteur done, $2\sin^2 x(\sin x + 3) - (\sin x + 3) = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 x - 1)(\sin x + 3) = 0$. Soit $\sin x = -3$, ce qui est inadmissible puisque $|\sin x| \leq 1$, ou

$$2\sin^2 x = 1$$
$$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Ainsi, $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$.

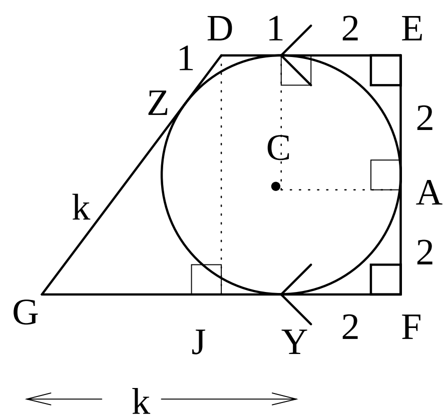
   La moyenne obtenue à cette question était de 1.8.

   Commentaires

   Cette équation aurait pu être résolue en mettant directement en facteur, ou en utilisant le théorème de facteur. Les étudiants auraient dû commenter dans leur solution que $\sin x = -3$ est inadmissible. À partir de là, il est facile de reconnaître que $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ a quatre solutions possibles.

6. *Solution*

   À partir de C tracer une ligne perpendiculaire à DE et EF et identifiez le diagramme tel que montré. À partir de D tracer une ligne perpendiculaire à GF qui doit rejoindre la ligne en J.



   Puisque $DE = JF = 3$, $JY = 3 - 2 = 1$. Alors, $GJ = k - 1$. Puisque $\triangle DJG$ est à angle droit, $(k+1)^2 = (k-1)^2 + 4^2$ ou, $k^2 + 2k + 1 = 16 + k^2 - 2k + 1$, $4k = 16$, $k = 4$. Ce qui fait que $GF = 6$ et que l'aire du trapézoidale $DEFG$ correspond à $\dfrac{(3+6)}{2}(4) = 18$.

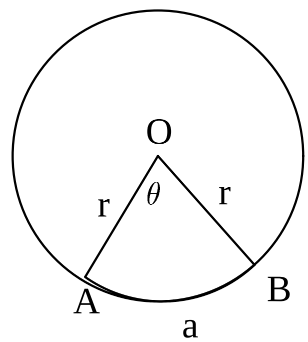
   La moyenne obtenue à cette question était de 2.1.

Commentaires

Cette question pouvait être traitée de diverse facons. La plus facile consistait à utiliser les propriétés des tangentes d'un cercle et le théorème de Pythagore. Lorsqu'on résout des problèmes de ce genre, il s'agit toujours de laisser tomber les perpendiculaires et d'utiliser simplement les propriétés du cercle ou de triangle afin d'obtenir les bonnes équations. Un certain nombre de solutions faisant preuve d'originalité et de discernement ont été apportées à ce problème.

7. *Solution*

Soit $a + 2r = 12$. Donc $a = 12 - 2r$. La formule de l'aire (A) d'un secteur est, $A = \frac{1}{2}ar$ où a est la longueur de l'arc et r est le rayon. À l'aide de la formule de l'aire,



$$A = \frac{1}{2}(12 - 2r)r$$

$$A = -r^2 + 6r$$

Pour agrandir l'aire, nous complétons le carré ou nous nous servons du calcul pour trouver que $r = 3$. Ainsi, la rayon agrandissant l'aire est $r = 3$.

La moyenne obtenue à cette question était de 1.6.

Commentaires

Cette question a été bien résolue par une forte proportion des concurrents. La formule de l'aire d'un secteur peut facilement être dérivée pour obtenir $A = \frac{1}{2}ar$. À partir de là, si nous nous servons de la relation $a + 2r = 12$ il est facile d'obtenir la bonne expression pour l'aire du secteur du cercle. Il est réjouissant de voir le nombre d'étudiants qui ont correctement résolu ce problème.

8. *Solution*

Si nous remanions la fraction $\frac{14k + 17}{k - 9}$ de la facon suivante:

$$\frac{14k + 17}{k - 9} = \frac{[14(k - 9) + 126] + 17}{k - 9} = \frac{14(k - 9)}{k - 9} + \frac{143}{k - 9} = 14 + \frac{143}{k - 9}, k \neq 9$$

Puisque $143 = 1.11.13$, il est facile de constater que $k - 9 = qd$ où d est un nombre contenu dans $1.11.13$ et que ni q ni d n'égalent 1. La plus petite valeur possible de d et q est 11 et 2 respectivement. Ce qui fait que $k = 31$.
La moyenne obtenue à cette question était de 0.9.

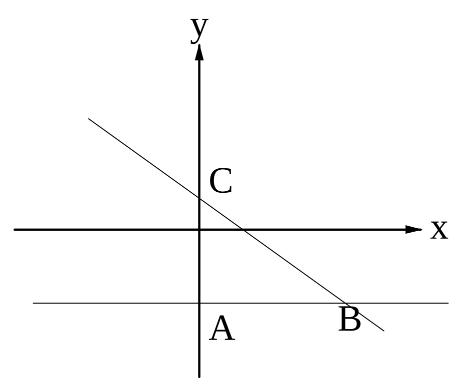
Commentaires
Il est réjouissant de voir le nombre de concurrents qui ont résolu ce problème et la diversité des solutions. Certains étudiants ont fait l'observation à l'effet que $d|k - 9$ et $d|14k + 17$ et qu'ainsi $d|14k + 17 - 14(k - 9)$ ou $d|143$, ce qui les a menés rapidement à la solution.

Partie B

Les questions de la partie B ont été notées sur 10 points.

1.

(a) *Solution*
La ligne $y = \frac{-3}{4}x + b$ rencontre l'axe y en C et la ligne $y = -4$ en B. Puisque la pente de cette ligne est de $\frac{-3}{4}$, nous laissons AC devenir $3a$ et AB devenir $4a$. Ainsi, l'aire du triangle est obtenue grâce à



$$\frac{1}{2}(3a)(4a) = 24$$

$$6a^2 = 24$$

$$a^2 = 4$$

$$a = \pm 2$$

Alors $3a = \pm 6$. Maintenant, les coordonnées de C sont $(0, b)$, alors $AC = 6 + 4$. Ainsi $b + 4 = \pm 6$
$b = 2$ or -10

Commentaires

Le meilleur moyen de résoudre ce problème était de reconnaître qu'une pente de $\frac{-3}{4}$ signifie que le rapport de la hauteur de la base du triangle est de $3a : 4a$. Si le triangle a une aire de 24, alors la longeur réelle des côtés est de 6 et de 8. Ce qui donne : $b = 2$ ou $b = -10$. Dans la partie (b), le triangle est à angle droit et son hypoténuse est de 10. Ce qui donne un rayon de 5. Les étudiants devraient toujours tracer des diagrammes pour résoudre des problèmes de ce genre. De nombreux étudiants ont perdu des points ici parce qu'ils n'ont pas expliqué comment ils étaient parvenus à leur réponse et n'ont pas visualisé de solution.

(b) *Solution*

Puisque chaque triangle a des côtés d'une longueur de 6 et de 8, alors l'hypoténuse a une longueur de 10. Le demi-cercle doit avoir un rayon de 5.

La moyenne obtenue à cette question était de 3.4.

2. *Solution*

Considérons que nous pouvons agrandir et comparer les coefficients. Si l'on agrandit,

$$(x + r)(x^2 + px + q) = x^3 + (p + r)x^2 + (pr + q)x + qr$$

Si l'on compare les coefficients,

$$p + r = b \tag{1}$$
$$pr + q = c \tag{2}$$
$$qr = d \tag{3}$$

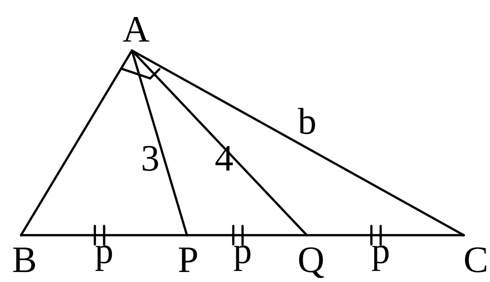
Si $bd + cd$ est impair, alors $d(b + c)$ l'est aussi. À partir de cela, d et $b + c$ sont tous deux impairs. À partir de (3), si d est impair, alors q et r le sont aussi.(4)

Si l'on additionne (1) et (2), $b+c = p+r+pr+q = (q+r)+p(1+r)$. Puisque $b + c$ est impair, alors $(q + r) + p(1 + r)$ l'est aussi. À partir de (4), si q et r sont tous deux impairs, alors $q + r$ est pair. Cela signifie que $p(1 + r)$ doit être impair, mais cela est impossible puisque r

est impair et que $r + 1$ est de ce fait par, rendant $p(1 + r)$ pair et impair en même temps. Cette contradiction signifie que notre hypothèse première étiat inexacte et que, de ce fait, $x^3 + bx^2 + cx + d$ ne peut être exprimé sous la forme de $(x + r)(x^2 + px + q)$.
La moyenne obtenue à cette question était de 2.1.

Commentaires
Il y a eu diverses solutions attrayantes à ce problème. Voici une de ces solutions reproduite en entier. La méthode de la preuve est celle de la contradiction. En gros, nous supposons qu'il est possible de comparer les coefficients en agrandissant le côté gauche. À partir de cela, nous démontrons que cela mène à une contradiction. Puisque la conclusion est contradictoire, notre hypothèse de départ doit avoir été fausse et, de fait, il est impossible de comparer les coefficients, tel que demandé. Bon nombre d'étudiants ont élaboré des preuves fort diversifiées, dont certines étient tout à fait uniques et intéressantes, et de fait, correctes.

3. *Solution*
Identifier $\triangle ABP$ tel que montré. À partir de $\triangle ABP$, $3^2 = p^2+c^2-2pc\cos B$. Puisque $\angle BAC$ est un angle droit, $\cos B = \dfrac{c}{3p}$

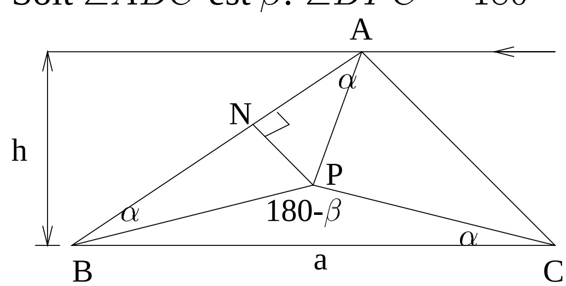


alors $9 = p^2 + c^2 - 2pc\left(\dfrac{c}{3p}\right)$
ou, $9 = p^2 + \dfrac{1}{3}c^2$ (1)
En procédant de la même facon en $\triangle ACQ$ nous obtenons,
$16 = p^2 + \dfrac{1}{3}b^2$ (2)
Si l'on additionne (1) et (2), on obtient, $25 = 2p^2 + \dfrac{1}{3}(b^2 + c^2)$.
Puisque $b^2 + c^2 = 9p^2$, $25 = 2p^2 + \dfrac{1}{3}(9p^2) = 5p^2$.
Donc, $p = \sqrt{5}(p > 0)$ and $BC = 3\sqrt{5}$ ou $\sqrt{45}$.
Puisque $p = \sqrt{5}$, la substitution de (1) et (2) dans l'équation donne

$AB = \sqrt{12}$ et $AC = \sqrt{33}$.
La moyenne obtenue à cette question était de 1.0.

Commentaires
Ce problème pouvait être abordé bien des facons. Nous donnons plus haut une des nombreuses preuves possibles. De nombreux étudiants ont tenté de faire la preuve à l'aide de parallèles à AB passant au travers de P et Q, puis en utilisant le théorème de séparation des côtés. Ceci nous mène à une applications simple du théorème de Pythagore et à un bel ensemble d'équations à résoudre. Le nombre d'étudiants qui ont présenté des solutions uniques était réjouissant.

4. *Solution*
Soit P est un point à l'intérieur de $\triangle ABC$ de facon qu'à ce que $\angle PAB = \angle PBA = \angle PCB = \alpha$.
Soit $\angle ABC$ est β. $\angle BPC = 180 - [(\beta - \alpha) + \alpha] = 180 - \beta$.



À partir de P tracer une ligne perpendiculaire à AB qui rejoint AB en N. Si on applique la fonction du sinus en $\triangle PBC$,

$$\frac{PB}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180-\beta)} = \frac{a}{\sin\beta}$$

Donc, $PB = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$ (1)
À partir de $\triangle BPN$, $\cos\alpha = \dfrac{BN}{PB} = \dfrac{AB}{2PB}$ ou $PB = \dfrac{AB}{2\cos\alpha}$ (2)
Si nous égalisons nos deux expressions, (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{AB}{2\cos\alpha}$$

ou

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{AB\sin\beta}{a}$$
$$\sin 2\alpha = \frac{AB\sin\beta}{a}$$

Puisque $AB \sin\beta = h$ alors $\sin 2\alpha = \frac{h}{a}$
Puisque $h < \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\sin 2\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (par substitution)
Alors $2\alpha < \frac{\pi}{3}$ et $\alpha < \frac{\pi}{6}$ ou $2\alpha > \frac{2\pi}{3}$ et $\alpha > \frac{\pi}{3}$.
Mais $\alpha > \frac{\pi}{3}$ est impossible puisque la somme des angles du triangle est π. D'où il y a une valeur à α pour n'importe quel a et h.
La moyenne obtenue à cette question était de 0.1.

Commentaires
Ce problème était très ardu. Il peut être résolu de trois ou quatre facons. Un certain nombre de concurrents ont répondu correctement à cette question. Nous n'avons donné qu'une seule solution. Certains étudiants ont résolu le problème, mais seulement un ou deux d'entre eux ont tenté de tenir compte des restrictions, $h \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. On aurait pu tenter de résoudre ce problème à l'aide des coordonnées, mais cela devenait difficile sur le plan mécanique.