La Société mathématique du Canada
en collaboration avec
Le Centre d'Éducation
en mathématiques et en informatique

Le quatrième Défi ouvert canadien de mathématiques

le mercredi 24 novembre 1999

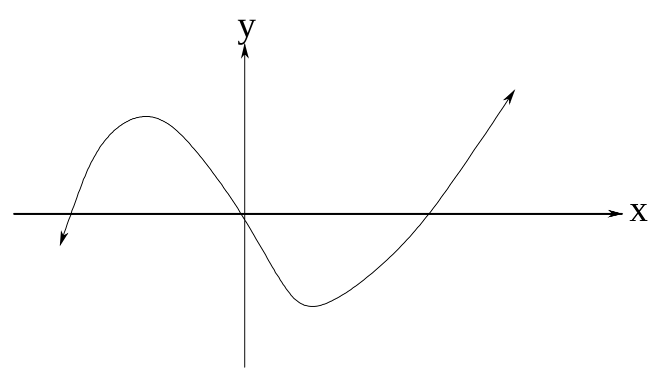
Questionnaire

Partie A

Remarque: Les questions de la partie A vont être notées sur 5 points.

1. Déterminer la somme de tous les entiers positif impairs qui sont formés de deux chiffres et qui sont divisibles par 5.

2. Le diagramme illustre une *esquisse* de la représentation graphique de $y = (2x+4)(x^2-3x)$. Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $y \geq 0$?



3. Résoudre l'équation x : $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{1-x} = \frac{2}{3}$.

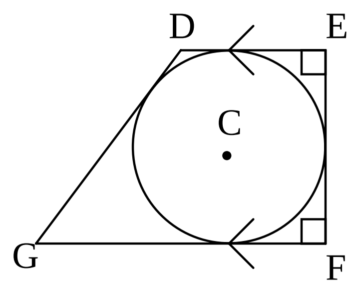
4. Résoudre le système d'équations en déterminant les valeurs de x.

$$x + 2y - z = 5$$
$$3x + 2y + z = 11$$
$$(x + 2y)^2 - z^2 = 15$$

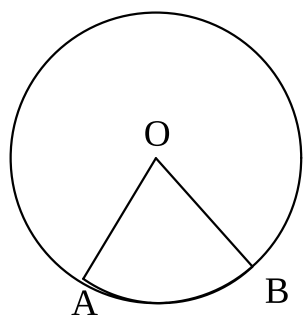
5. Déterminer les valeurs de x qui vérifient:

$$2\sin^3 x + 6\sin^2 x - \sin x - 3 = 0, 0 < x < 2\pi$$

6. Le diagramme illustre cercle de centre C et de rayon 2 inscrit dans un trapèze $DEFG$. Déterminer l'aire du trapèze, sachant que le côté le plus court, DE, des deux côtés parallèles a une longueur de 3 unités et que les angles DEF et EFG sont droits.



7. Le secteur OAB d'un cercle de centre O a un périmètre de 12 unités. Déterminer le rayon du cercle pour lequel l'aire du secteur est un maximum.



8. Déterminer le plus petit entier strictement positif, k, pour lequel l'expression $\frac{14k+17}{k-9}$ devient une fraction de la forme $\frac{pd}{qd}$ où p, q et d sont des entiers positifs, p et q n'admettent aucun diviseur commun et si $q \neq 1$ et $d \neq 1$.

Partie B

Remarque: Les questions de la partie B vont être notées sur 10 points.

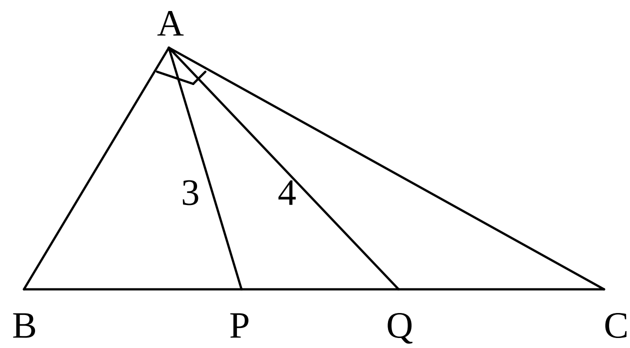
1.

(a) Deux triangles identiques ont chacun une aire de 24. Leurs sommets sont les points d'intersection des droites définies par $y = -4$,$x = 0$ et $y = \frac{-3}{4}x + b$. Déterminer deux valeurs possibles de b.

(b) Pour l'un ou l'autre de ces deux triangles, on peut tracer un cercle passant par les trois sommets. Quel est le rayon d'un tel cercle?

2. Si $(bd+cd)$ est un entier impair, démontrer que le polynôme du troisième degré x^3+bx^2+cx+d ne peut être exprimé sous la forme $(x+r)(x^2+px+q)$, où b, c, d, r, p et q sont tous des entiers.

3. Le triangle ABC est rectangle en A. Les points P et Q sont situés sur l'hypoténuse BC de manière que $BP = PQ = QC$, $AP = 3$ et $AQ = 4$. Déterminer la longueur de chaque côté du triangle ABC.



4. On considère l'ensemble des triangles ABC dont la longueur de la base BC est égal à a et dont la hauteur du sommet A à BC est égale à h, avec $h < \frac{\sqrt{3}}{2}a$. P est un point à l'intérieur d'un tel triangle de manière que $\angle PAB = \angle PBA = \angle PCB = \alpha$. Démontrer que la valeur de α est la même pour tout triangle de l'ensemble.