The Canadian Mathematical Society La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

Financière Sun Life

le mercredi 24 novembre 2010

Durée: 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice n'est pas permis.
Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A
Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la (les) réponse(s) correcte(s) dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B
Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom et le nom de votre école sur chaque feuille insérée.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUES
À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.
Une liste sera publiée, sur le site Web de la SMC et celui du CEMI, portant le nom des candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de points.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques
Financière Sun Life

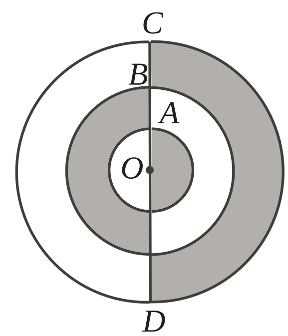
Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que $12{,}566\ldots$ ou $4{,}646\ldots$.
	4.	L'usage de la calculatrice **n'est pas** permis.
	5.	Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

PARTIE A

1. Déterminer l'entier qui est égal à $\dfrac{(9+5)^2-(9-5)^2}{(9)(5)}$.

2. Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $x-(8-x)=8-(x-8)$.

3. Dans la figure ci-contre, chacun des trois cercles a pour centre O. Le diamètre CD du plus grand cercle passe aux points B, A et O. Les rayons des trois cercles ont pour longueurs $OA=2$, $OB=4$ et $OC=6$. Quelle est l'aire de la région ombrée ?

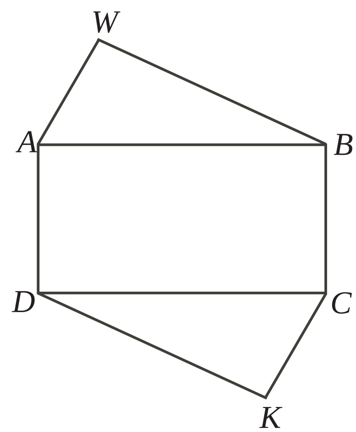


4. Déterminer le nombre de chiffres de l'entier qui est égal à $\dfrac{(3{,}1\times10^7)(8\times10^8)}{2\times10^3}$.

5. Quel point sur la droite d'équation $y=x$ est le plus près du point $P(-3,9)$?

6. Dans un examen de calcul infinitésimal, les élèves qui ont étudié ont obtenu une moyenne de 90 %, tandis que ceux qui n'ont pas étudié ont obtenu une moyenne de 40 %. La classe au complet a obtenu une moyenne de 85 %. Quel pourcentage de la classe n'a pas étudié ?

7. Dans la figure ci-contre, le rectangle $ABCD$ a pour dimensions $AB=20$ et $BC=10$. Les points W et K sont situés à l'extérieur du rectangle de manière que $WA=KC=12$ et $WB=KD=16$. Déterminer la longueur de WK et exprimer la réponse sous la forme $WK=m\sqrt{n}$, m et n étant des entiers positifs et $m>1$.



8. Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles

$$(x^2+3x+2)(x^2-2x-1)(x^2-7x+12)+24=0\ .$$

PARTIE B

1. Dans chaque partie de ce problème, chacune des variables du tableau doit être remplacée par un entier. La somme des entiers d'une rangée est donnée à la droite de la rangée. La somme des entiers d'une colonne est donnée au bas de la colonne. Par exemple, à partir du tableau ci-contre, on peut conclure que $X+13=30$, $Y+11=23$, $X+Y=29$ et $13+11=24$.

X	13	30
Y	11	23
29	24	

   (a) Déterminer la valeur de C.

A	A	50
B	C	44
37	57	

   (b) Déterminer la valeur de n, soit la somme des entiers de la deuxième colonne.

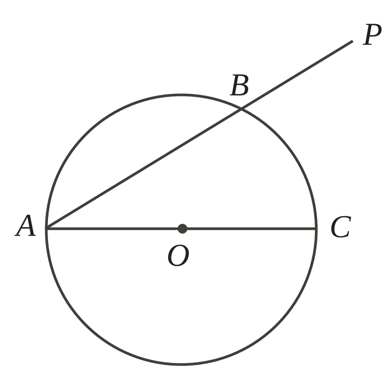
D	D	D	30
F	F	E	55
F	E	E	50
50	n	40	

   (c) Déterminer la valeur de $P+Q$.

P	Q	T	R	20
Q	P	T	R	20
R	R	R	T	33
T	T	T	R	19
20	20	19	33	

2. La parabole d'équation $y=x^2-4x+12$ coupe la droite d'équation $y=-2x+20$ aux points A et B.
   (a) Déterminer les coordonnées des points A et B.
   (b) Déterminer les coordonnées du milieu M du segment AB.
   (c) Une droite parallèle à la droite d'équation $y=-2x+20$ coupe la parabole aux points distincts $P(p,p^2-4p+12)$ et $Q(q,q^2-4q+12)$. Démontrer que $p+q=2$.
   (d) Soit N le milieu de PQ. Expliquer pourquoi le segment MN est vertical.

3. Dans la figure ci-contre, le cercle de centre O et de diamètre AC a un rayon de 1. Au point A, on trace une corde jusqu'à un point quelconque B (différent de A) sur le cercle et on la prolonge jusqu'à un point P de manière que $BP=1$. Ainsi P peut prendre un grand nombre de positions. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points P.



   (a) Soit U un point dans $\mathcal{S}$ pour lequel UO est perpendiculaire à AC. Déterminer la longueur de UO.
   (b) Soit V un point dans $\mathcal{S}$ pour lequel VC est perpendiculaire à AC. Déterminer la longueur de VC.
   (c) Déterminer s'il existe ou non un cercle sur lequel sont situés tous les points de $\mathcal{S}$.

4. L'expression $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x.
Par exemple, $\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3$ et $\lfloor -1{,}4 \rfloor = -2$.
Lorsque $x > 0$, on définit $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) - \left\lfloor x + \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
Par exemple, $f\left(\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{4}{9} + \frac{9}{4}\right) - \left\lfloor \frac{4}{9} + \frac{9}{4} \right\rfloor = \frac{97}{36} - 2 = \frac{25}{36}$.
   (a) Déterminer toutes les valeurs de x ($x > 0$) pour lesquelles $f(x) = x$.
   (b) Supposons que $x = \dfrac{a}{a+1}$, a étant un entier quelconque tel que $a > 1$.
   Démontrer que $x \neq f(x)$, mais que $f(x) = f(f(x))$.
   (c) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels u tels que :
   – $0 < u < 1$,
   – u, $f(u)$ et $f(f(u))$ sont tous distincts et
   – $f(f(u)) = f(f(f(u)))$.