The Canadian Mathematical Society La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

Financière Sun Life

le mercredi 21 novembre 2007

Durée: 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice n'est pas permis.
Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la (les) réponse(s) correcte(s) dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B

Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom et le nom de votre école sur chaque feuille insérée.

Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUES

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Une liste sera publiée, sur le site Web de la SMC et celui du CEMI, portant le nom des candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de points.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques
Financière Sun Life

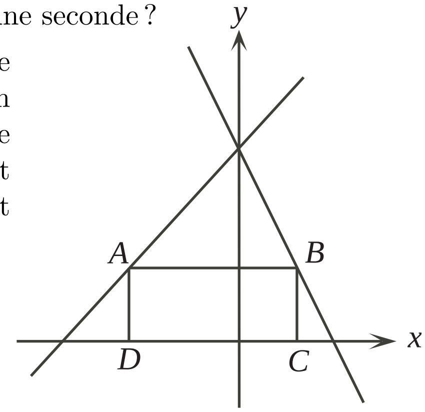
Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 . . . ou 4,646 . . ..
	4.	L'usage de la calculatrice **n'est pas** permis.

PARTIE A

1. Si $a = 15$ et $b = -9$, quelle est la valeur de $a^2 + 2ab + b^2$?

2. L'hélice d'une génératrice éolienne tourne à une vitesse de 30 tours complets par minute. Combien de degrés l'hélice balaie-t-elle en une seconde ?

3. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle dont le sommet A est situé sur la droite d'équation $y = x + 10$, le sommet B est situé sur la droite d'équation $y = -2x + 10$ et les sommets C et D sont situés sur l'axe des abscisses. Si $AD = 4$, quelle est l'aire du rectangle $ABCD$?



4. Au mois de juin, le rapport du nombre de garçons au nombre de filles dans l'école était de 3 : 2. En septembre, il y avait 80 garçons de moins et 20 filles de moins dans l'école et le rapport du nombre de garçons au nombre de filles était de 7 : 5. Combien y avait-il d'élèves dans l'école au mois de juin ?

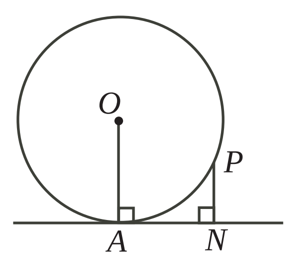
5. Les nombres $1, 2, 3, \ldots, 9$ sont placés dans un tableau de forme carrée. On additionne la somme de chaque ligne, la somme de chaque colonne et la somme de chaque diagonale pour former une « grande somme » S.
   Par exemple, si les nombres sont placés comme dans le tableau ci-dessous, la grande somme est égale à :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$$\begin{aligned} S &= \text{sommes des lignes} + \text{sommes des colonnes} \\ &\qquad + \text{sommes des diagonales} \\ &= 45 + 45 + 30 \\ &= 120 \end{aligned}$$

   Quelle est la valeur maximale possible de la grande somme S ?

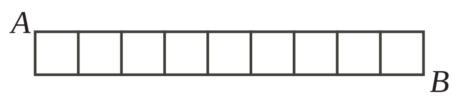
6. Dans la figure ci-contre, O est le centre du cercle, AN est tangente au cercle au point A, P est situé sur le cercle et PN est perpendiculaire à AN. Sachant que $AN = 15$ et $PN = 9$, déterminer le rayon du cercle.



7. Déterminer tous les triplets de nombres réels, (x, y, z), qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned} xy &= z^2 \\ x + y + z &= 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 133 \end{aligned}$$

8. Dans la figure suivante, on a placé 28 segments de longueur 1 de manière à former 9 carrés. Il est possible de suivre divers chemins de A à B, en parcourant des segments, de manière qu'aucun segment ne soit utilisé plus d'une fois dans un même chemin. Parmi ces divers chemins, déterminer
   – la longueur de chemin qui survient le plus souvent et
   – le nombre de chemins de cette longueur.

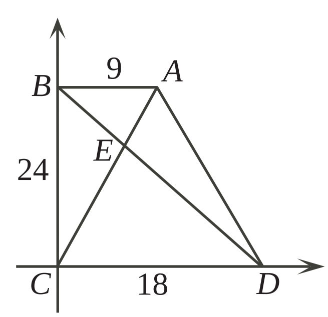


PARTIE B

1. Une suite arithmétique a, $a + d$, $a + 2d$, ... est une suite dans laquelle la différence d entre les termes consécutifs est constante. Par exemple, $2, 5, 8, \ldots$ est une suite arithmétique dont $d = 3$, car $5 - 2 = 8 - 5 = 3$.
   (a) Sachant que $x - 1$, $2x + 2$ et $7x + 1$ sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique, déterminer la valeur de x.
   (b) En utilisant la valeur de x de la partie (a), quelle est la valeur du terme du milieu de la suite arithmétique $x - 1$, $2x + 2$, $7x + 1$, ... , 72 ?

   Une suite géométrique a, ar, ar^2, ... est une suite dans laquelle le rapport r de deux termes consécutifs est constant. Par exemple, la suite $2, 10, 50, \ldots$ est une suite géométrique dont $r = 5$, car $\frac{10}{2} = \frac{50}{10} = 5$.
   (c) Sachant que $y - 1$, $2y + 2$ et $7y + 1$ sont les trois premiers termes d'une suite géométrique, déterminer toutes les valeurs possibles de y.
   (d) Pour chacune des valeurs de y de la partie (c), déterminer le 6[e] terme de la suite géométrique $y - 1$, $2y + 2$, $7y + 1$, ...

2. Dans la figure suivante, $\angle ABC = \angle BCD = 90°$. De plus, $AB = 9$, $BC = 24$ et $CD = 18$. Les diagonales AC et BD du quadrilatère $ABCD$ se coupent en E.
   (a) Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.
   (b) Démontrer que le rapport $DE : EB$ est égal à $2 : 1$.
   (c) Déterminer l'aire du triangle DEC.
   (d) Déterminer l'aire du triangle DAE.



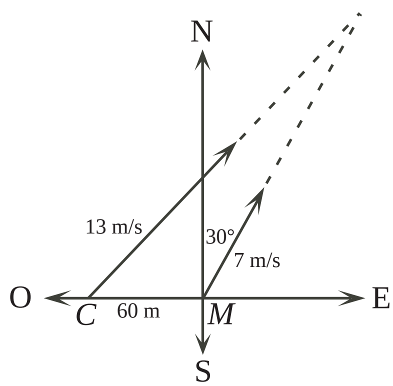
3. Alphonse et Bérénice participent à un jeu selon les règlements suivants :
   - Au départ, il y a un tas de N cailloux, $N \geq 2$.
   - Les deux jouent à tour de rôle, en commençant par Alphonse. À son premier tour, Alphonse doit enlever au moins 1 et au plus $N-1$ cailloux du tas.
   - Si un joueur enlève k cailloux lors de son tour, l'autre doit enlever au moins 1 et au plus $2k-1$ cailloux au tour suivant.
   - Le joueur qui enlève le dernier caillou gagne.

   (a) Déterminer qui devrait gagner lorsque $N = 7$ et expliquer la stratégie gagnante.

   (b) Déterminer qui devrait gagner lorsque $N = 8$ et expliquer la stratégie gagnante.

   (c) Déterminer toutes les valeurs de N pour lesquelles il existe une stratégie gagnante pour Bérénice. Expliquer cette stratégie.

4. Un chat est situé au point C, qui est à 60 mètres directement à l'ouest d'une souris située au point M. La souris tente de s'échapper à une vitesse de 7 m/s en direction 30° du nord, comme dans la figure. Le chat, qui est expert en géométrie, court à une vitesse de 13 m/s le long d'une droite qui lui permettra d'intercepter la souris le plus vite possible.



   (a) Sachant que t est le temps, en secondes, que le chat met pour intercepter la souris, déterminer la valeur de t.

   (b) Supposons que la souris choisit une autre direction pour se sauver. Démontrer que, peu importe la direction choisie, tous les points d'interception sont situés sur un cercle.

   (c) Supposons que la souris est interceptée après avoir parcouru une distance de d_1 mètres dans une direction particulière. Si la souris avait été interceptée après avoir parcouru une distance de d_2 mètres dans la direction opposée, démontrer que $d_1 + d_2 \geq 14\sqrt{30}$.