The Canadian Mathematical Society — La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

Financière Sun Life

le mercredi 19 novembre 2008

Durée: 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice n'est pas permis.
Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la (les) réponse(s) correcte(s) dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B

Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom et le nom de votre école sur chaque feuille insérée.

Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUES

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Une liste sera publiée, sur le site Web de la SMC et celui du CEMI, portant le nom des candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de points.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques
Financière Sun Life

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que $12{,}566\ldots$ ou $4{,}646\ldots$.
4. L'usage de la calculatrice **n'est pas** permis.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

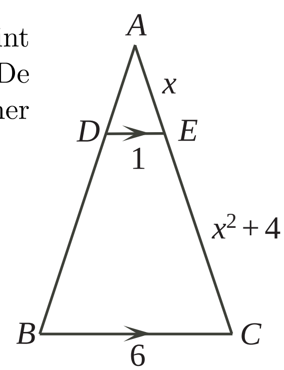
PARTIE A

1. Si $2x + y = 13$ et $x + 2y = 11$, quelle est la valeur de $x + y$?

2. Déterminer le chiffre des unités de l'entier qui est égal à $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4$.
(Le *chiffre des unités* d'un entier est le chiffre qui est placé le plus à droite. Par exemple, le chiffre des unités de l'entier 1234 est 4.)

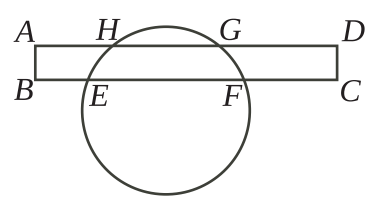
3. Si la moyenne de quatre entiers strictement positifs *différents* est égale à 8, quelle est la plus grande valeur possible de n'importe quel de ces entiers ?

4. Dans la figure ci-contre, le point D est situé sur AB et le point E est situé sur AC de manière que DE soit parallèle à BC. De plus, $DE = 1$, $BC = 6$, $AE = x$ et $EC = x^2 + 4$. Déterminer toutes les valeurs possibles de x.

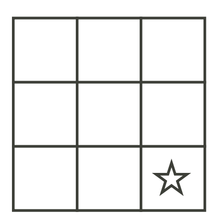


5. Quatre entiers consécutifs p, q, r et s (où $p < q < r < s$) vérifient l'équation $\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{4}r = s$. Quelle est la valeur de s ?

6. Dans la figure ci-contre, le rectangle $ABCD$ coupe un cercle aux points E, F, G et H. Sachant que $AH = 4$, $HG = 5$ et $BE = 3$, déterminer la longueur de EF.



7. Dans la figure ci-contre, on a placé une étoile dans la case inférieure droite d'une grille 3×3. On lance une pièce de monnaie juste à plusieurs reprises. À chaque fois que la pièce indique face, l'étoile est déplacée d'une case vers le haut ; à chaque fois que la pièce indique pile, l'étoile est déplacée d'une case vers la gauche. (L'étoile peut être déplacée hors de la grille.) Déterminer la probabilité pour que l'étoile se rende dans la case supérieure gauche de la grille.

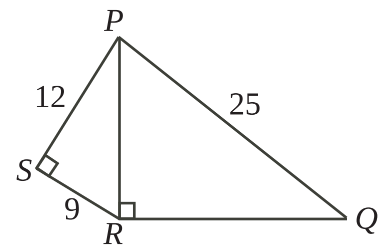


8. Déterminer la somme de toutes les valeurs entières du paramètre r pour lesquelles l'équation $x^3 - rx + r + 11 = 0$ admet au moins une solution entière positive (au moins une valeur entière positive de x).

PARTIE B

1. Dans la figure ci-contre, le triangle PSR est rectangle en S et le triangle PRQ est rectangle en R. De plus, $PS = 12$, $SR = 9$ et $PQ = 25$.

   (a) Déterminer la longueur de RQ.
   (b) Déterminer l'aire de la figure $PQRS$.
   (c) Démontrer que $\angle QPR = \angle PRS$.
   (d) Déterminer la longueur de SQ.



2. (a) Déterminer tous les nombres réels x tels que $(x + 3)(x - 6) = -14$.
   (b) Déterminer tous les nombres réels x tels que $2^{2x} - 3(2^x) - 4 = 0$.
   (c) Déterminer tous les nombres réels x tels que $(x^2 - 3x)^2 = 4 - 3(3x - x^2)$.

3. (a) Une suite infinie $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ vérifie l'égalité

$$a_{m-n} + a_{m+n} = \tfrac{1}{2}a_{2m} + \tfrac{1}{2}a_{2n}$$

   pour tous les entiers non négatifs m et n (où $m \geq n \geq 0$).
   (i) Démontrer que $a_0 = 0$.
   (ii) Sachant que $a_1 = 1$, déterminer la valeur de a_2 et celle de a_3.

   (b) Une suite infinie $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ vérifie l'égalité

$$b_{m-n} + b_{m+n} = b_{2m} + b_{2n}$$

   pour tous les entiers non négatifs m et n (où $m \geq n \geq 0$). Démontrer que tous les termes de la suite ont la même valeur.

4. On dit qu'un triangle est *automédian* si ses trois médianes peuvent être utilisées pour former un triangle semblable au triangle initial.

   (a) Démontrer que le triangle qui a des côtés de longueurs 7, 13 et 17 est automédian.
   (b) Un triangle ABC a des côtés de longueurs $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ (où $a < b < c$). Sachant que le triangle ABC est automédian, démontrer que $a^2 + c^2 = 2b^2$.
   (c) Déterminer une famille infinie de triangles automédians ayant chacun des côtés de longueurs entières, de manière que la famille ne contienne pas de triangles semblables. Bien démontrer le résultat.

Défi ouvert
canadien de
mathématiques
Finacière
Sun Life
2008
(français)